

Aplicações no Ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple

Some applications in Complex Variable Teaching: an discussion about the use of the softwares Geogebra and the CAS Maple

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES¹

Resumo

Discute-se nesse artigo alguns exemplos de aplicação do software Geogebra no ensino de Análise Complexa. Tópico reconhecidamente de caráter abstrato, num determinado contexto, pode produzir uma série de dificuldades aos estudantes, na medida em que, restringimos nossa mediação, do âmbito acadêmico, ao emprego de argumentações formais e estruturais. Assim, mostramos uma via alternativa para o ensino, que torna hegemônico a algoritmização, tendo em vista o emprego da tecnologia, com forte apelo intuitivo e que enfatiza a visualização e a percepção de propriedades topológicas. Dessa maneira, fornecemos alguns indícios para a exploração da visualização como elemento catalizador de um entendimento tácito e inicial para os estudantes universitários.

Palavras-chave: Análise Complexa, Visualização, Geogebra, CAS Maple.

Abstract

We discuss in this article some examples of application of the software Geogebra in teaching Complex Analysis. Topic admittedly abstract character, in a specific context, it can produces some kind of difficulties to students, if we restrict our didactical mediation, in the academic environment, by the use of formal and structural arguments. So, we show an alternative way relatively to the teaching that emphasize a algebraic style, through the use of technology, with a strong intuitive appeal and emphasizes the visualization and the perception of topological properties. Thus, we provide some evidence for the exploitation of the visualization component as a catalyst element and initial tacit understanding for academic students.

Key-words: Complex Analysis, Visualisation, Geogebra, CAS Maple.

1. Introdução

Evidenciamos em certos estudos desenvolvidos no *locus* acadêmico, o relato das dificuldades atinentes ao ensino de alguns assuntos que requerem uma maior capacidade e habilidades mentais que evoluem, paulatinamente, na medida em que os estudantes entram em contato com teorias mais abstratas. No contexto específico do ensino de Análise Complexa - AC, trazemos alguns conceitos fundamentais que, embora costumamos levar aos aprendizes todo o aparato formal/lógico, acrescentamos que, com recurso na tecnologia, vislumbramos certas possibilidades de visualização e aquisição de habilidades perceptuais (ALVES, 2011) para o entendimento de noções

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – e-mail: fregis@ifce.edu.

imprescindíveis na evolução do estudo dessa disciplina acadêmica. Nesse sentido, distinguimos a abordagem que caracteriza-se por *Análise Visual Complexa – AVC* (NEEDHAM, 2000).

Por fim, os elementos que costumamos assinalar nessa abordagem evidencia àqueles de ordem intuitiva e que podem produzir, num primeiro momento de contato com algumas entidades conceituais, um impulso/estímulo para um patamar mais elevado de compreensão e que incorre, irremediavelmente, no entendimento, *a posteriori*, dos modelos formais, por meio da inspeção de demonstrações e provas formais.

2. Algumas noções da Análise Complexa

Quando passamos a levar em consideração a mudança dimensional ($1D \rightarrow 2D$), no contexto da transição da variável real para a variável complexa $x+i0 \mapsto x+iy$, podemos defrontar inúmeras mudanças conceituais. O conceito que constitui ser fundante e inicial de estudo, nos primeiros anos de academia, costuma ser a noção de limite. Em outros trabalhos, temos assinalados que as mudanças conceituais (nem sempre naturais) vinculadas a simbologias do tipo: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ou $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ encerram semelhanças e dessemelhanças (ALVES, 2011).

Não obstante, restringir-nos-emos ao caso da *Transição Complexa do Cálculo - TCC*. Por exemplo, sabemos que o estudo do modelo epislônico se assenta quase em um caráter compulsório, que enfatiza o lado logicizante e formal das argumentações, recorrentemente empregado no *locus* acadêmico.

Por exemplo, em qualquer compêndio especializado (FERNANDEZ & BERNARDES; 2008; GELBALUM, 1992; KRZYZ, 1971; LINS NETO, 1993; SHOKRANIAN, 2011; TAUVEL, 2006), registramos as seguintes atividades: (i) Mostre que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0^2$, onde $f(z) = z^2$; (ii) Calcule o seguinte limite $\lim_{z \rightarrow 0} (z+1+z \cdot \log(z)) = 1$; (iii) decidir o tipo de convergência correspondentemente à sequência de funções definidas por $f(z) = z^n$.

Ora, no primeiro item, de modo *standard*, escrevemos que dado $\varepsilon > 0$ buscamos encontrar um delta $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ se temos que $0 < |z - z_0| < \delta$. Por outro lado, escrevemos $|z^2 - z_0^2| = |z - z_0||z + z_0| < \delta|z - z_0 + 2z_0| \leq \delta(|z - z_0| + 2|z_0|) \leq \delta[|z - z_0| + 2|z_0|]$ (*). Portanto, desde que buscamos pontos nas vizinhanças de $|z - z_0| < \delta \leq 1$ e a partir

da expressão (*) escolhemos, com origem na desigualdade

$$|z^2 - z_0^2| \leq \delta[|z - z_0| + 2|z_0|] \text{ o a seguinte relação } \delta(\varepsilon, z_0) := \frac{\varepsilon}{[|z - z_0| + 2|z_0|]}.$$

Acentuamos o elemento indicado há pouco por $\delta(\varepsilon, z_0)$ para acentuar sua dependência (analítica) do ε e do ponto z_0 em que escolhemos avaliar o limite. Relação semelhante

pode ser extraída quando nos atemos a seguinte função $f(z) = \frac{1}{z}$ na região $|z| < 1$. Neste

caso, o argumento *standard* consiste em verificar se contamos ou não com a convergência uniforme ou a convergência pontual. Um aluno aplicado, poderá

conjecturar que a função $f(z) = \frac{1}{z}$ poderá herdar algumas das propriedades da função

$f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, e que já sabemos não ser uniformemente contínua (LIMA,

2009, p. 233).

