O conhecimento esperado sobre limites e continuidade a partir de uma análise das provas unificadas de Cálculo I na UFRJ

The expected knowledge about limits and continuity as shown by an analysis of the unified examinations on first calculus course at UFRJ

SANDRO RENÈ CUNHA[1]
MÁRCIA MARIA FUSARO PINTO[2]

Resumo

Neste artigo analisamos os enunciados e as soluções das questões de provas de Cálculo I disponibilizados por uma equipe de professores, buscando descrever os conhecimentos sobre limites e continuidade que vêm sendo considerados relevantes para a formação esperada dos alunos de turmas em que um modelo de prova unificada é implementado. Adotamos a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, pelo seu potencial de analisar a realidade matemática que emerge de práticas específicas que se relacionam com a transmissão de conteúdo. Da organização matemática observada, destacamos que aspectos referentes a técnicas observadas para os diferentes tipos de problemas são altamente valorizados e, mesmo que seja possível identificarmos elementos que os justificam ou explicam, não há preocupação em deixá-los mais visíveis, mas sim de mantê-los em um segundo nível de importância em relação às técnicas.
Palavras-chave*: Limite e continuidade_1; Teoria Antropológica do Didático_2; Educação Matemática no Ensino Superior_3.*

Abstract

This article presents an analysis of exam questions and their solutions of a calculus course, provided by a team of professors, with the aim of describing the mathematical knowledge about limits and continuity that have been considered relevant to students attending courses in which a model of exam unified for various calculus courses is applied. We adopt the perspective of the Anthropological Theory of Didactics, by Yves Chevallard, due to its potential to analyze the mathematical reality emerging from specific practices related to content knowledge transmission. For the mathematical organization observed, the aspects related to resolution techniques to solve the diverse kinds of problems are highly valued and, even if it is possible to identify elements that justify them or explain them, there is no concern about leaving it more visible, but to keep it in a secondary level of importance in relation to the techniques.
Keywords*: Limits and continuity 1; Anthropological Theory of Didactics 2; Mathematics Education at university 3.*

[1] Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro – sandrorene@hotmail.com
[2] Universidade Federal do Rio de Janeiro – marcia@im.ufrj.br

Introdução

O Instituto de Matemática da UFRJ adota o regime de prova única como forma de avaliação dos alunos da Escola Politécnica e da Escola de Química cursando a disciplina Cálculo I[3]. Sendo assim, acreditamos que apesar de ficar a cargo da equipe de professores estabelecer o ritmo da matéria em sala de aula e escolher as abordagens de ensino que irão adotar, este formato de exame expressa uma expectativa dos docentes em garantir uniformidade no ensino do conteúdo por meio da proposta de um modelo de prova única, além de listas de exercícios, que servem como preparação para tais avaliações.

Tal escolha demanda um consenso por parte da equipe de professores quanto ao conteúdo das questões a serem elaboradas para os exames e trabalhadas em sala de aula durante o semestre, de forma a tornar possível um mesmo nível de cobrança do conteúdo em todas as turmas, e de destacar a importância de certos tópicos da ementa do curso, para delimitar um desenvolvimento do conteúdo da disciplina que, idealmente, busca ser homogêneo em todas as salas de aula.

Uma vez que cada prova é elaborada pelo grupo de professores que lecionam a disciplina em cada semestre, tal sistema de avaliação nos parece revelar a importância atribuída aos conceitos trabalhados em Cálculo I por cada equipe envolvida em um determinado semestre, além de aplicar um modelo de avaliação no qual a prova pode exercer um papel diferenciado no processo de ensino, dado que a aprovação do aluno depende exclusivamente do seu desempenho nesta forma de exame.

No trecho a seguir, publicado na página da disciplina Cálculo I, fica clara a intenção da equipe de professores desse curso, ao propor esta estratégia de prova unificada, em implementar uma abordagem comum e nivelada do conteúdo:

> Os cursos unificados têm como objetivo assegurar que todos os alunos das diversas especialidades de Engenharia da Escola Politécnica e dos cursos diurnos da Escola de Química sejam avaliados sobre todos os tópicos constantes do programa da disciplina, realizem as mesmas provas e tenham suas provas corrigidas da forma mais uniforme possível. (Equipe de professores de Cálculo I. http://www.im.ufrj.br/~calculo1, acesso em 25/02/2013).

[3] Na página da disciplina Cálculo I, encontramos a informação: "(...) A partir do primeiro semestre de 2008 a Escola Politécnica, a Escola de Química e o Departamento de Métodos Matemáticos do Instituto de Matemática instituíram o regime de prova única para os cursos de Cálculo da Engenharia. (...)" Equipe de professores de Cálculo I. cod. MAC118. Turma Engenharia. http://www.im.ufrj.br/~calculo1 (acesso em 25/02/2013).

O enunciado e solução das questões de tais provas, em sua edição em vários semestres, são tornados públicos para os alunos na página da disciplina Cálculo I. Estes podem ser amplamente consultados nos períodos de exames, em cada semestre, servindo de suporte e orientação para os alunos no período de preparação para os mesmos. Acreditamos, assim, no papel central deste conjunto de questões e abordagens em sua solução na construção pelos alunos do conhecimento matemático sobre os temas abordados em Cálculo I, pois são tomados como referência de modelo de prova para a preparação das avaliações semestrais seguintes.

