Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o GeoGebra

Exploration de notions topologiques dans la transition du Calcul pour l´Analyse Réelle avec GeoGebra

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES[1]

Resumo

Este trabalho discute algumas noções topológicas no contexto da transição do Cálculo Diferencial e Integral - CUV para a Análise Real - AR com arrimo no software GeoGebra. Deste modo, no decorrer do seu desenvolvimento, apresentam-se e discutem-se algumas situações que proporcionam tanto uma interpretação para estudantes de Cálculo, como para alunos no contexto do ensino de Análise Real. Imprime-se ênfase, todavia, ao contexto de transição destas duas disciplinas, no sentido de identificar ideias metafóricas e intuitivas que podem funcionar como alavancas para a aprendizagem de acordo com os pressupostos da Sequência Fedathi - SF. Ressalta-se também a exploração de gráficos inexequiveis sem o uso do computador e indicam-se algumas limitações do software que podem provocar a percepção intuitiva de propriedades fundamentais e fornecer a significação para algumas definições formais. Por fim, aponta-se que o uso de metáforas e o apelo intuitivo e heurístico dos conceitos matemáticos são indicados nas fases de investigação da SF.

Palavras-chave*: Ensino do Cálculo. Ensino de Análise Real. Noções Topológicas. Sequência Fedathi.*

Résumé

Ce travail aborde certaines notions topologiques dans la transition du Calcul Différentiel et Intégral – CUV vers l´Análise Réelle – AR avec l´aide de logiciels GeoGebra. Ainsi, dans le cadre de son développement, nous présentons et discutons des situations qui fournissent à la fois une interprétation du calcul pour les éléves et des étudiants dans le contexte de l´enseignement de l´Analyse Réelle. Imprimons et soulignons, toutfois, le contexte de la transition de ces deux disciplines, d´identifier les idées métaphorique et intuitive que peuvent agir comme des leviers pour l´apprentissage selon les hypothése de la Séquence Fedathi - SF . Nous soulignons également l´exploration de graphes inapplicable sans l´utilisation de l´ordinateur et indique certaines limites des logiciels qui peuvent déclencher la conscience intuitive de propriétés fundamentales et fournir la signification fondamentale pour certaines définitions formelles. Enfin, il est noté que l´utilisation de métaphores et l´appel intuitif et heuristiques des concepts mathématiques sont indiqués dans le deux contexte d´enseignement et recherche dans la SF.

Mots-clés*: L´enseignement du Calcul, L´enseignement de l´Analyse Réelle, Notions topologiques.*

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – fregis@ifce.edu.br

Introdução

No Brasil como no Exterior, inúmeros estudos discutem o movimento de transição e mudança pelas quais transitam os estudantes de Matemática. Destacam-se pesquisas que analisam as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ante as mudanças do contexto escolar para o âmbito acadêmico. Em outros enfoques, encontramos ainda uma discussão acerca da *transição interna* (ALVES & BORGES NETO, 2011) do Cálculo em Uma Variável Real - CUV para o Cálculo a Várias Variáveis - CVV. Neste trabalho, discutimos a exploração do *software GeoGebra* no contexto de transição do Cálculo para a Análise Real no *locus* acadêmico, com ênfase nas propriedades topológicas. Ante a natureza epistemológica reconhecidamente complexa, amparamos nossa discussão em uma metodologia de ensino nominada *Sequência Fedathi* – SF.

1. Sobre o ensino na transição do Cálculo para a Análise Real

No contexto de ensino acadêmico, seja no Brasil ou no Exterior, o ensino introdutório de Cálculo em Uma Variável Real - CUV é amparado por ideias iniciais, de consistência local e até ingênuas, a respeito de muitos dos seus processos e definições formais. Quando ocorre, entretanto, o contato com a Análise Real - AR, "todos os conceitos recebem um tratamento formal desde o início, ao se definir formalmente o conjunto IR". (BERGÉ, 2010).

Ghedamsi (2008, p. 99) indica outros elementos desta natureza, ao comentar o fato de que, nos documentos estudados, a organização é regida pelo modelo epistemológico na maioria dos manuais destinados ao ensino de *Análise Real*. De modo geral, segundo esse autor, os saberes a ensinar são introduzidos com base em suas *definições formais*, e estas seguidas de propriedades, teoremas, corolários etc.

Um problema que se evidência, portanto, nesta "transição" entre as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral - CUV e a disciplina *Análise Real* - AR, obrigatória no Brasil, tanto em cursos de licenciatura quanto em bacharelado, diz respeito ao modo idiossincrásico pelo qual o estudante relaciona, ressignifica e traduz conceitos matemáticos no *locus* do ensino do CUV e, posteriormente, no *locus* do ensino de AR.