Por outro lado, no caso da função $f(z) = \frac{1}{z}$, a saída é admitirmos possibilidade de que

contamos com primeira categoria de convergência, então, para todo $\varepsilon > 0$ poderíamos obter um delta correspondente $\delta(\varepsilon) > 0$ que, independentemente do ponto em que se

toma o limite, teríamos que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$. Não

obstante, dado $\varepsilon > 0$, vamos tomar um delta $0 < \delta < 1$ e os números

$z := \delta, z_0 := \frac{\delta}{(1 + \varepsilon)}$ então teremos que $|z - z_0| = \left| \delta - \frac{\delta}{(1 + \varepsilon)} \right| = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \delta < 1 \cdot \delta$, entretanto

se tem que $\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1 + \varepsilon}{\delta} \right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon$, pois $0 < \delta < 1$. Portanto, não poderá ser

uniformemente contínua. Mais uma vez enfatizamos relações essencialmente analíticas e devemos grafar $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)$ o que indica a dependência do ponto.

No penúltimo caso, quando indicamos o limite $\lim_{z \rightarrow 0} (z + 1 + z \cdot \log(z)) = 1$, vale

recordar que em diversos trabalhos temos questionado um viés metodológico ou mesmo

um caminho operacional adquirido pelo professor que enfatiza tarefas que fornecem

completa indicação de um único caminho a seguir, sem conceder margem à dúvida e ao

experimento, por parte do estudante (ALVES, 2013; 2014a; 2014b).

De fato, quando designamos, de modo imperativo, a avaliação do limite acima,

admitimos, peremptoriamente que a preocupação com sua existência (do significado do

símbolo) não diz respeito mais ao estudante. A consequência disto é a aplicação automática e pouco refletida de regras inferenciais que, permitem a obtenção da resposta sem, todavia, indicar um sentido. Outro fato que temos questionado nos livros didáticos que registramos na academia, diz respeito a declaração arbitrária do ponto no qual se deseja avaliar o limite, bem como o candidato a valor de aderência da imagem da função. Deste modo, temos assinalado o valor pedagógico de se explorar um registro algébrico do tipo $\lim_{z \rightarrow ?} (z+1+z \cdot \log(z)) = ?$.

Na circunstâncias da simbologia anterior, deverá partir do próprio estudante a escolha e conveniência de um ponto adequado e que envolva o uso efetivo da noção de limite, inclusive um candidato a seu único valor, caso o estudante conjecture sua existência. O último exemplo relacionado com a função $f(z) = z^n$, permite a discussão teórica da noção de convergência pontual e uniforme, todavia, do ponto de vista visual, como diferenciar uma da outra? Como entender do ponto de vista visual relações intrincadas

do tipo $\delta(\varepsilon, z_0) := \frac{\varepsilon}{[|z - z_0| + 2|z_0|]}$?

Na seção seguinte, indicaremos algumas possibilidades de uso do *software Geogebra*. Advertimos ainda ao leitor que certas operações foram possibilitadas tendo em vista o uso do *CAS Maple*, sobretudo, quando necessitamos realizar a descrição das partes real e imaginárias de funções na variável complexa. Veremos todos esses questionamentos podem ser explorados com a tecnologia (ALVES, 2012).

Para concluir esta seção, assinalamos as considerações de Fernandez & Bernardes (2008, p. 56), na medida em que permitem extrair profícuas implicações para o ensino. De fato, no contexto de explicação da noção de diferenciabilidade na variável complexa, os advertem que “as definições e resultados da seção anterior certamente dão ao leitor a impressão de que o ‘cálculo diferencial complexo’ é completamente análogo a ‘cálculo diferencial real’. Entretanto, esta primeira impressão não condiz com a verdade.” Neste

sentido, o simples cálculo da derivada da função $f(z) = \left[\frac{z^2}{z+1} \right]^{10} = \text{Re}(f(z)) + i \text{Im}(f(z))$ o

que conduz à expressão $f'(z) = \frac{10(z^2 + 2z)z^{18}}{(z+1)^{11}} = \text{Re}(f'(z)) + i \text{Im}(f'(z))$, ao passo

que, o mesmo envolve um procedimento algorítmico semelhante ao caso da variável real, seu significado, sobretudo o de natureza geométrica, é completamente diferente.

Na Figura 1 e 2 trazemos a descrição das partes real e imaginária de f . O leitor pode adquirir um entendimento quanto aos modelos analíticos complexos em questão.

Em alguns trabalhos (ALVES, 2012), temos criticado a abordagem que enfatiza a identificação de padrões algébrico-analíticos como indicio para o aprendiz, no sentido de fornecer pistas (roteiros) atinentes a uma regra particular a ser empregada. Possivelmente, o caso clássico da literatura refere-se às técnicas de integração (ALVES, & LOPES, 2012). Nesse caso de derivação, observamos a impossibilidade de enfatizarmos elementos de ordem analítica, para situações mais gerais.