Nossa justificativa em querer investigar os tópicos em Cálculo 1 associados ao tipo de prova unificada decorre da preocupação que temos como educadores em respeitar as funções atribuídas à avaliação enquanto parte importante do processo de aprendizagem. Para esclarecer, retomo Vianna (2001) em sua afirmação: "A avaliação deve esclarecer controvérsias, dirimir dúvidas sobre falsos pressupostos e possibilitar ações que resultem da compreensão do objeto avaliado." (VIANNA, 1997, p.73).

Nesse sentido, a avaliação deve ser vista como uma etapa fundamental no processo de aprendizagem, em que o aluno é levado a refletir sobre uma diversidade de situações problemáticas. A avaliação também deve possibilitar aos alunos um momento para que possam desenvolver suas habilidades matemáticas e comunicá-las em diferentes situações.

Neste contexto, investigamos, a partir dos enunciados e das soluções das questões das provas disponíveis, os conceitos, tópicos e abordagens que vêm sendo considerados relevantes para a formação esperada dos alunos de turmas em que o modelo de prova unificada é adotado. Para isto, elaboramos uma análise das questões e soluções propostas nas provas unificadas, tornadas públicas na internet (CUNHA, 2013).

Este artigo apresenta parte daquele estudo. Restringimo-nos aqui a analisar as questões sobre limites e continuidade de três provas de Cálculo 1 propostas em três anos, que reconhecemos como típicas em um conjunto de dez provas que estão sendo analisadas.

Adotamos a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, pelo potencial de descrever e analisar a realidade matemática que emerge destas práticas específicas que se relacionam com a transmissão do conteúdo da disciplina, e que vem sendo desenvolvidas pelas diversas equipes dos professores e alunos de Cálculo 1 do Instituto de Matemática e da Escola Politécnica da UFRJ.

Diante do esboço que traçamos aqui, a respeito dos aspectos relacionados a um sistema de avaliação de prova unificada, tendo bem definidas a instituição[4] e a existência de uma cultura de avaliação reconhecida pelos alunos e professores dessa mesma instituição, escolhemos como base teórica para o desenvolvimento da pesquisa o quadro teórico proposto por Y. Chevallard (1992, 1997,1999, 2000); em especial, a noção de Praxeologia, dado que, em nosso caso, consideramos adequado tomar as questões de provas como um conjunto de *Tarefas*, no sentido de Chevallard (1999) uma vez que estas estão relativamente bem circunscritas e, cujas realizações das mesmas resultam colocar em ação as técnicas relacionadas, possíveis tecnologias e teorias relacionadas, no caso expressas nas soluções das questões divulgadas ao público.

Com este olhar, elaboramos a seguinte questão: Qual o conhecimento matemático esperado pela instituição sobre as noções de limite e continuidade, inferido a partir da análise de tarefas propostas nas provas do Cálculo 1 unificado, e suas soluções divulgadas na internet?

Para respondê-la, apresentamos logo a seguir os elementos que compõem a perspectiva teórica que adotamos. Em seguida passamos à seleção e análise das questões relacionadas ao foco deste estudo. Por fim refletimos sobre os resultados da análise realizada.

1. Referencial teórico

O aporte teórico fundamentado na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard (1992, 1997, 1999, 2001, 2005) parece-nos adequado para elaborar uma análise e responder a questão colocada. Segundo Chevallard (1992), a TAD permite identificar as relações institucionais existentes, bem como as possíveis relações pessoais a serem desenvolvidas, quando se considera o trabalho do professor e do estudante no tocante às atividades matemáticas. Em nosso caso, temos ciência de estarmos considerando o trabalho da equipe de professores, quanto à preparação do conteúdo presente nas questões dos exames, supondo que haja um consenso entre eles. Ao focarmos no conhecimento que se espera estar sendo produzido, estamos de certo modo tomando a resolução das questões pelos alunos como genérica e identificada com as soluções publicadas pela equipe de professores no site do curso, e a atividade matemática como expressa pelas proposições e soluções relativas às provas de Cálculo I nesse tipo de sistema avaliativo, disponibilizadas na internet.

[4] Para Yves Chevallard, uma instituição pode ser um órgão governamental, uma escola, uma classe, um

Nesta pesquisa, temos como resultado da atividade matemática, no espaço da sala de aula na universidade, as provas de Cálculo I e suas soluções; tal atividade está contida no conjunto de atividades humanas e das instituições sociais. Consideramos como objetos as proposições presentes nessas provas e nas soluções e, que inevitavelmente são reconhecidas pela equipe de professores de Cálculo I dessa instituição bem como se espera pelos seus alunos.

Chevallard (1992) introduz como possibilidade não só uma relação pessoal com o objeto, mas também uma relação institucional associada a um objeto. Define esta relação por um conjunto de tarefas, que se executam por meio de técnicas. Estas duas últimas são determinadas por pessoas, e estas pessoas estão subordinadas a relações institucionais esperadas.

A seguir, descreveremos com mais detalhes a teoria concebida por Chevallard, discutindo sua viabilidade em uma análise que responda às questões de pesquisa de nossa investigação. Começaremos pelo estudo das noções trazidas pelo autor sobre relações institucionais e pessoais e, em seguida, sobre a construção de uma organização praxeológica.

