

# Contribuições do *software* GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia<sup>1</sup>

Contributions of the GeoGebra software in the study of differential and integral calculus: an experience with geology majors

---

ANDRICELI RICHIT<sup>2</sup>

VANESSA CERIGNONI BENITES<sup>3</sup>

MARCO ANTONIO ESCHER<sup>4</sup>

E ROSANA GIARETTA SGUERRA MISKULIN<sup>5</sup>

## Resumo

*Este artigo apresenta uma experiência que retrata como o desenvolvimento de atividades pautadas no software GeoGebra abrem possibilidades de compreensão de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com alunos do primeiro ano do Curso de Geologia da Unesp/Rio Claro, SP. Esta proposta tinha como objetivo compreender como a produção de conhecimento dos alunos poderia ser reelaborada no contexto das tecnologias e qual o alcance e as potencialidades do software GeoGebra enquanto alternativa teórico-metodológica na introdução e visualização de conceitos matemáticos. Desta forma buscamos utilizar atividades exploratório-investigativas no qual os alunos puderam trabalhar os conceitos matemáticos, buscando maneiras de solução, testando hipóteses e conjecturas e verificando-as com o auxílio do software.*

**Palavras-chave:** *Cálculo Diferencial e Integral; Atividades Exploratório-Investigativas; Software GeoGebra.*

## Abstract

*This article presents an experience that depicts how the development activities based on the use of GeoGebra software opens possibilities for understanding concepts of differential and integral calculus with majors in Geology at UNESP / Rio Claro, SP. This approach was aimed at understanding how the production of knowledge of students could be elaborated in the context of technology and what is the scope and potentialities of the GeoGebra software as a theoretical-methodological alternative to introduce and explore visual aspects of mathematical concepts. Thus we seek to use exploratory-investigative activities in which students could explore mathematical concepts, seeking ways of figuring out solutions, testing hypotheses and conjectures, and confirming them with the support of software.*

**Keywords:** *Differential and Integral Calculus; Exploratory-Investigative Activities; GeoGebra Software.*

---

<sup>1</sup> Apoio: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

<sup>2</sup> Unesp/Rio Claro, SP – [andricelirichit@gmail.com](mailto:andricelirichit@gmail.com)

<sup>3</sup> Unesp/Rio Claro, SP – [vanessa.benites@gmail.com](mailto:vanessa.benites@gmail.com)

<sup>4</sup> UFSJ/ São João Del Rei, MG – [escher@ufsj.edu.br](mailto:escher@ufsj.edu.br)

<sup>5</sup> Unesp/Rio Claro, SP – [misk@rc.unesp.br](mailto:misk@rc.unesp.br)

## Introdução

No contexto educacional uma das grandes buscas dos docentes em relação aos alunos é a aprendizagem. Este processo é muito complexo, uma vez que o aprender acaba sendo um conjunto de ações, na qual o indivíduo adquire informações, entende as ideias e conceitos, constrói novos significados, para assim utilizar esse conhecimento na resolução de problemas da vida cotidiana.

Na busca de estratégias para compreender as interfaces do processo de ensino e aprendizagem muitos estudiosos têm se debruçado sobre diferentes perspectivas e dentre elas encontra-se a inserção de situações onde o aluno sinta-se motivado a aprender, aproximando os conceitos às situações vivenciadas no cotidiano, tornando a aprendizagem mais relevante e significativa ao aluno. Sendo assim, é possível perceber em encontros e eventos científicos de Educação Matemática que existe, por parte dos professores, uma busca e interesse por materiais, recursos e atividades diversificadas que tornem suas aulas mais atrativas aos olhos dos alunos. Dentro desta perspectiva, na visão de Paulo Freire em Bastos (2009), *o ensino e aprendizagem não podem ocorrer no isolamento, experiências educacionais se fundamentam no aprendizado da informação através de canais múltiplos de comunicação* (p.88), apontando caminhos para uma “nova educação”, repleta de comunicação, experiências e tecnologias.