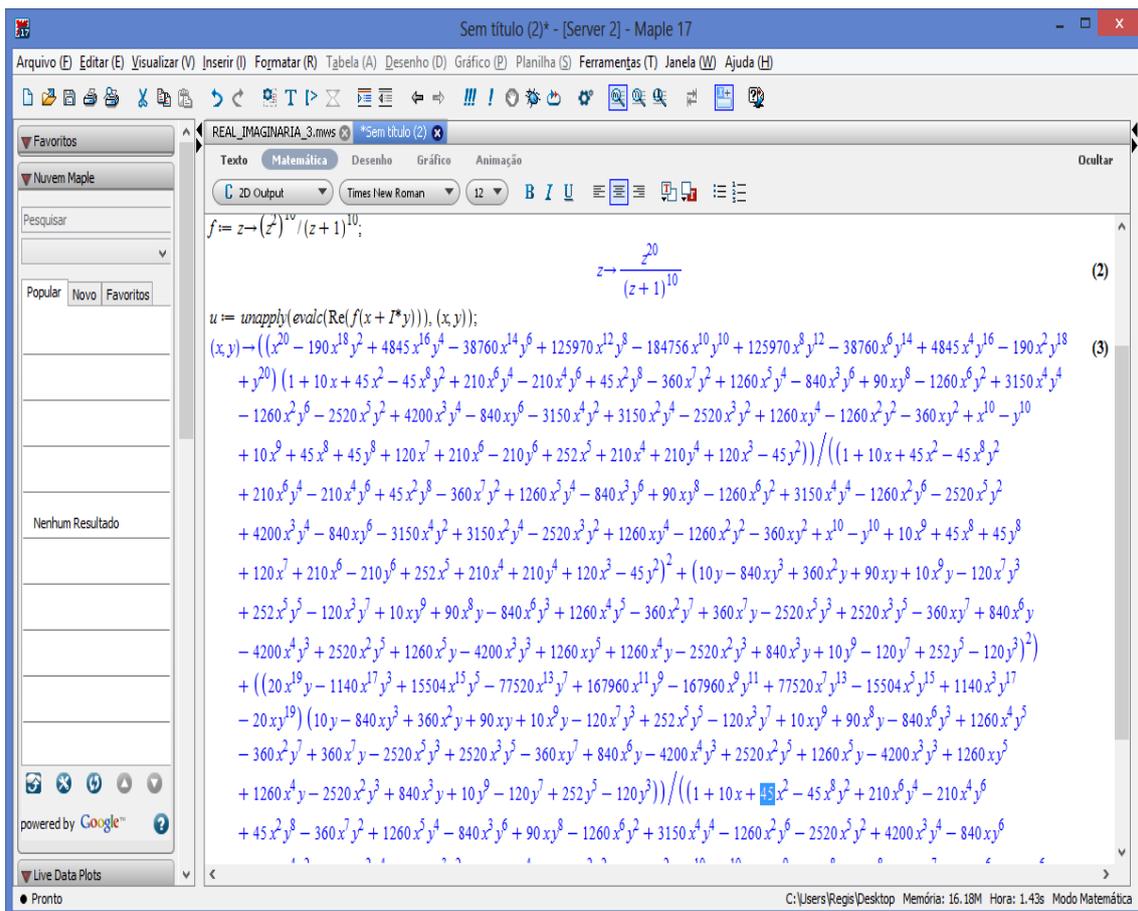


Figura 1. Descrição analítica da parte real $\text{Re}(f(z))$ da função racional

Apenas como curiosidade do cálculo algébrico envolvido, trazemos as Figuras 1 e 2, no sentido de descrever a complexidade do padrão algébrico envolvido nesse exemplo, que permitem a descrição das partes real e imaginárias. Podemos empregar as expressões indicadas acima e inserir os dados (no *CAS Maple*), com referência aos valores dos seletores previamente definidos e, observar, dessa maneira, a interpretação dinâmica e geométrica da função, como uma operação que atua num vetor e o transforma da