1.1 Relações institucionais e pessoais

Chevallard (1992) introduz o uso de três termos primitivos que em síntese podem ser expressos como a seguir:

- Os objetos (O): são os entes matemáticos a serem observados.
- As instituições (I): são dispositivos sociais que permitem ou estabelecem a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar. Estas podem ter sentido mais amplo do que o uso corrente, por exemplo, uma escola, uma sala de aula, um livro, etc. Em nosso caso, diremos que a instituição I é o sistema de prova unificada de Cálculo I, cujas provas serão analisadas e as informações estão disponíveis no site já mencionado.
- As pessoas (X): são os sujeitos submetidos aos objetos reconhecidos pela instituição. Em nossa pesquisa, os alunos e professores da disciplina em questão.

Segundo Chevallard (1992), um objeto O existe em uma determinada instituição I quando as pessoas X de I, o reconhece como existente. Nesse caso, há uma relação

curso, a família, a sociedade, os programas de ensino.

pessoal de X com O, denotada por *R(X, O)*; respectivamente, uma relação institucional de I com O é representada por *R(I, O)*.

Chevallard (1992) assume que há aprendizagem pelo aluno X em relação ao objeto O, quando a relação do sujeito ao objeto sofre alteração. Dessa forma, ao analisarmos as questões de provas, estamos investigando aspectos que a Instituição espera que ocorram com a relação R (X, O).

1.2 A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

A TAD é um quadro teórico que pressupõe a atividade matemática e, consequentemente, a atividade de estudar matemática, como incluída no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais (Chevallard, 1999, p. 1-2). No entanto, esta posição epistemológica conduz a um entendimento de que todas as pessoas estão submetidas a objetos institucionalizados e, condicionadas a muitas fronteiras institucionais, dentro das quais devem ser mantidas.

Chevallard (1999) utiliza a noção de praxeologia (como conceito chave) para estudar as práticas institucionais relativas a um objeto do saber, em particular, as práticas sociais em matemática. Propõe, para isto, a Teoria Antropológica do Didático-TAD (Chevallard, 1999), baseando-se no pressuposto de que todas as ações e condutas decorrentes da atividade humana regular podem ser descritas por uma praxeologia ou organização praxeológica indicada por [T/ τ /θ/Θ], onde os símbolos: T (tarefa), τ (técnica), θ (tecnologia) e Θ (teoria) são os Componentes básicos da Praxeológica (idem, ibidem), que passo a descrever.

1.2.1 A noção de tarefa

Uma *tarefa t* é tudo aquilo que se pede a uma pessoa para fazer. Quando uma tarefa t é parte de um *tipo de tarefa T escrevemos:* $t \in T$. Na maioria dos casos, uma tarefa é expressa por um verbo, mas deve ter um objetivo preciso a ser realizado; por exemplo, *subir uma escada, lavar a louça, calcular a derivada de uma função em um ponto* são tarefas, ou melhor, tipos de tarefas. Mas *subir, lavar, calcular*, etc. tratam-se de gêneros de tarefa que pedem um determinativo (pedem um objeto).

Os gêneros de tarefas só existem sob a forma de diferentes tipos de tarefas em que o conteúdo é estritamente especificado. Portanto, *determinar* é um gênero de tarefa, mas *determinar o valor de uma função f em um ponto dado* é um tipo de tarefa. Assim, durante toda a nossa formação escolar e também acadêmica, os gêneros: *calcular,* *determinar, construir, demonstrar, expressar*, etc. serão acrescidos com novos tipos de tarefas.

1.2.2 A noção de técnica

Para um tipo de tarefa t, dada. Uma praxeologia em t requer uma maneira de executa-la, ou seja, uma forma particular de fazer chamada de *técnica* Φ. Assim, uma praxeologia relativa ao tipo T de tarefa contém, em princípio, uma técnica Φ, formando um *"bloco"* designado por [T/ τ], conhecido por *bloco prático-técnico* ou "*saber fazer"*. Vale destacar ainda que uma técnica não é necessariamente de natureza algorítmica, axiomatizar determinada área da matemática, pintar uma paisagem ou escrever uma redação são tipos de tarefas para as quais não existe praticamente uma algoritmetização. Chevallard acrescenta que uma técnica τ tem êxito em uma parte P(τ) das tarefas do tipo T, mas tende a falhar em T\P(τ); ou seja, pode haver um intervalo de validade da técnica em relação a um tipo de tarefa T exigida. Dessa forma, pode haver em P(τ) uma técnica τ_1 com maior aplicabilidade que outra técnica τ_2.

Finalmente, dada uma instituição I, para um determinado tipo de tarefa T há, em geral, um número limitado de técnicas institucionalmente reconhecidas. Porém, pode haver outras técnicas alternativas que são excluídas da instituição I, mas aceitas em outra instituição. Neste sentido, podemos observar que as técnicas institucionais admitidas pelos indivíduos de I são aquelas naturalizadas na mesma instituição I.

1.2.2 A noção de tecnologia

Indicada pelo símbolo θ, a *tecnologia* é compreendida aqui como o discurso racional cujo objetivo é justificar a técnica τ, e certificar-se que esta permite executar o tipo de tarefa T correspondente. A forma de racionalidade da tecnologia varia de acordo com a instituição I na qual se insere.