Com isso as Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) ganham uma nova expressão e necessidade dentro do ensino, e conseqüentemente um novo desafio para a prática docente. Afinal, segundo Penteado (2005, p.384), *o uso de TIC exige movimento constante, por parte do professor, para áreas desconhecidas. É preciso atuar numa zona de risco onde a perda de controle é algo que acontece constantemente.*

Considerando o exposto acima, avaliamos que os processos de ensino e aprendizagem podem ser mais significativos e produtivos para o aluno com a inserção da tecnologia, porém não é algo trivial para o professor, e demanda um tempo para a sua incorporação dentro das aulas. O estudo realizado por Sacristán et al (2009), aponta algumas considerações interessantes quanto ao uso de tecnologias digitais em sala de aula por professores no México. Esta pesquisa foi realizada durante três anos, com professores em exercício e os mesmos puderam perceber a importância das tecnologias, e reconheceram que a tecnologia “é uma ferramenta e não um fim”, e que é necessário ter cuidado na escolha das atividades, bem como tempo para amadurecimento e confiança

no uso da tecnologia nas práticas cotidianas. Vale lembrar que o professor torna-se o mediador deste processo onde o centro agora é a interação do aluno com o *software*. Este deverá estar atento para as dúvidas e questionamentos dos alunos, propiciando discussões a partir delas, a fim de perceber o que está sendo relevante ao aluno.

Este cenário, caracterizado pela inserção das tecnologias, coloca também professores do ensino superior para atuar nesta “zona de risco”, uma vez que encontra dificuldades ao preparar e executar as atividades. Assim, tentamos adentrar nesta “zona” buscando atividades em que os alunos fossem motivados a construir o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral. Ou seja, os objetivos desta pesquisa eram compreender como a produção de conhecimento dos alunos pode ser re-elaborada no contexto das Tecnologias da Informação e Comunicação, e também, investigar qual o alcance e as potencialidades do *software* GeoGebra enquanto alternativa teórico-metodológica na introdução e visualização de conceitos matemáticos.

## **1. Produção de conhecimento no contexto das tecnologias digitais**

Frente às mudanças educacionais ocorridas pelo fato da cultura tecnológica adentrar-se no espaço escolar, houve uma grande busca pelos docentes por metodologias diversificadas que favorecessem o desenvolvimento de alunos ativos e criativos para que esses possam “aprender a aprender”, transcendendo os paradigmas do ensino tradicional.

Desta forma, as TIC se apresentam no contexto educacional como elemento a contribuir para esta formação do aluno. Trabalhos como o de Miskulin (1999), e de Borba e Penteado (2001), defendem a implantação das TIC no ensino, e trata-se de estudiosos que se dedicam a esta temática e apresentam publicações relevantes na área. Além desses, um estudo realizado por Falcade, Laborde e Mariotti (2007), com alunos da França e Itália, apontam que o estudo de Funções através de um *software* educacional foi bem sucedido, uma vez que os alunos envolvidos puderam internalizar os conceitos perante a mediação semiótica das ferramentas do *software*, e juntamente com os colegas conseguiram chegar a uma definição de Função.

Para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral isto não é diferente, pois muito se tem falado na introdução, disseminação e utilização das tecnologias digitais nesta disciplina, pois tal abordagem tem se mostrado relevante. É possível perceber no trabalho de

Etcheverry et al (2004), com alunos do ensino superior na Argentina, que os próprios alunos se mostraram favoráveis a inserção das tecnologias, uma vez que observou-se uma mudança na dinâmica dos ambientes de aprendizagem, fomentando discussões e uma mudança no papel do professor.

De acordo com Tall, Smith e Piez (2008), num estudo realizado por Richit (2010), de todas as áreas da matemática escolar, o Cálculo recebeu a maior parte do interesse e do investimento no uso da tecnologia. Iniciativas no mundo inteiro têm trabalhado nesse sentido e criado *softwares* gráficos para explorar conceitos de Cálculo, como os CAS Mathematica, Maple, Derive, Theorist e Mathcad, entre outros. Richit (2010) ainda completa que, esses autores dizem que essas iniciativas surgiram por diversos motivos, podendo-se destacar a insatisfação dos estudantes frente à abordagem tradicional do Cálculo e, também, pelo fato da tecnologia estar disponível, de modo que a mesma deveria ser utilizada.

Com este crescente aumento dos *softwares* educativos foi possível verificar a importância das tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem de Cálculo, que vem a ser uma disciplina fundamental em diversos cursos da área de exatas.

Além desse, o estudo de Palis (1995) destaca a importância das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Cálculo apontando que

[...] tem-se constatado que algumas mudanças na qualidade do aprendizado dos alunos ocorrem simplesmente porque eles participam mais ativamente em aulas ou trabalhos apoiados em computadores e/ou calculadoras, seguem o curso mais de perto e fazem mais perguntas, do que em ambientes de ensino tradicionais (p.25)

Assim, corroboramos com Richit (2010), ao perceber que aulas de Cálculo pautadas no formalismo, onde o professor escreve e o aluno simplesmente copia, ou seja, o aluno apenas memoriza de maneira mecânica os exercícios, os conceitos ou demonstrações, não possibilitam que o estudante seja capaz de atribuir significado mais amplo (além do aspecto algébrico, o geométrico) ao conhecimento vinculado ao Cálculo.