$$\text{seguinte forma } v \mapsto \left[\frac{z^2}{z + 1} \right]^{10}.$$

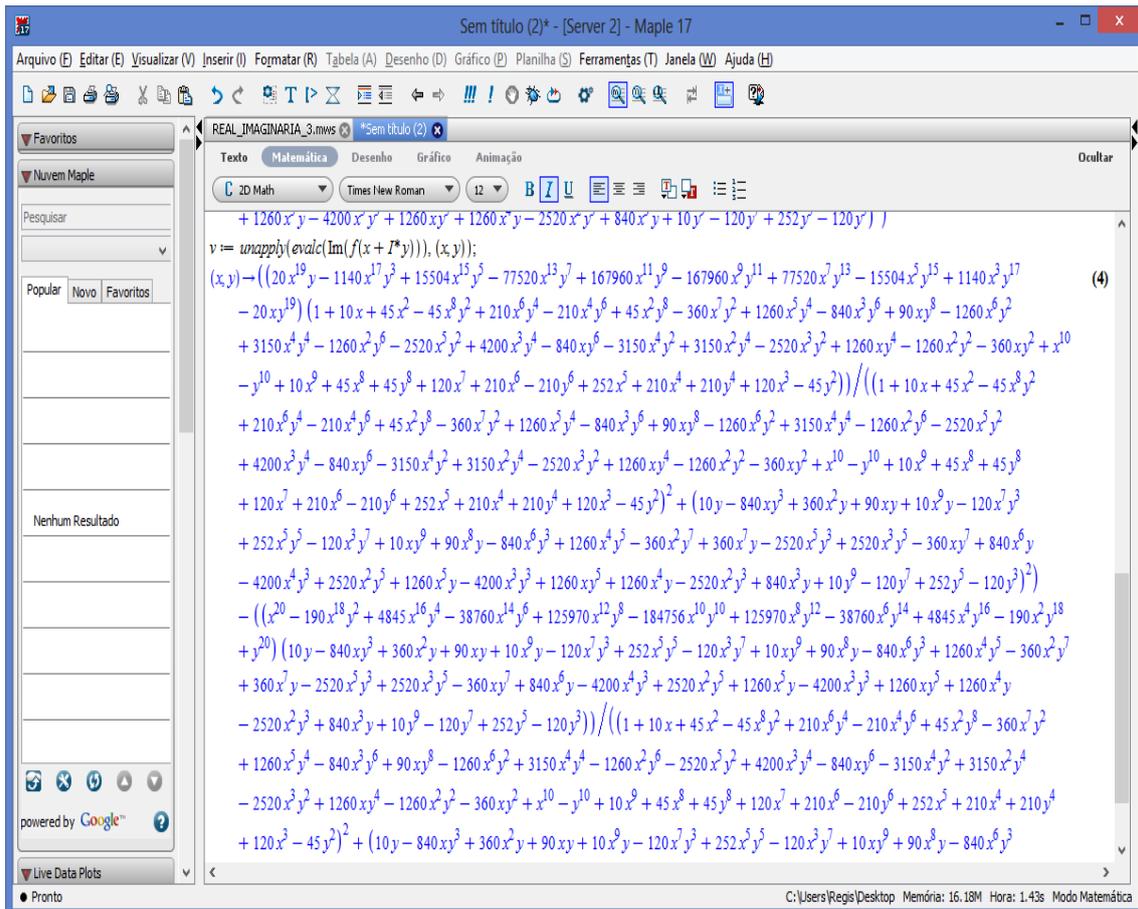


Figura 2. Descrição analítica da parte real $\text{Im}(f(z))$ da função racional

3. Exploração de situações com ênfase na visualização: uso dos softwares Geogebra e CAS Maple

Temos indicado em diversos trabalhos as potencialidades de recurso didático em dois softwares de Matemática (ALVES, 2014), numa perspectiva de complementaridade (ALVES, 2014d). Neste trabalho trazemos várias situações que, por intermédio da visualização, proporcionamos ao leitor ou estudante o entendimento intuitivo de propriedades desejadas (ALVES, 2011). Por outro lado, quando deparamos situações

em que buscamos reinterpretar o seguinte limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + e^z \cos(z) + z^3 - z}{z^3 + 1 + z \cdot \log(z)}$,

difficilmente conseguiremos indicar as partes real e complexa da função

$$f(z) = \frac{z^2 + e^z \cos(z) + z^3 - z}{z^3 + 1 + z \cdot \log(z)}.$$

Conquanto que, com o CAS Maple, a partir de comandos simples, conseguimos sua descrição analítica, fato que proporciona/facilita sua implementação posterior com o Geogebra (ALVES, 2014d).

Vamos agora evidenciar as potencialidades da tecnologia. De fato, nossos dois primeiros exemplos relacionam-se com a noção de limite. Com arrimo da tecnologia,

vislumbramos outras possibilidades de exploração de habilidades relacionadas com a visualização. Para efeito pedagógico, vamos grafar o registro $\lim_{z \rightarrow ?} (z+1+z \cdot \log(z)) = ?$. Em seguida, podemos instigar o estudante em manusear a seguinte construção que exibimos nas Figuras 3 e 4.

Na Figura 3, logo abaixo, descrevemos ao lado esquerdo, uma família de vetores $\overline{z_0 A}$ (amarelos) centrados no ponto z_0 . Assim, o aluno pode inferir, como amparo na visualização que, quando lidamos com vetores (em cor amarela) que satisfazem a condição $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)$, ao lado direito, o mesmo pode divisar que existe uma outra família de vetores $\overline{z_1 B}$ (em cor azul) satisfazendo a condições $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Neste momento, com os seletores criados no *software Geogebra*, exploramos numericamente a relação dinâmica $\delta(\varepsilon, z_0) := \frac{\varepsilon}{[|z - z_0| + 2|z_0|]}$.

$$\delta(\varepsilon, z_0) := \frac{\varepsilon}{[|z - z_0| + 2|z_0|]}$$

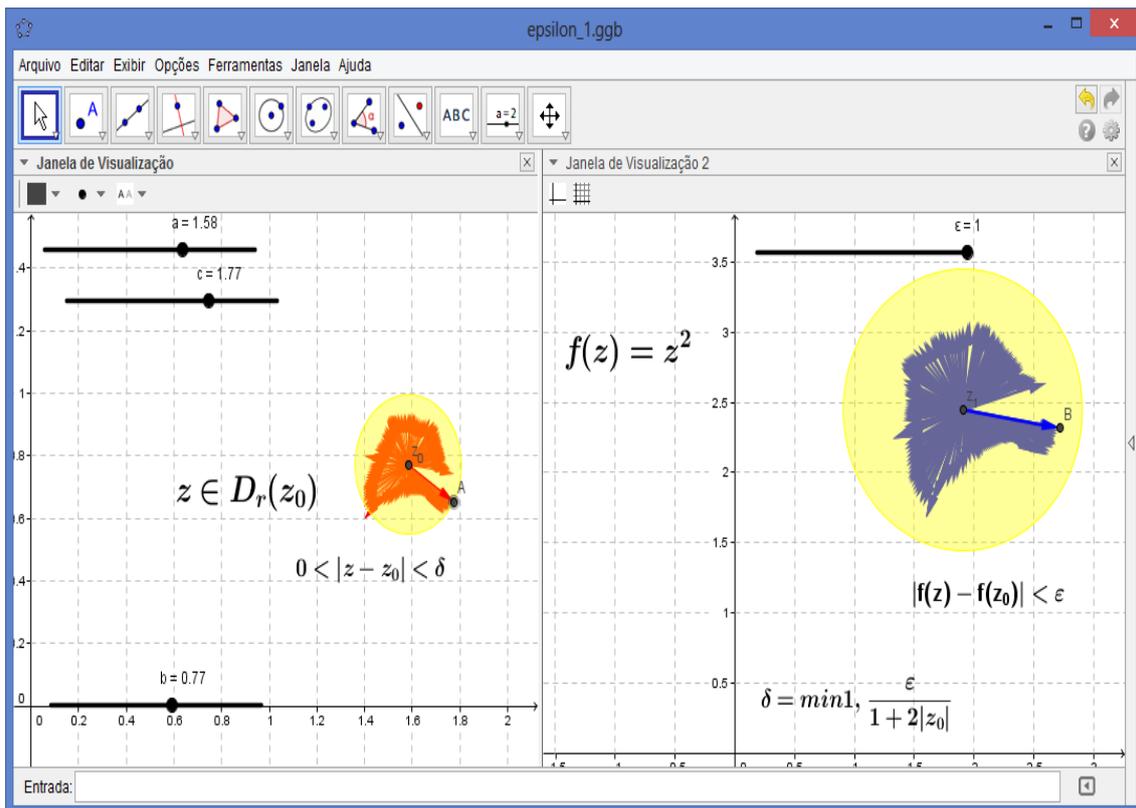


Figura 3. Visualização da condição epislônica para pontos no interior do disco centrado em z_0