Em razão deste quadro merecedor de atenção, as tecnologias podem ser exploradas no ensino destas matérias, "no sentido de favorecer crenças e atitudes" (WEBER, 2008) frutíferas no que diz respeito à evolução da aprendizagem neste ambiente de "transição". O problema que se expressa diz respeito ao fato de que a preocupação com todo o aparato formal destas teorias não é idêntico, tanto para o do professor como no caso do estudante.

De fato, no caso do professor, a atenção maior recai, por exemplo, na execução precisa dos passos de *inferências lógicas* de um teorema formal, na verificação de contra-exemplos com vista à testagem das hipóteses. De outra parte, no que concerne ao estudante, sua maior preocupação, nem sempre consciente, reside na compreensão inicial da ideia principal de um teorema ou uma definição e, neste processo, constantemente, o sujeito aciona os conhecimentos de que já dispõe com o objetivo de apoiar uma nova aprendizagem.

Recordamos, por exemplo, o seguinte teorema: *uma sequência* $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *limitada de números reais admite pelo menos uma subsequência convergente* (LIMA, 2010). Reparemos que, mesmo antes de sua verificação formal por parte do professor, ele reconhece o caráter de *verdade* irrefutável do saber epistemológico envolvido. Ou, melhor exprimindo, o professor toma tal sentença proposicional como uma *verdade universal*, embora ele não faça seu uso de modo explícito no contexto de ensino do CUV.

Por outro lado, muitas propriedades relacionadas com a noção de *sequências de números reais* $\left(x_n\right)_{\in IN}$ podem ser exploradas de modo intuitivo e envolver ideias metafóricas que auxiliam na fixação dos sentidos/significados dos conceitos. Por exemplo, vamos considerar as sequências descritas por $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}$, $y_n = sen\left(\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right)$ ou $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

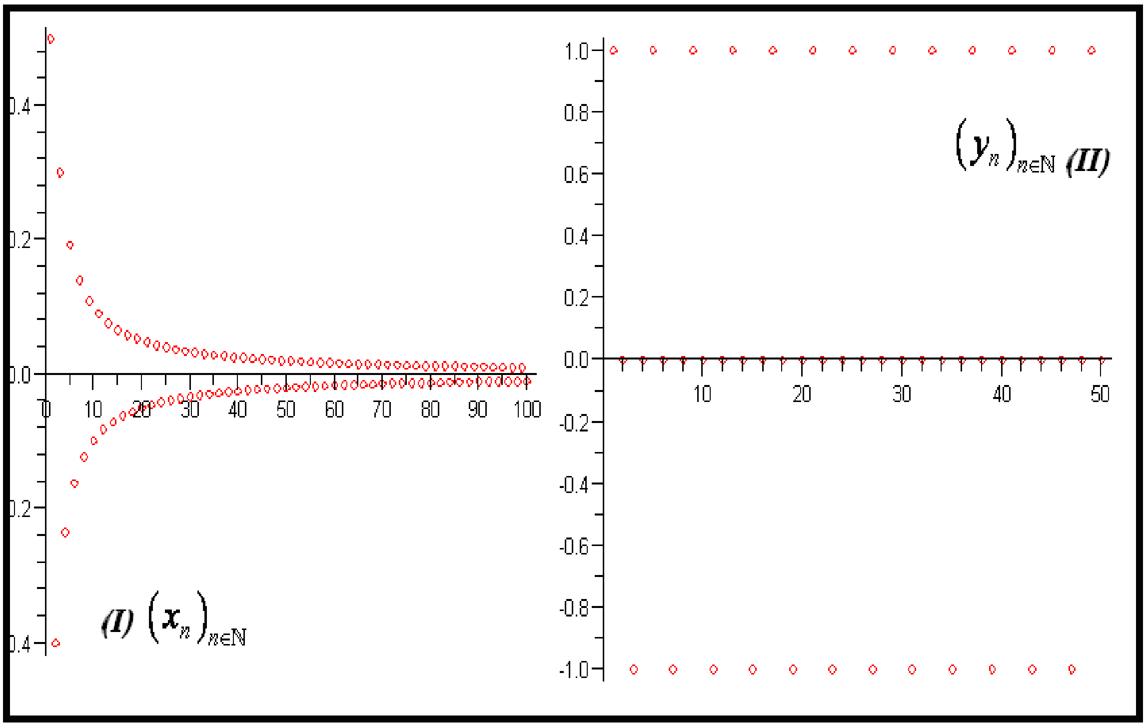

Figura 1: Uso da tecnologia na exploração de sequências de números reais.

Note-se que, por intermédio destes gráficos obtidos por algum *software* de Matemática, e, de modo particular neste caso, com o *GeoGebra*, sem o domínio de um conhecimento formal sobre o assunto, o estudante pode compreender o comportamento *monotônico* ou não das sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pode elaborar conjecturas sobre seu caráter de *limitação* ou não, quando $n \to \infty$, pode inferir as condições de *existência* dos limites acima, sobre suas *propriedades de Cauchy* (STAHL, 1999, p. 111) e indicar possíveis *valores de aderência* das subsequências que convergem para os pontos 1, 0 e -1 (figura 1-II, lado direito).