Em uma instituição I, qualquer que seja o tipo de tarefa T, se esta admite uma técnica τ então há ao menos um "vestígio" de tecnologia θ que a justifique. Porém, pode haver uma *técnica "canônica",* em princípio a única reconhecida e a única empregada, considerada *"autotecnológica"* e que não necessita de justificativa, pois é a *boa maneira de fazer as coisas* em I.

Há muitos casos em que os elementos tecnológicos estão integrados à técnica. Este fato ocorre quando o mesmo discurso apresenta dupla função – técnica e tecnológica – permitindo ao mesmo tempo encontrar e justificar o resultado esperado.

Outra função da tecnologia é a de explicar, tornar inteligível, esclarecer a técnica. Enquanto que a primeira função da tecnologia – justificar a técnica – é garantir que a técnica forneça o que se pretende, esta indica que a técnica está correta.

Por fim, a terceira função da tecnologia é o papel de produzir novas técnicas, ou seja, possibilita a exploração de potenciais tecnológicos.

1.2.2 A noção de teoria

O discurso da tecnologia contém afirmações que necessitam de fundamentos especulativos para a sua validação. Portanto, a teoria Θ é todo discurso racional que justifica e explica a tecnologia.

Na verdade as instruções teóricas muitas vezes aparecem como abstratas; distantes das preocupações dos "simples" tecnólogos e técnicos. Este efeito de abstração está correlacionado com o que fundamenta a generalidade das demonstrações teóricas: sua capacidade para justificar, explicar e produzir.

1.2.3 Organização praxeológica

Em torno de um tipo de tarefa T, em princípio, temos uma tripla formada por pelo menos uma técnica τ, uma tecnologia θ que justifica tal técnica e, uma teoria Θ. A quadra indicada por $[T/\tau/\theta/\Theta]$ constitui uma *organização praxeológica pontual*, ou seja, uma Praxeologia em relação a um único tipo de tarefa T. Tal praxeologia é formada por um bloco prático-técnico $[T/\tau]$ constituindo o saber fazer e, um bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ que vem a ser o saber explicar. No caso, a quadra $[T/\tau/\theta/\Theta]$ representa uma *organização praxeológica pontual completa.*

Em geral, numa instituição I, a teoria Θ comprova várias tecnologias θ_j que, por sua vez, justificam e tornam inteligíveis várias técnicas τ_{ij} que correspondem a tantas outras tarefas T_{ij}. As *organizações pontuais* $[T/\tau/\theta/\Theta]$ podem ser combinadas, primeiramente, em *organizações locais* $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centradas em uma determinada tecnologia θ; depois em *organizações regionais* $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, centradas na teoria Θ. Seguindo, obtemos uma *organização global* $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$, formada pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias.

Na passagem de uma organização *pontual* $[T/\tau/\theta/\Theta]$ à *local* $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ destaca-se a tecnologia θ, da mesma maneira que ao passar desta, à regional $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ trará em primeiro plano a teoria Θ. Em ambos os casos, estende-se a visibilidade do bloco do saber $[\theta / \Theta]$ em detrimento ao saber fazer.

A situação logo acima descrita tem a seguinte justificativa: Se o tipo de tarefa T precede o bloco $[\theta / \Theta]$, que aparece como meio de produzir e justificar uma técnica apropriada a T, não é menos verdade que, estruturalmente, o saber $[\theta / \Theta]$ permite gerar τ para qualquer T dado. Por esta razão, o bloco saber fazer $[T / \tau]$ pode ser entendido como uma aplicação de $[\theta / \Theta]$.

A noção de praxeologia aparece como uma noção genérica, cujo estudo deve ser desenvolvido mais especificamente através de estudos empíricos e da observação e análise dos dados coletados.

O trabalho de estudo por realizar diz respeito, principalmente à descrição e análise da Praxeologia Matemática ou Organização matemática (OM) que está sendo desenvolvida no Curso Unificado de Cálculo I. Para isso, faremos um estudo praxeológico das atividades matemáticas propostas nos enunciados e resoluções das provas, ou seja, investigaremos as tarefas e técnicas referentes aos conteúdos matemáticos, elementos tecnológicos que justificam as técnicas e possíveis elementos teóricos que dão fundamentação as tecnologias utilizadas.

À luz do referencial teórico que acabamos de expor, podemos reformular nossa questão de pesquisa da seguinte forma: Analisar, para compreender, a organizações matemática da instituição em estudo.

2. Análise das provas: os enunciados e as resoluções, o bloco técnico e o fichamento das questões

Optamos por analisar as provas realizadas no início de cada período – a prova denominada P1, desde o primeiro semestre de 2008 até o segundo semestre de 2012, totalizando dez provas. Durante esses anos não houve alteração dos itens avaliados em relação à matéria do curso de Cálculo I; com isso podemos fixar nossa atenção sobre um mesmo tópico da disciplina, avaliado em cada prova. Neste artigo limitamos nossa investigação a três questões de três provas, referentes aos conteúdos sobre Limites e Continuidade.