Por outro lado, quando o alunos buscar explorar a mesma condição, para vetores (ou pontos) com norma maior do que $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ (observar os vetores $\overline{z_0 A}$ em cor vermelha), o mesmo, pode correlacionar com os vetores ao lado direito, na cor azul, que

apresentam a seguinte propriedade $|f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon > 0$. Na Figura 4 trazemos um cenário dinâmico para a exploração das relações analíticas exibidas na seção anterior.

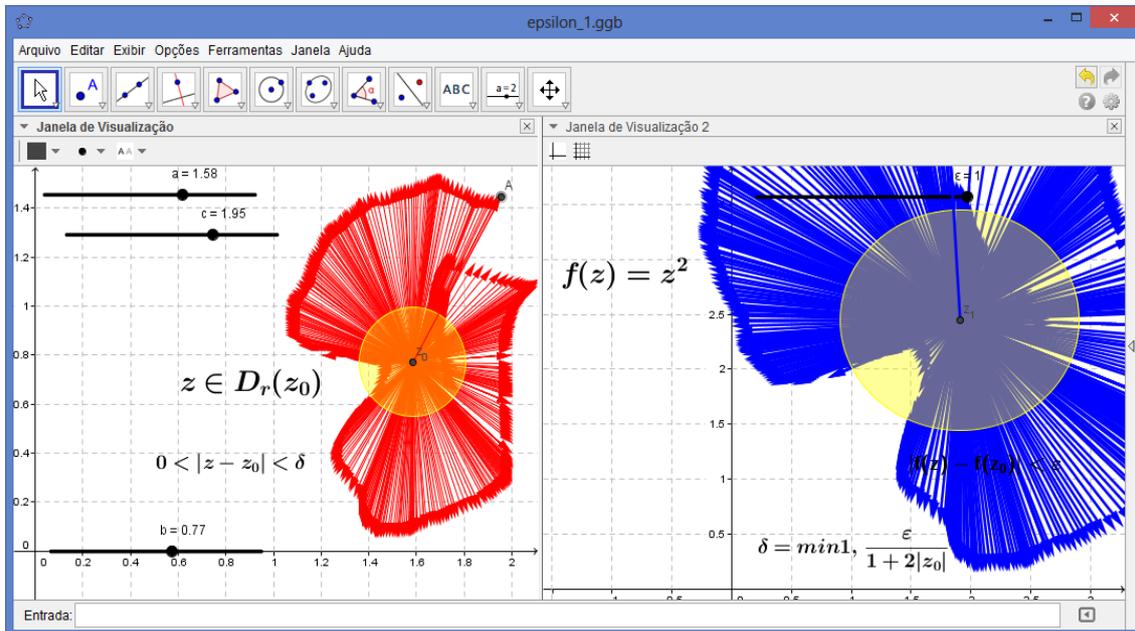


Figura 4. Com o *Geogebra* conseguimos proporcionar ao estudante a visualização da propriedade epsilonônica no contexto da variável complexa (elaboração do autor)

Na Figura 5 retomamos o problema de fornecer um indicativo excessivamente restrito na atividade de cálculo de um limite que indicamos por $\lim_{z \rightarrow 0} (z + 1 + z \cdot \log(z)) = 1$. Ao passo que optamos por $\lim_{z \rightarrow ?} (z + 1 + z \cdot \log(z)) = ?$ e fornecemos a construção das Figuras 5 e 6 para ser explorada/inspecionada pelo estudante. Ora, podemos divisar abaixo o rastro de um ponto $z \in D_r(0,0) \subset \mathbb{C}$ nas proximidades da origem, conquanto que, ao lado direito, podemos explorar o comportamento, pelo intermédio do rastro dos vetores, correspondentes à relação funcional $z \mapsto z + 1 + z \cdot \log(z)$. Ao lado direito da Figura abaixo, depreendemos que ocorre uma acumulação (aproximação) de pontos na vizinhança do ponto $(1,0)$, que divisamos ao lado direito da Figura. Dai, identificamos um candidato ao valor limite.