Note-se a complexidade, e mesmo impossibilidade, para o matemático profissional que atua no âmbito do ensino explorar situações que possibilitam o surgimento e a mobilização de saberes conceituais, como os que descrevemos há pouco, sem o apelo de gráficos ou figuras. Algumas propriedades, porém, são descritas por meio de uma via “heurística”, tanto no contexto do CUV (STEWART, 2004), como em AR. Por exemplo, na figura 2, Stahl (1999) explica e descreve o *Teorema do Valor Médio de Lagrange*, que é objeto de estudo, tanto no CUV quando em AR. De modo semelhante, destacamos o Teorema de Rolle e outros que possibilitam uma descrição geométrica interessante.

Questionamos, entretanto: o que de mais relevante o aluno necessita perceber/identificar e compreender neste desenho? A História do Cálculo (GRABINER, 2005) registra a relevância atribuída a desenhos como este (figura 2), que encerra a "ideia-chave" de teoremas. Assim, se o estudante ou um observador do desenho não adquire um significado coerente e adequado deste, sua aprendizagem pode ficar comprometida?

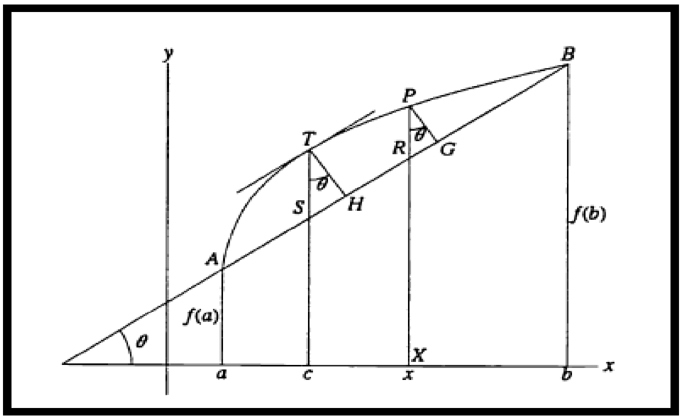

Figura 2: Descrição do teorema do Valor Médio segundo Stahl (1999, p. 179).

A resposta para esta questão não pode ser simplista, todavia, o valor heurístico do uso de elementos visuais como este e outros precisa ser preservado, visando a aperfeiçoar a comunicação das ideias tanto do CUV como em AR. Na próxima seção, forneceremos alguns exemplos que podem apoiar a transição destes conteúdos a partir de uma visão de transmissão metodológica destes conteúdos.

2. Uma metodologia no contexto de transição do CUV para a AR

Borges Neto et al (2001) propõem uma abordagem metodológica para os conteúdos de Matemática. Observamos que tal metodologia de ensino é empregada com suporte em uma visão de complementaridade com a metodologia de pesquisa conhecida como *Engenharia Didática*, em outros trabalhos que tratam de problemas pertinentes à transição de conteúdos no nível acadêmico (ALVES, 2011; ALVES, BORGES NETO & INGAR, 2012).

De modo específico, no contexto de transição do CUV para a AR, a metodologia nomeada de *Sequência Fedathi* – SF é caracterizada pelas seguintes fases de ensino.

Fase 1 <u>Tomada de posição – apresentação do problema</u>.

No que se refere aos alunos, faz parte do seu papel a descoberta/identificação de um problema relevante. Deste modo, com o auxílio do *GeoGebra*, proporcionamos a produção de conjecturas e a formulação de hipóteses fortemente apoiadas na visualização e que produzem *insight* (OTTE, 2008). Com o uso do *software*, podemos discutir propriedades geométricas e topológicas de conceitos complexos e teoremas fundamentais em AR.

Fase 2 Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema.

Nesta fase, os alunos são estimulados à identificação das variáveis mais pertinentes ou melhor dizendo, os elementos invariantes desta situação. A situação problema se refere a um conceito do CUV e que admite uma transição natural para a AR. Reparemos que nesta fase o processo de algoritmização ainda não teve início. Destarte, as informações colhidas após a visualização devem impulsionar na próxima fase o emprego de simbologias adequadas para a evolução de uma estratégia de maior êxito.

Fase 3 Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema.

Nesta fase, o debate em sala de aula deve auxiliar na compreensão de elementos pertinentes ao âmbito do CUV e que podem ser tratados com instrumentos conceituais relativamente mais simples e outros elementos pertinentes à AR. Estes últimos exigem um tratamento analítico, mais refinado, todavia, as ideias subjacentes deles são discutidas com o auxílio do *GeoGebra*. O fator de importância aqui reside na situação em que os alunos percebem e identificam possíveis ligações entre o CUV e a AR. Todas as informações sistematizadas e empregadas nesta fase de ensino devem ser formalizadas na última fase pelo professor.