Desta forma é possível perceber que com o avanço das TIC no ambiente educacional inúmeras mudanças ocorreram, principalmente no que diz respeito à forma como o conhecimento é produzido e internalizado. Assim, entendemos que os ambientes computacionais podem desempenhar um papel importante relacionado aos recursos didático-pedagógicos para a exploração e compreensão dos problemas encontrados no

ensino de Cálculo Diferencial e Integral, pois, aspectos como a visualização, reflexão, e dedução estarão presentes na construção do conhecimento, no contexto das TIC, além de suscitar a criatividade e a colaboração entre os participantes. Logo, as atividades, desenvolvidas por meio do *software* GeoGebra, poderão colaborar para os desafios enfrentados na compreensão e apropriação dos conceitos de Cálculo.

## **2. Atividades Exploratório-Investigativas**

Para este estudo, utilizamos atividades de natureza exploratório-investigativas, na qual consideramos como atividades ou problemas nos quais os alunos envolvem-se em um processo de investigação de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e reelaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema (MISKULIN, ESCHER e SILVA, 2007).

A natureza de uma atividade ou um problema não compreende em si mesma características de exploração e investigação. A mediação do professor no desenvolvimento da aula será de fundamental importância na constituição da característica exploratório-investigativa de uma atividade ou um problema de Matemática. O professor ao mediar o processo educativo, por meio de atividades exploratório-investigativas, cria situações desafiantes, investigativas, através dos recortes dessas atividades em vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos deslocarem-se muitas vezes da atividade ou problema principal, olhando-o e percebendo-o sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhes a busca de novos caminhos e a reavaliação constante de suas estratégias e objetivos, enfim, envolvendo-os, cada vez mais, no processo de investigação e construção do conhecimento matemático.

As atividades implementadas na sala de aula tinham essas características, pois os alunos tinham um contato inicial e informal com discussões acerca de conteúdos matemáticos envolvendo Otimização, Funções, Limites, Derivadas e Continuidade de uma Função e, além disso, desconheciam a utilização do *software* GeoGebra na exploração e representação de problemas desta natureza.

Abaixo (Figura 1), um recorte de uma atividade realizada, na qual foi possível através do *software* GeoGebra estudar a continuidade de uma função com parâmetro  $k$ , sem a necessidade de construir vários gráficos com lápis e papel. Ou seja, nesta situação o

caráter exploratório-investigativo foi evidenciado através das ferramentas de manipulação do *software* que permitiu que o aluno verificasse as condições fazendo a variação do parâmetro.

<p>4) Ao variar o parâmetro <math>k</math>, é possível afirmar que a função <math>f(x) = \begin{cases} kx^2, &amp; x \leq 1 \\ 2x - 3, &amp; x &gt; 1 \end{cases}</math> é contínua?</p> <hr/> <hr/> <hr/>
<p>5) De acordo com o que você observou no gráfico, qual o limite da função, quando <math>x</math> tende a <math>\underline{1}</math> para valores menores que 1 e para valores maiores que 1?</p> <hr/> <hr/> <hr/>
<p>6) Antes e depois de variar o parâmetro <math>k</math> esse limite existe? Explique por que.</p> <hr/> <hr/> <hr/>
<p>7) De acordo com o gráfico, para <math>k=-1</math> (posicione o parâmetro (seletor) na posição -1), o que acontece com a função nessa situação? Existe o limite de <math>f</math> quando <math>x</math> tende a <math>\underline{1}</math>? Justifique sua resposta.</p> <hr/> <hr/> <hr/>

O papel do professor neste contexto é de fundamental importância, pois ele irá conduzir a experiência objetivando resultados pré-determinados. Já o aluno terá oportunidade de vivenciar uma aprendizagem mais significativa, assim como terá uma participação mais ativa levando a um olhar crítico para a situação. Fica aqui a reflexão do seguinte provérbio chinês “se ouço, esqueço; se vejo, lembro; se faço, compreendo” (LORENZATO, 2006, p.5).

### 3. A Implementação das Atividades no Laboratório de Informática

A experiência com o *software* GeoGebra para o ensino dos conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, se deu com uma turma de primeiro ano do curso de Geologia da Unesp/ Rio Claro, SP. A professora que ministrou a disciplina, já havia tido contato com outras turmas do referido curso, e inclusive já havia trabalhado com outros *softwares*, como o Winplot e o Maple. Porém, este trabalho com o *software* GeoGebra foi pioneiro entre os alunos do curso de Geologia.