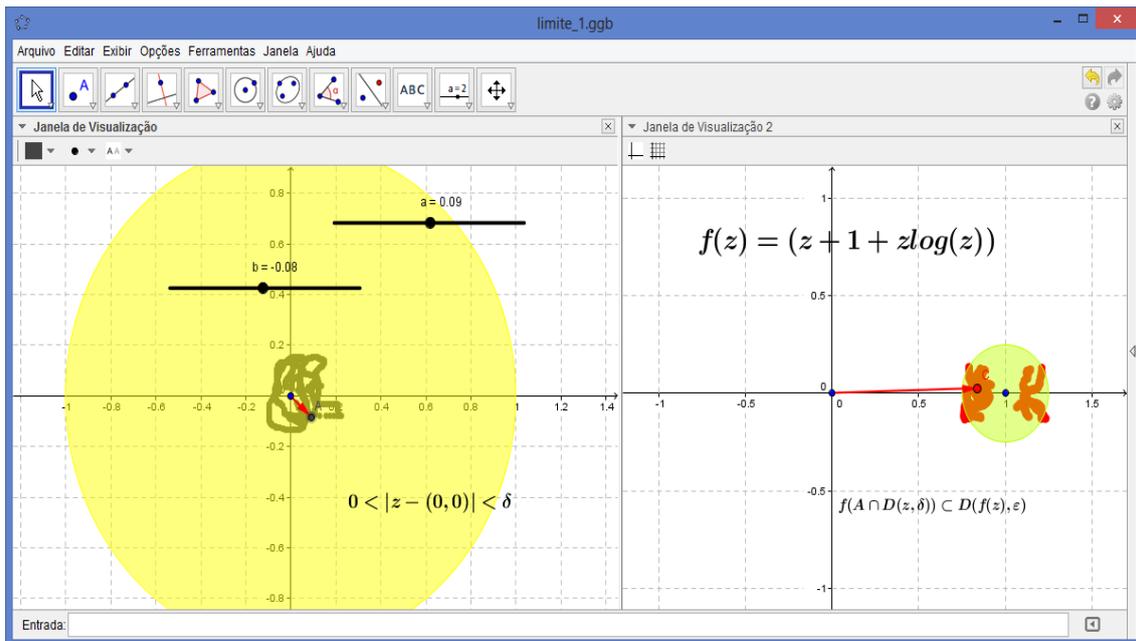


Figura 5. Visualização e identificação do candidato ao valor limite de uma função no plano complexo (elaboração do autor)

Vale comentar que a vizinhança do lado esquerdo por ser ajustada pelo estudante para uma vizinhança de raio $0 < r \leq 1$ pequeno e, nessas condições, o aprendiz terá condições de inspecionar o comportamento do número complexo $z + 1 + z \cdot \log(z)$, que representa a imagem da função, e para que valor tal expressão, para determinados valores particulares, tende a apresentar valores que indicam a convergência.

Já na Figura 6, o estudante pode ainda buscar compreender o comportamento numérico da expressão $z + 1 + z \cdot \log(z)$, na medida em que tomamos pontos (vetores) particulares $z \in D_r(0,0) \subset \mathbb{C}$ se distanciando, paulatinamente da origem do plano complexo. Neste caso, ao lado direito, os valores correspondentes da função se afastam do candidato a valor limite que, em nosso caso, poderá ser descoberto como sendo 3. Nesse caso os pontos (imagens dos vetores) não se acumulam em ponto algum do plano complexo. Tal fato reflete um comportamento topológico e métrico.

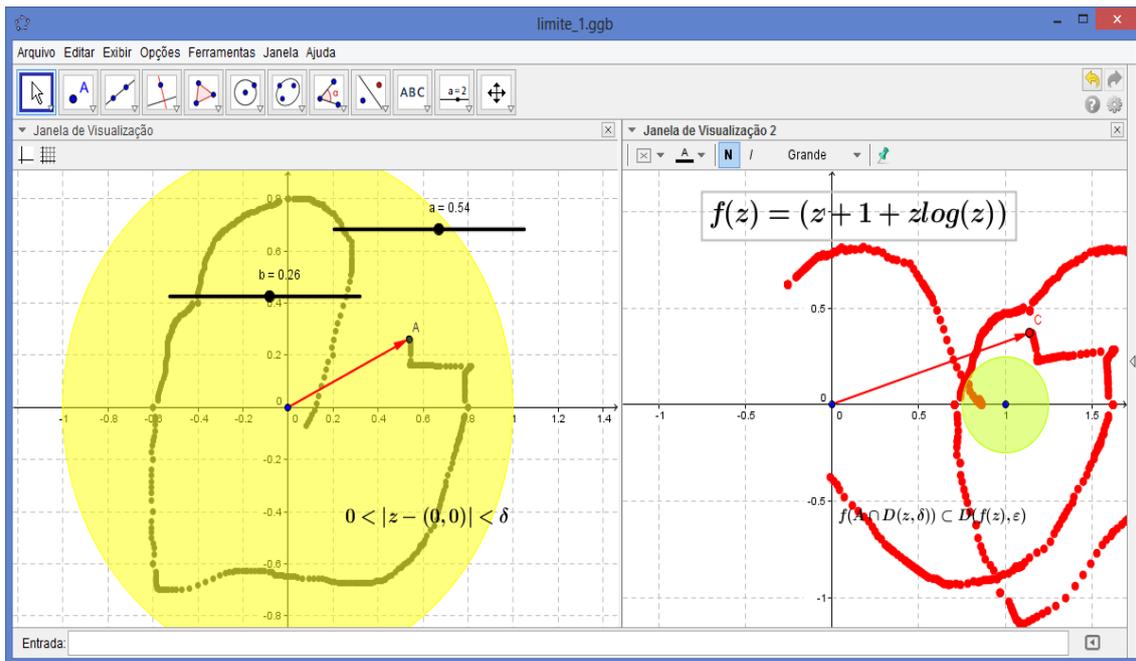


Figura 6. Com o GeoGebra permitimos ao estudante a exploração da situação e a escolha, de acordo com as conjecturas produzidas, de pontos em que podemos determinar o limite

Um procedimento *standard* estudando no Cálculo a Várias Variáveis é a inspeção da existência do limite, pode meio de caminhos (ou curvas parametrizadas) previamente tomadas. Na Figura 7 trazemos para o leitor, uma construção dinâmica que viabiliza uma inspeção semelhante. Por exemplo, sugerimos ainda a análise visual do

comportamento do seguinte limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z - 0}$ que surge quando buscamos

inspecionar o caráter de diferenciabilidade da função $f(z) = e^z$. Na Figura 7 o estudante tem a possibilidade de identificar dois candidatos ao valor limite, em dependência do caminho ou trajetória escolhida. Nessa construção o estudante deverá obter os valores ± 1 .