De acordo com os pressupostos da SF, nessa fase, o professor deve identificar as estratégias que envolvem erros de natureza diversa (erros conceituais, algorítmicos, lógicos, erros envolvendo simbologia etc).

Fase 4 Prova – formalização do modelo matemático a ser ensinado.

Nos momentos finais de sua mediação, o professor deve explicitar e indicar as principais propriedades formais que asseguram a consistência das operações e manipulações executadas nas fases anteriores. Nesta fase, muitas formulações teóricas, definições e teoremas podem ser verificados e demonstrados, observando-se o contexto de ensino e o público-alvo.

Por exemplo, considerando a função $f(x) = \dfrac{x^2\left(2 + sen^2(x)\right)}{x+100}$, desde que tenhamos explorado a visualização nas fases de tomada de posição e maturação. Discutimos, pois, as relações entre a desigualdade analítica $\dfrac{2x^2}{x+100} \le f(x) \le \dfrac{3x^2}{x+100}$ e o comportamento geométrico proporcionado pelo *GeoGebra* (figura 3) de acordo com o que se observa na demonstração do Teorema do Confronto ou Sanduiche.

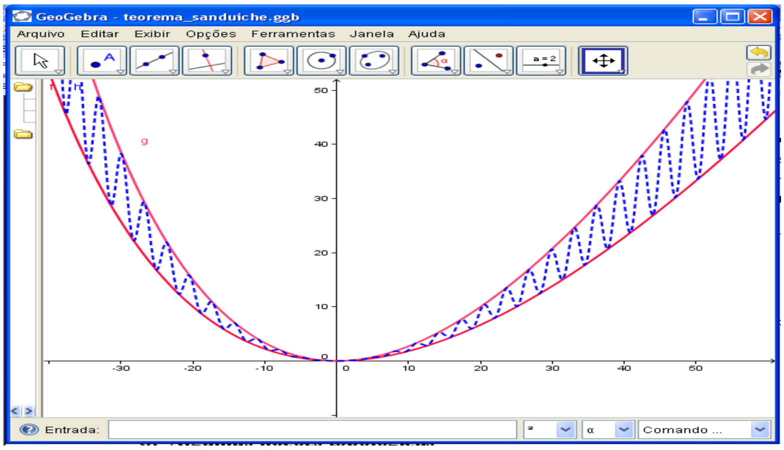

Figura 3: Interpretação geométrica do teorema do sanduiche ou teorema do confronto

Nesta fase, ainda destacamos o caráter de limitação e inconsistência de determinados comandos e funções do *GeoGebra*, sobretudo, quando descrevemos construções que dizem respeito aos conceitos como: diferenciais dx e dy, funções uniformemente contínuas, funções não integráveis etc. No próximo segmento, daremos ênfase à interpretação topológica dos conceitos, assumindo os pressupostos didáticos da SF.

3. Algumas noções topológicas

Uma interpretação fundamental dos conceitos em AR reside em seu aspecto topológico. De fato, vários autores de livros reconhecidos no Brasil (LIMA, 2001; MATTUCK, 1999; KRANTZ, 2005) empregam tal expediente ao se referirem às noções de *limite*, *continuidade*, *diferenciabilidade* e *integral*. Toda a interpretação nesta teoria formal, todavia, é proporcionada também pelas noções de *conjunto aberto*, *conjunto fechado*, *ponto de fronteira*, *ponto de aderência/acumulação*, *conjunto compacto* etc. Krantz (2005) fornece uma descrição intuitiva para alguns destes conceitos, como observamos na figura 3.

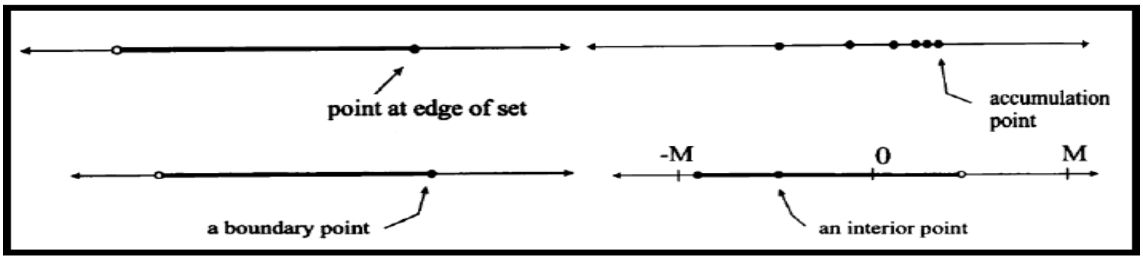

Figura 4: Krantz (2005, p. 135) fornece uma explicação para as primeiras noções topológicas.

Uma abordagem intuitiva nas fases iniciais da SF é imprescindível. Ademais, o *software GeoGebra*, por intermédio de seu caráter dinâmico e a facilidade de uso das funções, proporciona a exploração de outras noções topológicas importantes em AR, do ponto de vista intuitivo, que são inviáveis de descrever, geometricamente, no ambiente lápis e papel.