Conduzimos atividades envolvendo o conteúdo de Funções, Limites, Derivadas e Integrais no laboratório didático de informática do Departamento de Matemática da

mesma instituição, na qual tinha por objetivo geral ampliar a compreensão dos conceitos abordados em sala de aula por meio da visualização propiciada pelo *software* GeoGebra. Os alunos já tinham tido um contato inicial com estes tópicos de estudo, inclusive com problemas envolvendo Otimização, que foram refeitos com o apoio do *software* GeoGebra.

Desta forma, elaborou-se um conjunto de atividades no qual foi possível investigar visualmente, geometricamente e algebricamente os conceitos, principalmente, de Derivada e Integral, que são conceitos complexos para serem estudados apenas em aulas expositivas. Os alunos trabalharam com o roteiro dessas atividades em mãos, visto que eles desconheciam o *software* GeoGebra para a exploração e representação de problemas desta natureza.

Além disso, as atividades foram desenvolvidas em duplas. Afinal trabalhos de experimentação realizados em grupo ampliam as possibilidades de aprendizagem, já que pode existir um compartilhamento de experiências e de conhecimento entre os participantes. A ideia do trabalho em grupo vai ao encontro da perspectiva de aprendizagem proposta por Vygotsky apresentada em Freitas (2009), ao considera-la um processo de construção das funções mentais superiores que acontece a partir de uma ação entre sujeitos (plano interpessoal) que se transforma em uma ação do sujeito (plano intrapessoal).

A primeira atividade proposta tratava do estudo da Função Linear, na qual foi possível analisar o seu comportamento alterando-se os valores dos parâmetros de uma função genérica. Esta primeira parte da atividade tinha como objetivo promover a familiarização dos participantes com o *software* GeoGebra, pois, além do estudo das funções, os alunos aprenderam a utilizar as ferramentas básicas do *software*, bem como manusear a janela algébrica e geométrica.

Na segunda atividade abordou-se conceitos relacionados a Continuidade da Função, na qual estava implícito a ideia de Limite. Esta parte foi muito interessante, pois os alunos puderam verificar a continuidade da função, sem ter que desenhar repetidas vezes no caderno os gráficos relativos a cada parâmetro por eles utilizado. Observamos que alguns alunos chegaram a abrir o caderno e verificar a continuidade de outras funções estudadas a priori, principalmente quando eram funções representadas por quocientes ou exponenciais e logarítmicas.

A terceira parte da atividade explorou o conceito de Derivada, a partir de retas tangentes. O objetivo desta seção foi de verificar geometricamente o conceito de derivada. Ao trabalhar com parâmetros, os alunos puderam verificar a alteração na inclinação da reta tangente a curva, a partir de um ponto (Figura 2).

3) Além disso, podemos variar o parâmetro  $a$ , fazendo uma **animação** no gráfico. Fazendo variar o parâmetro  $a$ , a tangente desliza ao longo do gráfico da função  $f$ . Para fazer variar um número (parâmetro) ou um ângulo de forma contínua selecione o modo **Mover** . Então, clique sobre o parâmetro ou ângulo e pressione as teclas + ou - ou use as setas do teclado (← ou →). Mantendo **uma** destas teclas pressionadas é possível realizar animações. Para isso, vá até o **menu Arquivo** e selecione a opção **Nova janela**. Uma nova janela do GeoGebra irá abrir.

A quarta e última parte da atividade versou sobre o conceito de Integral, na qual foi desenvolvida uma sequência didática que permitiu que o aluno visualizasse a “Soma de Riemann”. Para isto, foi preciso ensinar os alunos a trabalharem com área de polígonos no *software* GeoGebra. Em seguida, inseriram uma função e calcularam a soma das áreas dos retângulos embaixo de sua curva (Figura 3), e a partir disto foi levantada algumas questões pertinentes ao conceito. Sugeriu-se aos estudantes que fossem aumentando infinitamente o número de retângulos e que observassem visualmente o que acontecia com a área. Os estudantes então foram inserindo cada vez mais retângulos e verificaram visualmente que a área abaixo da curva ficava preenchida. Contudo, ao serem questionados se esta realmente era a área, utilizaram a ferramenta zoom do *software* GeoGebra e perceberam que a área não estava totalmente preenchida, que ainda haviam espaços em branco. Dando sequência a atividade, quando interrogados sobre qual deveria ser o número de retângulos a serem inseridos para que tivéssemos a área próxima da área exata, estes responderam que era um número infinito, e que quanto maior este número fosse, mais próxima do real está área seria.