Nesta seção exibiremos os enunciados das questões sobre limites e continuidades propostas, procurando tipificar as tarefas em cada caso. Também acrescentaremos as resoluções originais e que estão disponíveis na página da disciplina. Discutiremos a respeito das possíveis técnicas que poderiam estar sendo empregadas pela equipe de professores da mesma disciplina naquele semestre. A partir daí, faremos o fichamento dessas questões, seguindo as orientações apresentadas neste artigo.

2.1 Análise da QUESTÃO 1

2.1.1 Análise do enunciado da questão

Enunciado: (a) Calcule o seguinte limite. Justifique sua resposta.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$$

(b) Determine o valor de b para que a função $f : R \to R$ definida abaixo seja contínua. Justifique sua resposta.

$$f(x) = \begin{cases} (1 + sen\ 2x)^{3/x} & \text{se } x > 0; \\ b & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Análise do enunciado: Esta questão apresenta dois itens, e temos duas tarefas distintas e identificadas pelos próprios enunciados.

t_{1a}: Calcular o limite.

t_{1b}: Determinar o valor de b para que a função dada seja contínua.

Segundo os enunciados dos itens, também temos o tipo de tarefa "justificar", porém veremos nas resoluções desses itens que a justificativa consiste em realizar os próprios cálculos cobrados nas tarefas t_1 e t_2.

2.1.2 Análise da solução proposta

Solução: Primeiramente, resolvendo a parte (a):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+5/x}}{\sqrt{x}\left(1+5/\sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+5/x}}{\left(1+5/\sqrt{x}\right)} = 1$$

Observando o procedimento adotado na resolução do item (a) da questão acima, podemos descrever a seguinte técnica:

τ_{1a}: Colocar em evidência a mais alta potência de *x* que ocorre no numerador e denominador. Deste modo, aparecerão expressões do tipo $\dfrac{1}{x^n}$ que tendem a zero quando $x \to +\infty$.

(b) f é contínua se, e somente se, $b = \lim_{x\to 0+}(1+sen\ 2x)^{3/x}$.

Para $\ln f(x) = \ln(1+sen\ 2x)^{3/x} = \dfrac{3\ln(1+sen\ 2x)}{x}$.

Aplicando L'Hospital, obtemos $\lim_{x\to 0+} \ln f(x) = \lim_{x\to 0+} \dfrac{6\cos\ 2x}{1+sen\ 2x} = 6$.

Como a função logaritmo é contínua em $(0,+\infty)$, temos:

$$6 = \lim_{x\to 0+} \ln f(x) = \ln\left(\lim_{x\to 0+} f(x)\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = e^6.$$

Portanto, f é contínua se, e somente se, $b = e^6$.

Análise da solução: Na resolução do item (b), podemos destacar a seguinte técnica predominante:

τ $_{1b}$: Como f é contínua em $a \in R$, aplicamos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Porém, nesse item, o limite obtido requer a utilização de outras técnicas coadjuvantes para a resolução. Com isso, acrescentamos:

τ $_{1b'}$: Quando $\lim_{x\to a} f(x)$ é uma indeterminação do tipo 1^{∞}, $0^0, \infty^0$; tomaremos os logaritmos de ambos os membros da função, para que possamos reescrevê-lo $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ como um quociente do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$. E, a partir daí, temos que $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{h'(x)}$, quando este existe.

2.2 Análise da QUESTÃO 2

2.2.1 Análise do enunciado da questão

Enunciado: Determine os valores de a e de b para que a função $f: R \to R$ definida abaixo seja contínua em *R*. Justifique sua resposta.

$$f(x) = \begin{cases} (\cosh x + ax)^{(b/x)} & \text{se } x > 0; \\ e & \text{se } x = 0; \\ ax + b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(Lembramos que $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$).

Análise do enunciado:

Identificamos a tarefa:

t_1: Determinar os valores de a e de b para que a função dada seja contínua.

Podemos observar novamente a ocorrência do tipo de tarefa "justificar" para reforçar a necessidade do desenvolvimento dos cálculos na resolução da questão.

2.2.2 Análise da solução proposta

Solução:

Para $f(x)$ ser contínua em $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0)$.

Como $e = f(0) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-}(ax + b) = b$, temos $b = e$.

Quando vamos calcular o limite lateral $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, encontramos uma indeterminação do tipo 1^{∞}. Mas:

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} e^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0+} g(x)}$, onde $g(x) = \dfrac{b \ln(\cosh x + ax)}{x}$

Quando vamos calcular o limite lateral $\lim\limits_{x \to 0+} g(x)$, encontramos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e podemos aplicar L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{b \ln(\cosh x + ax)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{b(senhx + a)}{(\cosh x + ax)} = ab.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = e^{ab} = f(0) = e$, o que implica ba =1. Temos assim, $a = \dfrac{1}{e}$.

Análise da solução: Na resolução da questão podemos destacar a seguinte técnica predominante:

τ_2: Como f é contínua em $\alpha \in R$, aplicamos que $\lim\limits_{x \to \alpha-} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = f(\alpha)$.

τ_{2a}: Obter cada um dos valores a e b a partir da resolução de cada uma das igualdades $\lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = f(\alpha)$ e $\lim\limits_{x \to \alpha-} f(x) = f(\alpha)$.