De fato, na figura 1, trazemos as funções $f(x) = x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ e $h(x) = \frac{1}{x} \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$, descritas em um domínio IR. Note-se que, apoiado em seus gráficos, o caráter limitado ou ilimitado das imagens destas funções pode ser facilmente identificado.

Pelo fato de contarmos com um domínio não discreto, podemos falar da noção de *ponto de acumulação*, rapidamente destacado nos gráficos gerados no *GeoGebra*. Podemos verificar também que os conjuntos dos *valores de aderência* são $VA(f(x),0) = \{0\}$, $VA(g(x),0) = [-1,1]$ e, com a exploração do último gráfico, aliado ao aparato formal em AR, demonstra-se que $VA(h(x),0) = IR$.

Reparemos que a demonstração formal da identificação dos valores de aderência das funções acima pode ser efetuado na *fase de prova* da SF, entretanto, o convencimento dos estudantes e o debate em sala de aula deve ser promovido nas fases de *tomada de posição* e *maturação*, quando os aprendizes observam e comparam os gráficos abaixo que envolvem intrigantes propriedades topológicas.

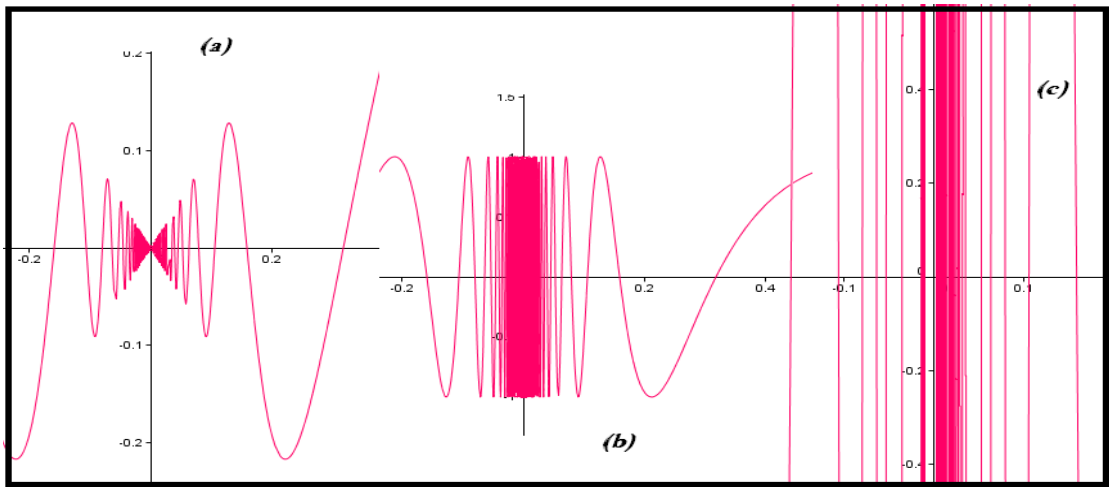

Figura 5: *Valores de aderência* das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ descritos geometricamente nas fases iniciais da SF

Provavelmente, o exemplo mais emblemático que envolve o uso de um argumento metafórico e intuitivo, tanto no CUV como em AR, diz respeito à noção de *continuidade de funções* (com forte interpretação topológica). De fato, registramos nos livros didáticos de CUV no Brasil a explicação dos autores, dando conta de termos metafóricos como "saltos" e "rupturas" nos gráficos de funções que possuem alguma espécie de descontinuidade.

Embora seja complicada, no primeiro contato com o CUV, a discussão de descontinuidade de 1ª e de 2ª espécie, o fato é que, no contexto da AR, os autores definem formalmente a *função salto* $\sigma(x)$ (LIMA, 2010), *saltus* (GOFFMAN, 1966, p. 50) ou ainda o "*jumping*" denotado por $J_f(x)$ (KRANTZ, 2005). Mattuck (1999, p. 178) esclarece que a descrição metafórica de "*unbroken graph*" adquire um sentido particular no caso de funções do tipo $f:[a,b]\to IR$ que possuem a propriedade da monotonicidade. Esta definição formal, quando apoiada no uso adequado do *GeoGebra*, pode ser ressignificada para o estudante.

Além disso, concepções equivocadas (sobretudo topológicas) relacionadas ao conceito de continuidade podem ser confrontadas nas fases finais da SF no contexto de transição do CUV para a AR, em que muitas interpretações intuitivas empregadas por autores de livros para explicar a descontinuidade perdem sem sentido.

Podemos explorar as potencialidades deste *software* no sentido de explicar/significar o termo comumente estudado no contexto do Cálculo e de *Análise Real* chamado de *indeterminação* do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Na figura 5, consideramos os gráficos das funções $f(x)=e^x$, $g(x)=x$, $h(x)=\log_{10}x$ e $p(x)=x^3$. A partir daí, com base na visualização dos gráficos, usando os comandos de movimentação do *software*, analisamos todos os casos possíveis relativos ao comportamento de quocientes do tipo $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{e^x}{x}$ ou $\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{x}{\log_{10}x}$.