Adquirimos, deste modo, a noção topológica de ponto de acumulação, quando divisamos os traços dos vetores nas vizinhanças centradas em cada ponto abaixo.

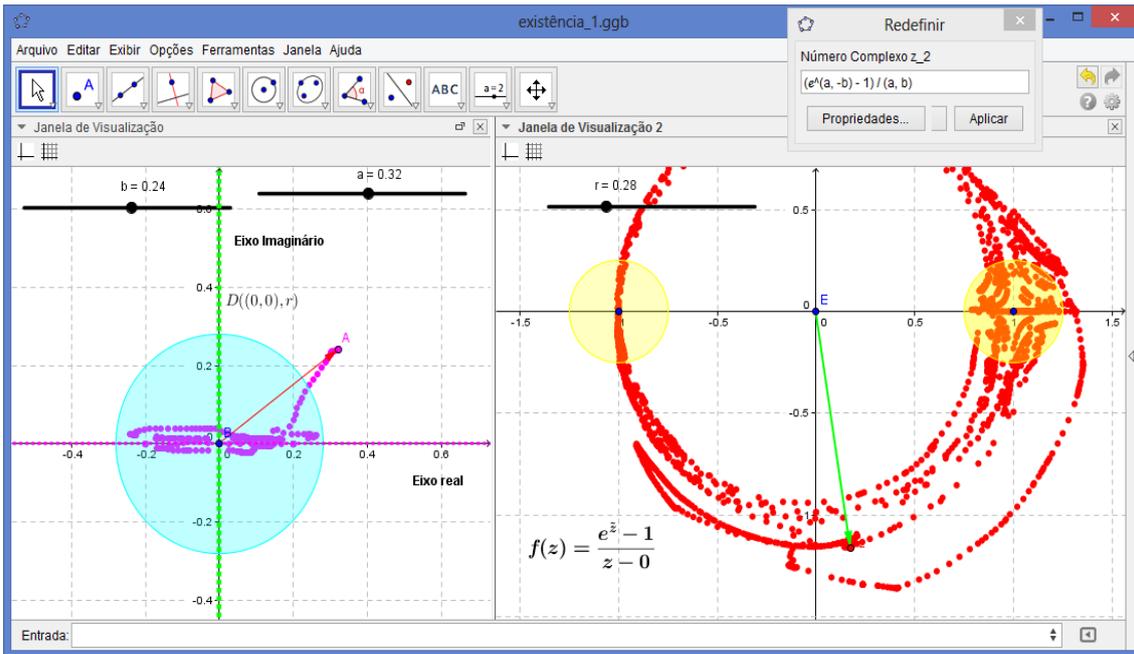


Figura 7. Visualização do comportamento relativo à não existência de limite na variável complexa

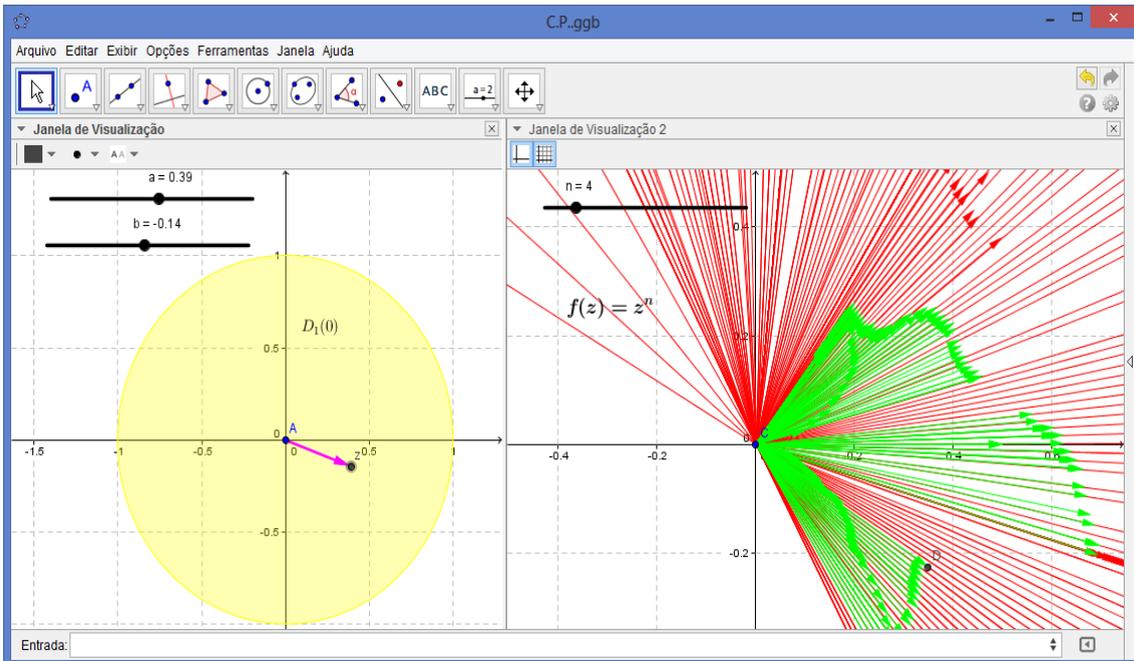


Figura 8. Entendimento visual sobre a noção de convergência/divergência pontual e uniforme na variável complexa (elaboração do autor)

Nosso último cenário de visualização de conceitos está relacionado com a noção de convergência de sequencias de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ao lado direito, o rastro na cor verde corresponde aos vetores tomados nas partes compactas e interiores ao disco de raio unitário (convergência nas partes compactas). Por outro lado, o rastro dos vetores em cor vermelha são indicativo da divergência quando nos afastamos da origem, posto que apresentam grande variação em seus comprimentos. Nesse caso, antevemos o comportamento da família de funções $f_n(z) = z^n$.