Porém, os limites laterais encontrados requerem a utilização de outras técnicas coadjuvantes para a resolução. Com isso, acrescentamos uma delas:

τ_{2b}: Como $\lim_{x\to a} f(x)$ é uma indeterminação do tipo 1^{∞}; escreveremos que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} e^{g(x)}$, onde $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{l(x)}$ é um quociente do tipo $\frac{0}{0}$. E, a partir daí, temos que $\lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{l(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{h'(x)}{l'(x)}$, quando este existe.

2.3 Análise da QUESTÃO 3

2.3.1 Análise do enunciado da questão

Enunciado: a) Determine, caso existam, os limites:

i) $\lim_{x\to+\infty} (e^x - x^2)$.

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x+|x|(1+x)}{x} f(x)$, sendo *f* uma função contínua em $x=0$ e tal que $f(0)=3$.

b) Seja uma função $f: R \to R$, derivável para todo $x \in R$. Determine os valores de *a* e *b* para que $\lim_{x\to 10} \frac{f(x)-a-b(x-10)}{x-10} = 0$.

Análise do enunciado:

t_{1ai}: Determinar, caso exista, o limite no infinito de uma função dada do tipo $f(x) = g(x) - h(x)$, onde $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$.

t_{1aii}: Determinar, caso exista, o limite de uma função produto dada, onde um de seus fatores é uma função contendo módulo e o outro fator é uma função contínua cujo valor da mesma no ponto é fornecido.

t_{1b}: Determinar os valores de *a* e *b* para que o limite de uma função diferenciável seja igual a um dado valor.

2.3.2 Análise da solução proposta

Solução:

a) i) Considere $f(x) = (e^x - x^2) = x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)$. Vamos analisar o $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$.

Como este limite é da forma $\frac{\infty}{\infty}$, podemos usar L'Hospital e temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2x}\right)$$

Usando L'Hospital uma vez mais,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)=\infty.$$

Assim, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

b) Se $\lim_{x\to 10} f(x)-a-b(x-10)\neq 0$ o limite $\lim_{x\to 10}\frac{f(x)-a-b(x-10)}{x-10}=0$ não existiria.

Portanto, devemos ter $\lim_{x\to 10} f(x)-a-b(x-10)=0 \Rightarrow a=f(10)$, pois *f* é contínua.

Como *f* é uma função diferenciável em $x=10$,

$$\lim_{x\to 10}\frac{f(x)-f(10)}{x-10}-f'(10)=0\Rightarrow b=f'(10).$$

Análise da solução:

Para o primeiro item da questão temos a técnica:

$\boldsymbol{\tau}_{1ai}$: escrever a função como $f(x)=g(x)-h(x)=h(x)\left(\frac{g(x)}{h(x)}-1\right)$ para que ocorra $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\infty}{\infty}$; aplicar que $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}$, enquanto houver indeterminação. A partir daí, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}h(x).\lim_{x\to\infty}\left(\frac{g(x)}{h(x)}-1\right)$.

ii) Devemos considerar dois casos:

Para $x\geq 0$, $|x|=x$ e temos $\lim_{x\to 0+}\frac{x+|x|(1+x)}{x}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x+x(1+x)}{x}f(x)$.

Como *f* é uma função contínua em 0,

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}(2+x)f(x)=6.$$

Para $x\leq 0$, $|x|=-x$ e $\lim_{x\to 0-}\frac{x+|x|(1+x)}{x}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x-x(1+x)}{x}f(x)$.

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}(-x)f(x)=0$$

Portanto $\lim_{x\to 0+} g(x)\neq\lim_{x\to 0-} g(x)$. Assim, não existe o $\lim_{x\to 0} g(x)$.

$\boldsymbol{\tau}_{1aii}$: Escrever os limites laterais respeitando as sentenças que definem a função modular; obter $\lim_{x\to a-} h_1(x)\,f(x) = \lim_{x\to a-} h_1(x).f(a)$ e $\lim_{x\to a+} h_2(x)\,f(x) = \lim_{x\to a+} h_2(x).f(a)$, onde f é contínua no ponto $x = a$; o limite de tal função existirá somente se esses limites laterais existirem e forem iguais.

A resolução do item (b) apresenta, na forma de uma condicional, uma justificativa inicial para a técnica utilizada, ou seja, uma tecnologia que escrevemos como:

θ_{1b}: Se $\lim_{x\to\alpha} p(x) \neq 0$, então $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{p(x)}{x-\alpha} = +\infty$ ou $-\infty$.

E entendemos, que provavelmente, pelo menos outras duas tecnologias estão sugeridas nesse desenvolvimento da solução:

$\theta_{1b'}$: Se p é contínua em $\alpha \in R$, $\lim_{x\to\alpha} p(x) - p(\alpha) = 0$ ·

$\theta_{1b''}$: Se f é diferenciável em $\alpha \in R$, então $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} - f'(\alpha) = 0$.

Observando a solução apresentada, constatamos que θ_{1b}, $\theta_{1b'}$ e $\theta_{1b''}$ estão fortemente integradas à técnica, com isso, resumiremos a técnica principal utilizada nessa questão como sendo a manipulação de tais tecnologias operacionais.

Assim, em símbolos, temos:

τ_{1b}: $\theta_{1b} + \theta_{1b'} + \theta_{1b''}$.