A ideia fundamental aqui é convencer (fase de maturação) o estudante de que o significado do termo *indeterminação* é conseqüência do fato de que não se pode prever o comportamento de expressões envolvendo o quociente de funções, dado que suas respectivas imagens, na medida em que $x\to+\infty$, crescem de modo distinto (figura 5).

Sublinhamos algumas limitações no *software* que podem ensejar uma discussão na fase de prova da SF, quando estudamos o comportamento do quociente $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x}{\log_{10} x}$.

Com o emprego apenas do gráfico, os alunos podem ficar com a falsa impressão de que o crescimento da função do quociente (função logarítmica) é semelhante ao da função do numerador (função afim). Neste caso, na *fase de prova*, o professor pode efetuar uma verificação formal evidenciando que o crescimento da função afim é sempre maior do que o crescimento da função logarítmica.

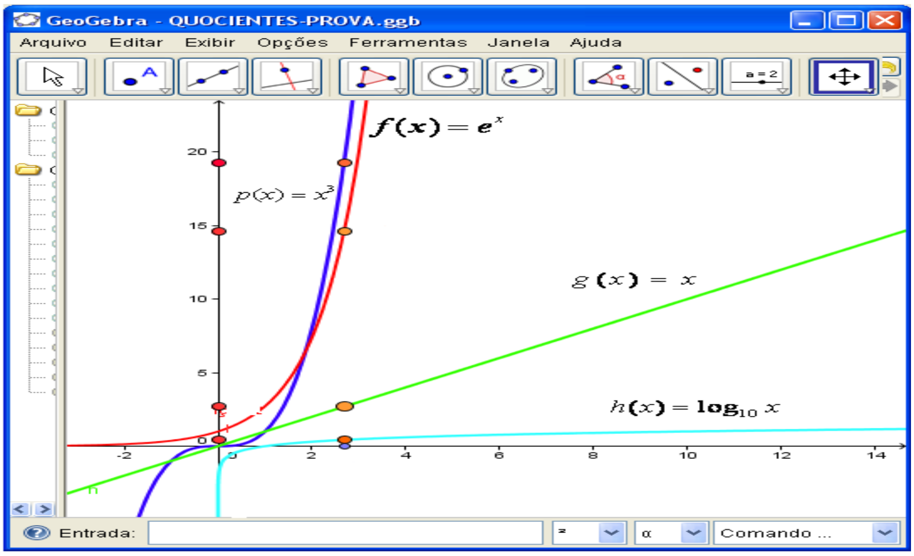

Figura 6: Exploração da noção de *indeterminação* no contexto do Cálculo e da Análise Real

Para concluir, vale indicar outras restrições e limitações do *software GeoGebra*. Algumas limitações úteis podem ser detectadas quando se observa o comportamento de derivadas $f_-^{'}(x)$ ou $f_-^{'}(x)$ de funções do tipo $f(x) = |x|$, no ponto $x = 0$. Neste caso, ao explorar as funções do *software*, inferimos que não existe uma reta neste ponto, o que coincide com o modelo teórico formal.

Apesar de certas limitações deste *software* quando exploramos o gráfico da função $g(x) = |x^2 - 1|$, determinamos analiticamente que $g_-^{'}(1) \neq g_+^{'}(1)$, entretanto, o programa exibe uma reta tangente ao gráfico (figura 6).

Na figura 6, com a visualização do gráfico, nas vizinhanças dos pontos $x = -1$ e x=1, por intermédio de alguns comandos básicos do *GeoGebra*, exibimos uma reta tangente. Reparemos, porém, que $g(x) = |x^2 - 1|$ não é *diferenciável*. Aqui indicamos uma flagrante contradição entre o modelo discreto computacional em relação ao modelo matemático.

Limitações como esta, desde que conhecidas do professor, podem assumir uma função importante na mediação ancorada nos pressupostos da SF. Com efeito, podemos induzir os estudantes ao erro nas fases de *tomada de posição* e *solução*. Na *fase de prova*, estabelecemos o debate em sala de aula para indicar as limitações do *software*. Além disto, algumas das limitações que discutimos exigem o conhecimento de AR para que possam ser compreendidas.