5) Um possível procedimento para o cálculo desta área constitui-se na inserção de retângulos abaixo da função. Insira abaixo da função quatro retângulos ( $n=4$ ). **Importante:** Para inserir os retângulos abaixo da função entre com os seguintes comandos:  
 $g(x) = x^2 + 1$   
 $a = 0$  (extremo esquerdo do intervalo)  
 $b = 4$  (extremo direito do intervalo)  
 $n = 4$  (número de retângulos)  
SomaInferior[ $g,a,b,n$ ]

## Considerações Finais

A utilização das atividades exploratório-investigativas propiciou um ambiente no qual os alunos trabalharam os conceitos matemáticos por meio das atividades solicitadas, buscando alternativas para solucioná-las, testando hipóteses e conjecturas e verificando-as com o auxílio do *software*.

Primeiramente observamos que a inserção da tecnologia proporcionou uma motivação nos alunos, de forma que houve um envolvimento maior por parte deles durante a execução das atividades e perante as discussões que foram geradas. A partir do *software* ficaram interessados, inclusive, em resolver outros problemas. Notamos alguns alunos com o caderno aberto para testar o limite de funções de exercícios resolvidos em sala. Além disso, após a realização destas atividades, alguns alunos utilizaram o *software* para plotar gráficos de funções em seus estudos cotidianos.

O *software* se mostrou adequado para a realização das atividades de natureza exploratório-investigativa, uma vez que foi possível reduzir o número de repetições durante a verificação de um resultado. O que no papel e lápis seria preciso vários desenhos, o *software* mostrou, através da variação de parâmetros, o comportamento das funções. Isto é um dos fatores mais interessantes ao se justificar o uso de um *software* em sala de aula, como Miskulin (1999) já havia apontado em sua tese de doutorado. Segundo esta autora existem dois caminhos que justificam a utilização de computadores no ensino, uma delas seria promover atividades projetadas para se ensinar da mesma forma o que já se ensinava na escola tradicional, e a outra, e mais adequada, seria proporcionar novas atividades explorando os recursos que a tecnologia possui e atingindo novas maneiras de visualização e representação dos conceitos matemáticos. Ou seja, usar o computador para realizar atividades que não seriam possíveis através da lousa e giz.

Foi também observado que os alunos puderam levantar hipóteses a partir de um problema dado, o que também gerou uma maior interação entre os alunos e um ambiente de trabalho mais favorável a exploração.

Assim, trabalhamos com os alunos um conjunto de atividades exploratório-investigativas na qual através do *software* GeoGebra foi possível criarem hipóteses e conjecturas a respeito de conceitos como a Derivada e Integral. Ou seja, aliar o trabalho com *softwares* educacionais e as atividades de natureza exploratório-investigativas, num curso de Cálculo, pode ser um caminho neste contexto da “nova educação”, para

alcançar e ampliar a compreensão dos conceitos.

## Referências

- BASTOS, F. P. Comunicação. In: STRECK, D. R., REDIM, E., ZITKOSKI, J. J. (Orgs.) *Dicionário Paulo Freire*. Belo Horizonte: Autêntica, p. 87-89, 2009.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- FALCADE, R.; LABORDE, C.; MARIOTTI, M. A. Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 66, n. 3, p. 317-333, 2007.
- FREITAS, M. T. A. A formação de professores diante dos desafios da cibercultura. In: FREITAS, M. T. A. (Org.) **Cibercultura e formação de professores**. Belo Horizonte: Autêntica, p.57-74, 2009.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, p. 3-37, 2006.
- MISKULIN, R. G. S. **Concepções Teórico- Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores do Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria**. 1999. 577f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.
- MISKULIN, R.G.S., ESCHER, M.A., SILVA, C.R.M., **A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: uma experiência com a utilização do MAPLE em Cálculo Diferencial**. Revista de Educação Matemática, vol. 10 Número 11, Gráfica Compacta, 2007.
- PALIS, G.R. **Computadores em Cálculo: uma alternativa que não se justifica por si mesma**. Temas e Debates, v.8, n. 6, p.22-38, Blumenau, abr/1995.
- PENTEADO, M. G. Redes de Trabalho: Expansão das Possibilidades da Informática na Educação Matemática da Escola Básica. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. 2 ed. São Paulo: Cortez, p.283-295, 2005.
- RICHIT, A. **Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais**. 243 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.
- SACRISTÁN, A. I.; PARADA, S. E.; SANDOVAL, I.; GILL, N. **Experiences related to the professional development of mathematics teachers for the use of technology in their practice**. In: 33<sup>rd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009. Anais... Thessaloniki: Greece, 2009. Cd-Room.