Ora, quando tomamos $0 < r < 1$ não é difícil verificar que $|f_n(z) - 0| = |z^n - 0| \leq r^n \xrightarrow[C.U.C]{n \rightarrow +\infty} 0$ que trata-se na convergência nas partes compactas do disco. Mas, do ponto de vista gráfico-topológico, como transmitir um significado para a referida categoria de convergência? O *software* Geogebra tem fornecido certos indicativos que discutimos em nossos trabalhos (ALVES, 2013b).

Apesar ainda de suas limitações, com arrimo aos *softwares* comentados aqui neste trabalho, temos a possibilidade de sua exploração inicial e intuitiva num cenário dinâmico de aprendizagens e descobertas no contexto das funções de variável complexa.

4. Considerações e recomendações

Neste trabalho trazemos ao leitor um modo diferenciado de descrever e interpretar a ação de funções na variável complexa, a saber, como a ação sobre um vetor do plano complexo do tipo $\underset{\text{vetor}}{z} \mapsto \overset{\text{vetor}}{f(z)}$. Com efeito, em todos os casos apresentados, assinalamos propriedades e certos conceitos abstratos, a partir do estudo de vetores e seu comportamento dinâmico, proporcionado pela exploração adequada do *software Geogebra* (bem como o *CAS Maple*).

Discutimos alguns exemplos de problemas clássicos, que se mostram recorrentes no estudo de Análise Complexa que são eficientemente solucionados por intermédio de argumentos formais e lógicos. Embora para o *expert*, a formalização seja o caminho mais seguro e de maior credibilidade (e comodidade), para o estudante, que depara muitas vezes situações de uma aprendizagem primeira relativa a um conceito, sublinhamos a exploração de elementos de ordem intuitiva e tácita (ALVES, 2013; 2014c).

Neste sentido, em vários artigos (ALVES & BORGES NETO, 2011), temos destacado o papel da visualização (ver Figuras 3, 4, 5, 6, 7 e 8) como elemento impulsionador de um aprendizado tácito e intuitivo, que se mostra afetado por elementos de ordem qualitativa e não apenas àqueles de ordem estruturante e formal (ALVES, 2014).

Por fim, vale recordar que, para o *expertise*, o fato de que “existem resultados que especialmente vale para os números complexos e as funções complexas. E, alguns deles são usados para demonstrar os resultados sobre funções reais que não eram antes conhecidos” (FERNANDEZ & BERNARDES, 2008). Tal perspectiva, do ponto de vista epistemológico, pode inspirar uma preocupação didático-metodológica, na medida em que, o professor *expert* saiba explorar e descrever cenários de aprendizagem que

permitam os estudantes descobrirem certas generalidades e propriedades que se evidenciam, graças ao trato com a variável no corpo \mathbb{C} parcialmente ordenado dos números complexos.

5. REFERÊNCIA

ALVES, F. R. V. (2014a). Visualizing the behavior of infinite series and complex power series with the Geogebra. **GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania**, p. 41-51. In press.

ALVES, F. R. V. (2014b). La visualization de regiones en coordenadas polares y la determinación de área con el software Geogebra. **Revista Premisa**. Buenos Aires. Argentina. v. 59. n° 16. Available in: <http://www.soarem.org.ar/publicaciones.html>

ALVES, F. R. V. (2014c). Visualizing with dynamic system Geogebra: the Fundamental Theorem of Algebra - TFA and its applications. **GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania**, p. 39-50. Available in: <http://ggijro1.files.wordpress.com/2014/01/art48.pdf>

ALVES, Francisco. R. V. (2014d). Computational Technique for Teaching in Mathematics - CT^2M : the quadratic form case. **Geogebra International of Romania**. Romania. v. 3, n° 2, p. 81-92, Available in: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-2/>

ALVES, F. R. Vieira. (2013a). Viewing the roots of polynomial functions in complex variable: the use of Geogebra and the CAS Maple. **Acta Didactica Naposcencia**. Romania, v, 6, n° 3, 58-45.

ALVES, Francisco. R. V. (2013b). Reconhecimento de padrões gráficos com o apoio do software Geogebra: os casos da convergência pontual e uniforme. **TEAR – Revista Científica do Instituto Federal do Rio Grande do Sul**. v. 2, n° 2, p. 1-20.

ALVES, Vieira Regis; BORGES NETO, Hermínio. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. **Educação Matemática Pesquisa**. v. 13-3, 597-626.

ALVES, Francisco. R. V. (2011). **Categorias Intuitivas no ensino do Cálculo em Várias Variáveis** (tese de doutorado). Fortaleza: Faculdade dec Educação, Universidade Federal do Ceará, p. 399.

BOTTAZZINI. U. (1986) **The Higher Calculus: a history of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer.

EDWARDS, C. H. (1979). **The Historical development of Calculus**. New York: Springer.

FERNANDEZ, Cecília. S & BERNARDES Jr. Nilson. C. (2008). **Introdução às funções de uma variável complexa**. Rio de janeiro: Textos Universitários SBM.

GELBALUM, Bernard. R. (1992). **Problems in Real and Complex Analysis**. New York: Springer-Verlag.

KRZYZ, Jang. G. (1971). **Problems in Complex Variable Theory**. New York: Elsevier.

LIMA, Elon. L. (2009). **Curso de Análise**. v.1 Rio de Janeiro: SBM.

LINS NETO, Alcides. (1993). **Funções de uma variável complexa**. Rio de Janeiro: SBM.

SHOKRANIAN, Salahoddin. (2011). **Uma introdução à Variável Complexa**. São Paulo: Editora Ciência Moderna.

TAUVEL. P. (2006). **Analyse Complexe pour la Licence**. v. 3, Paris : Dunod.