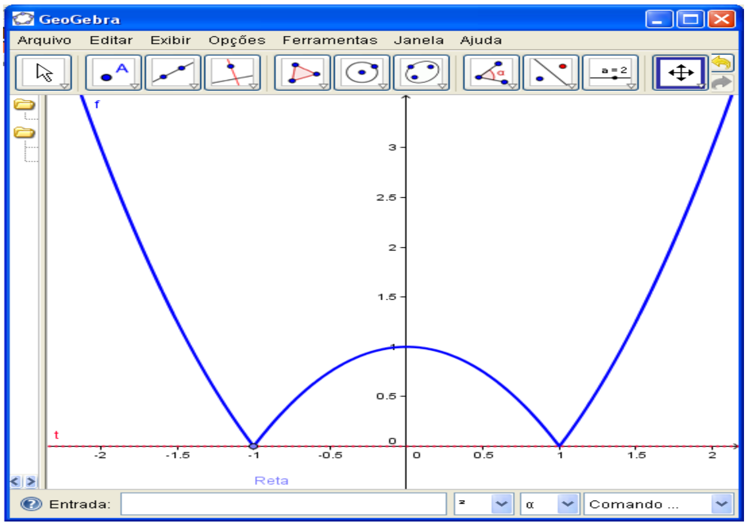

Figura 7: O *software* exibe uma reta tangente ao gráfico de uma função não diferenciavel

Para concluir esta seção, encontramos em AR exemplos de “funções estranhas” em profusão, como no caso da função $h(x)=\begin{cases}1 \text{ se x} \in IR-Q \\ 0 \text{ se x} \in Q\end{cases}$, a qual, segundo Krantz (2005, p. 172), possui *descontinuidade de 2ª espécie* em todo ponto de IR; ou ainda funções contínuas em todo o conjunto IR e não diferenciáveis no mesmo conjunto (KRANTZ, 2005, p. 185).

Para casos desta natureza, com o *software GeoGebra*, não se consegue exibir o gráfico correspondente das funções, assim, de sorte que precisamos recorrer a outros programas mais sofisticados, como os de computação algébrica (*CAS*).

Considerações finais

A compreensão de propriedades formais, sobretudo topológicas, em Análise Real “por parte do estudante não é imediata” (BERGÉ, 2010, p. 226), muito menos surge ‘como resultado da solução de uma diversidade de exercícios’ (WEBER, 2008). Neste sentido, o ensino do Cálculo em Uma Variável Real - CUV e de Análise Real - AR, apoiado na tecnologia, pode proporcionar a *apreensão cognitiva* (DUVAL, 1995) dos seus objetos e representações e, deste modo, aprimorar as representações mentais dos incipientes.

Otte (2008, p. 66) discute o papel da metáfora na atividade matemática. O autor faz referência à expressão "*metaphorical insight*" (*insight* metafórico), que diz respeito ao momento de "iluminação" na solução de um problema, uma espécie de intuição que pode tornar um processo tácito perceptivo em um processo cognitivo consciente. Não podemos esquecer de que "toda nossa compreensão é mais ou menos metafórica porque depende do contexto" (OTTE, 2008, p. 63) e que metáforas podem envolver generalização de ideias matemáticas e não contrariam a abstração matemática.

Assim, com amparo na metodologia de ensino *Sequência Fedathi*, a tecnologia assume papel relevante na transição do CUV para a AR. Ferramentas computacionais como o *GeoGebra* ou o *CAS Maple* possibilitam explorar a visualização, a evolução de imagens mentais, o uso de metáforas, a produção de *insights* e, por fim, a *apreensão cognitiva* (DUVAL, 1995) do aprendiz em relação aos objetos no IR^2 ou no IR^3, o que se mostra inviável quando restringimos nosso ensino às mídias lápis/papel e priorizamos a formalização da teoria.

Sob a óptica da SF, o professor poderá explorar um cenário de ensino em que a intuição assume papel importante nas fases iniciais da sequência. Ademais, o uso metodológico de metáforas, não apenas com relação ao conceito de continuidade, como de modo tradicional verificamos no Brasil, mas, também, expandir seu uso nos demais conceitos do CUV e em AR, o que fortalece a transição no estudo destes conteúdos.

Recordamos, ainda o fato de que definições e simbologias estranhas, tais como $\frac{0}{0}, \infty^{\infty}, 0^0, \infty^0, +\infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}, +\infty\cdot(-\infty)$ podem adquirir um significado geométrico e topológico interessante quando fazemos o uso das tecnologias e as mediamos de modo adequado nas fases de tomada de posição e maturação.