3. Síntese dos resultados

Nessa seção procuramos obter informações contidas nas resoluções das questões das provas de Cálculo 1, que possam ser identificadas como justificativas que explicam as técnicas utilizadas, ou seja, que se assemelhem ao conceito de tecnologia como componente de uma organização praxeológica segundo a perspectiva da TAD. Veremos que, de certa forma, essa etapa da investigação iniciou-se ao realizarmos a descrição dos componentes do bloco técnico, ao longo da seção anterior.

Pudemos observar que nos gabaritos das provas, geralmente as resoluções foram resumidas ou imediatas, onde o uso do procedimento técnico foi tomado como suficiente para esclarecer toda a solução de um problema, dispensando qualquer comentário mais detalhado que possa explicar os motivos pelos quais se chegou ao resultado. Recordamos que, em nosso caso o conjunto das provas, que foram selecionadas, representa uma imagem da relação institucional existente nesse sistema de curso unificado, pelo menos no que diz respeito à avaliação dos tópicos do conteúdo de Cálculo 1 mencionados.

Quadro 1: Limites e continuidade em três provas P1.

Questão	Temas abordados	Gênero de tarefas	Tipos de técnicas
01	Limites no infinito, Continuidade, Regra de L'Hospital.	Calcular, Determinar.	Operacional, identificação e aplicação conceitual.
02	Limites, continuidade, Regra de L'Hospital.	Determinar, Justificar.	Operacional, identificação e aplicação conceitual.
03	Limites, continuidades, Limites no infinito e funções diferenciáveis.	Determinar.	Identificação e aplicação conceitual, operacional, procedimental.

E o que buscamos agora, é identificar os possíveis componentes tecnológicos, para que possamos entender e descrever completamente a organização praxeológica dessa OM do sistema de prova unificado que estamos analisando. Dito de outro modo, queremos visualizar, caso seja possível, os blocos tecnológico-teóricos presentes nas organizações praxeológicas pontuais, na forma das resoluções propostas das questões.

Quadro 2: Possíveis tecnologias associadas às técnicas utilizadas.

Tópicos avaliados na P1	Técnica	Tecnologia
1.Limites: a. Definição de Limites; b. Teoremas sobre Limites; c. Limites Unilaterais; d. Limites no Infinito; e. Limites Infinitos.	Operacional, procedimental.	Geralmente o uso da técnica supriu a tecnologia ou desta temos apenas vestígios. Em dois casos, apesar de a tarefa incluir justificar, a resolução dispensou detalhes tecnológicos.
2. .Continuidade: a. Definição de Continuidade; b. Teorema sobre Continuidade: Soma, Diferença, Produto, Quociente, Composta.	Procedimental, operacional e manipulativa.	A maioria das resoluções apresentou como procedimento técnico o fato de que dada uma função f contínua em $a \in IR$, temos que: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, sem revelar uma justificativa em nível tecnológico. Em alguns casos o cálculo do limite teve mais destaque que o estudo da continuidade.
3.Relação existente entre Diferenciabilidade e Continuidade.	Procedimental, operacional, aplicação conceitual.	O problema utilizou em seu resultado o fato de que toda função derivável em um ponto é contínua nesse ponto, e, realizou procedimentos técnicos para determinar os valores procurados.
4.Regra de L'Hospital.	Procedimental, operacional.	Os problemas apresentaram a aplicação da Regra de L'Hospital em sua resolução, mas a técnica foi utilizada dispensando qualquer tecnologia.

Relacionaremos as possíveis tecnologias encontradas, associadas às técnicas utilizadas e aos assuntos abordados em Cálculo 1 conforme o Quadro 2. Da descrição das resoluções que fizemos na seção anterior, quanto ao estudo das tarefas e das técnicas, e em sua sistematização no quadro acima, percebemos uma forte tendência dessa instituição em utilizar um conjunto das mesmas técnicas em diferentes provas ao longo desses três anos, dando a essas técnicas um status de importância maior.

Considerações finais

Na tentativa de obtermos as tecnologias utilizadas nas resoluções dos problemas propostos nas provas, percebemos que ao valorizar os procedimentos predominantemente técnicos nos gabaritos das provas, o conhecimento tecnológico assume um papel exterior, ficando a margem do conteúdo de importância do Cálculo 1. Com isso, podemos atribuir ao sistema de prova unificada de Cálculo 1, uma característica técnica marcante.

Sendo mais específicos, podemos mencionar dois momentos mais frequentes nas provas e em suas resoluções. No primeiro, a técnica utilizada dispensa um aprofundamento dos comentários explicativos como resposta para a questão; nesse sentido notamos uma tendência auto tecnológica assumida por esta instituição. Em outro momento, os objetos matemáticos presentes nas soluções dos problemas apresentam uma forte tendência para incluir elementos tecnológicos às técnicas, em discursos que apresentam uma dupla função: técnica e tecnológica. Nesse caso, podemos identificar no desenvolvimento da resolução de uma questão, um interesse por estudar principalmente as situações onde é possível encontrar a solução e também de justificá-la.

A nosso ver, na organização matemática observada nesse sistema de prova unificada de Cálculo 1, o bloco técnico é altamente valorizado e, mesmo que seja possível identificarmos a tecnologia, não há preocupação em deixá-la mais visível, mais mantê-la em um segundo nível de importância em relação à técnica.

Referências

ABRANTES, P. (2001) *Reorganização Curricular do Ensino Básico – Princípios, Medidas e Implicações*. Lisboa: Ministério da Educação.

ANDRÉ, M.E.D.A.; LÜDKE, M. (1986) *Pesquisas Qualitativas em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

BICUDO, M.A. (1993) Pesquisa em Educação Matemática. *Pro-posições*. Campinas: FE-Unicamp, Cortez, v.4, n.1 (10), p. 18-23.

BOENTE, A.; BRAGA, G. P. (2004) *Metodologia Científica Contemporânea – para universitários e pesquisadores.* Rio de Janeiro: Brasport, p. 79-98.

BURIASCO, R. L. C. (2000) Algumas considerações sobre avaliação educacional.

Estudos em Avaliação Educacional. São Paulo, n. 22, p. 155-177, jul./dez.

CHEVALLARD, Y. (1991) *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a matemática.* Porto Alegre: Artmed.

________________(2001) *La transposition didactique*, Grenoble: La pensée Sauvage.

________________(1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. In: *Recherches em didactique des mathématiques*. Grenoble: La pensée Sauvage Éditions, vol 12-1.

________________.(1999) El análisis de lãs pácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. In: *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Vol. 19, n. 2, p. 221-266.

________________.(2001) *Estudar matemáticas, o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Trad. MORAES, Daisy Vaz. Porto Alegre: Artmed Editora Ltda.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. E GASCÓN, J. (1991) *La transposition didactique*, Grenoble: La pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y, JOHSUA, M. A.(1991) *La transposition didactique*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

MARQUES, W.F.S.; CASTANHO, M.E. (2004) Refletindo sobre a Avaliação e Empreendendo Novos Saberes. *Revista de Educação PUC – Campinas*. Campinas, n.17, p. 91-103.

SOUTO, A. M. (2010) *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. (Dissertação de Mestrado), UFRJ. Rio de Janeiro.

VERÔNICA, P; OTERO, M.R. (2009) Praxeologias Didáticas em la Universidad: Um Estudio de Caso Relativo al Límite y Continuidad de Funciones. *Zetetiké*. Cempem-FE. Unicamp, v.17, n.31, jan/jun.

VIANNA, H. M.(2000) *Avaliação educacional e o avaliador: teoria, planejamento, modelos*. São Paulo: IBRASA.

Bibliografia consultada

APOSTOL, T.(1985). *Calculus vol. 1*. Barcelona, Ed. Reverté.

ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO y GÓMEZ. (1995) *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Ingeniería didáctica en educación matemática. Ithaca: Cornell University.

ÁVILA, G. S. S. (1999) *Cálculo I: Funções de uma variável. v 1*. São Paulo. Ed. LTC.

BOULOS, P. (1999) *Cálculo Diferencial e Integral. v 1*. São Paulo. Ed. Makron Books.

COURANT, R.; JOHN, F. S. (2000) *Introduction to Calculus and to Analysis vol. 1*. Berlin, Ed. Interscience.

EDWARDS, C.H. JR.; PENNEY, D. E. (1997) *Cálculo com Geometria Analítica vol. 1*. Rio de Janeiro. Ed. Prentice-Hall do Brasil.

GUIDORIZZI, H. (2001) *Um Curso de Cálculo vol. 1*. Rio de Janeiro: Ed. LTC.

LEITHOLD, L. (1994) *O Cálculo com Geometria Analítica-Volume I*. São Paulo: Ed. Harbra.

MUNEM, M. A. (1982) *Cálculo vol. 1*. São Paulo: Ed. LTC.

NERI, C. (2006) *Curso de Análise Real*. Rio de Janeiro: UFRJ.

PINTO, M.M.F. et al (2011) Objetos de Aprendizagem de Matemática: uma experiência na iniciação científica de alunos de graduação. Revista Docência Universitária. http://giz.lcc.ufmg.br/revista/index.php/RevistaGIZ/article/view/19

PINTO, M.M.F. and GRAY, E. (1995) Student teacher´s conceptions of rational numbers. In *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v.2, pp 18-25. Recife: Prol Editora gráfica, Ltda.

PINTO, M.M.F. (2011) *Students'understanding of Real Analysis*. 1998. 1-330. PhD Thesis in Mathematics Education. The University of Warwick. England. . Published by University Microfilms, Ann Arbor Michigan.

______________(2002). *Educação Matemática no Ensino Superior*. Educação em Revista. Belo Horizonte, n.36, p.223 – 238.

RIVERA, J. E. M.(2007) *Cálculo Diferencial e Integral Vol.I*. Rio de Janeiro. Ed. LNCC.

SANTOS, Â. R., BIANCHINI, W. (2002). *Aprendendo Cálculo com Maple – Cálculo de Uma Variável*. Rio de Janeiro. Ed. LTC.

SPIVAK, M. (1992) *Cálculo Infinitesimal vol.1*. Barcelona. Ed. Reverté.

STEWART, J. (2005) *Cálculo*. 5ª ed. São Paulo: Pioneira.

THOMAS, G. B.; FINNEY, R. L.; WEIR, M. D. E GIORDANO, F. R. (2002) *Cálculo Volume I*. 10ª ed. São Paulo. Ed. Pearson.

Recebido: 21/10/2013
Aceito: 30/03/2014