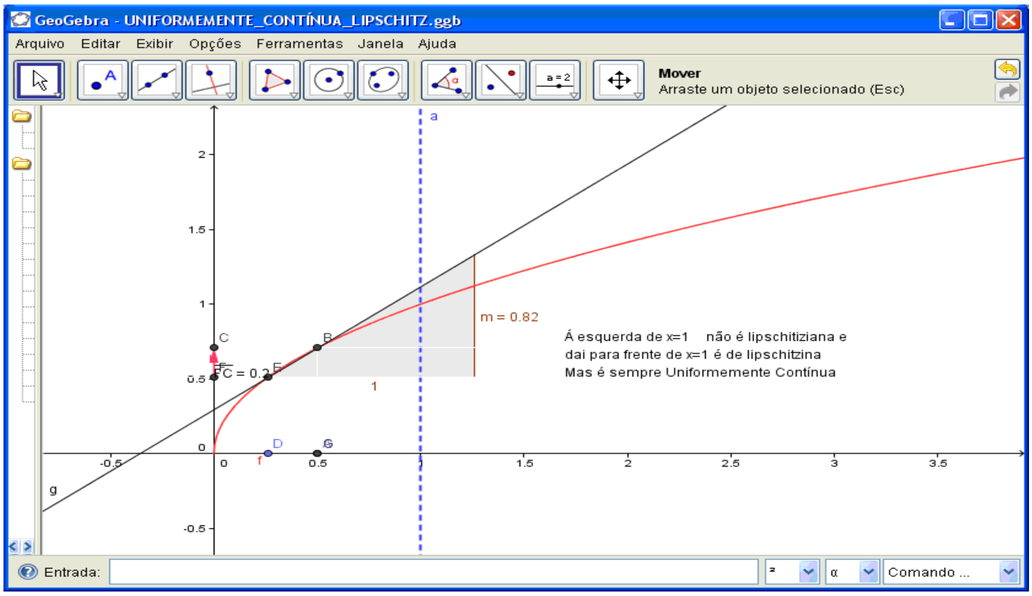

Figura 8: Descrição gráfica das condições de Lipschitz e da *continuidade uniforme* pelo *software*.

Por exemplo, no que diz respeito a definições, é bem mais simples explorar inicialmente a condição de Lipschitz ($|f(x)-f(y)|\leq c|x-y|$, com $c>0$) ou a noção de *continuidade uniforme* com o *GeoGebra*, no caso particular da função $f(x)=\sqrt{x}$, do que fazer os alunos compreenderem a seguinte condição lógica: se $f:X\to IR$, dado $\varepsilon>0$, para todos $x,y\in$ ¡ , com $|x-y|<\delta(\varepsilon,a)\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (LIMA, 2010, p. 240).

Estas duas últimas noções que mencionamos, embora particulares do contexto da *Análise Real*, e que envolvem do mesmo modo propriedades topológicas, podem ser exploradas de modo intuitivo de acordo com a SF, adotando-se de uma mediação didática fundamentada no ensino do Cálculo, o que facilita a transição para o estudo em *Análise Real* e que tratamos ao longo de todo esse texto.

Por fim, sublinhamos que a proposta de debate e abordagem de uma proposta de transição do CUV para a AR apoiada em uma metodologia de ensino (*Sequência Fedathi*) possibilita também o uso de uma metodologia de investigação. Em relação a esta última, sugerimos a *Engenharia Didática* – ED (ARTIGUE, 1995) e, na fase de *experimentação*, desenvolvemos as fases previstas da SF que descrevemos no contexto de transição.

Referências

Alves, Francisco. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das* *categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, p. 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

Alves. F. R. V. & Borges Neto. H. (2011). Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. In: *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, 1-10.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. INGAR, Kátia, V. (2012). *Aplicações da Sequência Fedathi: sobre o ensino dos pontos críticos e de inflexão*. VI Coloquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas. Disponível em: http://irem.pucp.edu.pe/164/iv-coloquio-internacional-sobre-ensenanza-de-las-matematicas

Artigue, Michelle. (1995). Ingénierie didactique. In: BRUN, J. Didactiques des Mathématiques. Paris : Délachaux et Niestle, 243-263.

Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem

Bergé. A. Student´s (2010). Perceptions of the completeness of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (41), nº 2, 217-227.

Borges, Hermínio. et al, (2001). A *Seqüência Fedathi* como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, In: *Anais do XV EPENN - Encontro De Pesquisa Educacional Do Nordeste*, São Luís, pp. 590-609.

Duval. R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. In. Sutherland. R & Mason. J. (Eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, 142-157. Berlim: Springer-Verlag.

Goffman. Casper. (1966). *Introduction to Real Analysis*. New York: Harper & Hall.

Ghedamsi. Iméne. (2008). *Enseignement de début de l´analyse à l´entrée à l´université*. (thése de doctorat en Didactiques des Mathématiques). Bourdeaux II.

Grabiner. Judith. V. (2005). *The origins of Cauchy´s Rigourous Calculus*. New York : Dover Publication.

Lima. E. L. (2010). *Um curso de Análise Real*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Mattuck. A. (1999). *Introduction to Real Analysis*. New Jersey: Prentice Hall.

Otte. Michael. (2008). Metaphor and Contingency. In: Radford. R. ; Schubring. G. & Seeger. F. *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture*. Netherlands: Sense Publishers, 63-83.

Krantz. Steven. G. (2005). *Real Analysis and Foundations*. 2º ed. London: Chapman & Hall.

Stahl. S. (1999). *Real Analysis*. London: John Wiley & Sons.

Stewart. J. (2004). *Cálculo*. v.1, 4ª edição, São Paulo: Pioneira & Thomson Learning.

Weber. K.(2008). The role of affect in learning Real Analysis: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (10), 71-85.