

Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário¹

Aspects of rigidity and atomization of school mathematic in the educational systems of Portugal and Spain: analysis of a questionnaire

CATARINA OLIVEIRA LUCAS²
CECILIO FONSECA BON³
JOSEP GASCÓN PÉREZ⁴
JOSÉ MANUEL CASAS⁵

Resumo

Com a finalidade de avaliar a rigidez e a atomização das praxiologias matemáticas escolares no ensino secundário ibérico definimos, a priori, cinco conjecturas à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Estudamos empiricamente a veracidade dessas hipóteses nos sistemas educativos português e espanhol, através da aplicação de um questionário constituído quer por questões habituais, quer por questões menos usuais a duas amostras de estudantes de Portugal e de Espanha. A análise e a avaliação dos resultados conduziram-nos à conclusão de que existe um fenómeno didático que se manifesta na elevada fragmentação das tarefas que habitualmente são propostas aos alunos do ensino secundário, falta de conexão entre os conteúdos, inexistência de questionamento e de justificação das técnicas utilizadas.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático; ensino secundário; praxiologia.

Abstract

In order to assess the rigidity and atomization of school mathematical praxeologies on the Iberian secondary education, we defined, a priori, five conjectures in the light of Anthropological Theory of Didactic (TAD). We studied empirically the veracity of these hypotheses in Portuguese and Spanish education systems through the application of a questionnaire composed either by usual questions, either by less common issues, for two samples of students from Portugal and Spain. The analysis and evaluation of results led us to the conclusion that there is a didactic phenomenon that manifests itself in high fragmentation of tasks that usually are proposed to students of secondary education, lack of connection between the contents, lack of questioning and justification of the techniques used.

Keywords: Anthropological Theory of Didactic; secondary education; praxeology.

¹ Apoio: trabalho financiado pela bolsa SFRH/BD/77335/2011 da FCT (Portugal) e pelo projeto “La modelización matemática para la formación del profesorado de secundaria: del álgebra al cálculo diferencial” (EDU2012-39312-C03-03).

² Doutoranda do Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo – catarinalucas.mail@gmail.com

³ Doutor pela Universidade de Vigo. Professor do Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo, E. E. Industrial – cfonseca@uvigo.es

⁴ Doutor pela Universidade Autónoma de Barcelona (UAB). Professor do Departamento de Matemáticas da UAB – gascon@mat.uab.cat

⁵ Doutor pela Universidade de Vigo. Professor do Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo, E. E. Forestal – jmcasas@uvigo.es

Introdução

Nos últimos anos temos vindo a observar uma gradual desmotivação e falta de interesse por parte dos alunos em estudar Matemática ou, mesmo, áreas que requerem uma forte componente matemática. Além disso, desde os anos noventa que há uma grande preocupação pela falta de vocações científicas na maioria dos países desenvolvidos. Em Espanha, os cursos de ciências exatas e técnicas têm sofrido um decréscimo acentuado no número de estudantes. Analogamente, em Portugal, segundo a Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência (DGEEC), em 2011/12, de todos os alunos inscritos no 1.º ano e pela 1.ª vez no ensino superior, apenas 25% inscreveram-se em cursos das áreas de Ciências e de Engenharias (8% correspondendo a “Ciências, matemática e informática” e 17% correspondendo ao grupo “Engenharia, indústrias transformadoras e construção”).

Por outro lado, e muito mais além deste fenómeno de desinteresse dos alunos pela Matemática, surge a preocupação das Universidades com os baixos resultados obtidos em disciplinas do 1.º ano com componente matemática. A maioria dos Departamentos de Matemática estão de acordo que a principal causa deste fracasso reside na disparidade entre a preparação obtida pelos estudantes no ensino secundário/médio e a preparação esperada desses alunos pelos professores universitários.

Assim, numa tentativa de suavizar o “salto” do estudo da *matemática elementar* do ensino secundário para o estudo da *matemática avançada* do ensino universitário, as Universidades criaram novas estratégias como, por exemplo, os designados “cursos zero” ou os “cursos de pré-cálculo”, embora a sua contribuição para a melhoria dos resultados não tenha sido a expetável inicialmente (SERRANO, 2013).

O primeiro passo para reformular este *problema docente* como um verdadeiro *problema de investigação didática* (GASCÓN, 1999) consiste em postular que o germen da problemática reside no modo como está articulada a atividade matemática institucional e não, unicamente, na forma de desenvolver o processo de ensino e de aprendizagem. Ou seja, pensamos que o problema vai muito mais além da qualidade da “bagagem” de conhecimentos que o aluno transporta do ensino secundário para o ensino superior universitário. Mais do que o saber científico, o aluno deverá ter aprendido no ensino secundário a adaptar-se a novos desafios/tarefas que possam surgir na universidade, a responder a questões colocadas de forma diferente da habitual, a ampliar as situações problemáticas, a questionar e a estabelecer conjecturas que lhe permitam solucionar um

determinado problema proposto.

Para tal, cremos que é necessário que o aluno trabalhe, já no ensino secundário, com uma matemática mais flexível, aberta, articulada e mais justificada do que a que vive atualmente nesta instituição escolar.

Conjecturamos também que o problema está relacionado com o desaparecimento da *razão de ser* dos conteúdos que constituem o programa oficial de Matemática do ensino secundário, a ausência de conexão entre eles, a falta de interdisciplinaridade, a inexistência de momentos de questionamento e justificação das técnicas utilizadas. Todos estes fatores têm vindo a provocar uma rigidez e atomização das praxiologias matemáticas escolares.

Para formular com precisão estas conjecturas e para começar a contrastá-las experimentalmente, sentimos a necessidade de recorrer a um modelo teórico. Situamo-nos no marco da *Teoria Antropológica do Didático* (TAD) cujo objeto primário de investigação consiste na análise da atividade matemática escolar com as suas relações humanas enquadradas em determinadas instituições sociais. De acordo com este modelo teórico efetuamos estudos exploratórios nos desenhos curriculares, nos manuais escolares de Matemática do ensino secundário/médio e analisamos os resultados obtidos com a aplicação de questionários a uma amostra de estudantes de Portugal e da Espanha (LUCAS, 2010). Neste trabalho apresentamos apenas um resumo desse estudo.

1. Marco teórico

A *Teoria Antropológica do Didático* foi iniciada pelo investigador francês Yves Chevallard nos anos 80 e é uma posição de estudo cujo eixo central é o homem fazendo matemáticas no âmbito das instituições sociais. Assim, em vez de formular os problemas didáticos em termos do que fazer para que uma determinada noção, atividade ou problemática possa ser ensinada ou assimilada de forma mais eficaz, e de procurar estratégias para superar as dificuldades que surgem no processo de ensino-aprendizagem, a TAD investiga:

- As *condições* que permitem, facilitam ou favorecem o desenvolvimento de determinadas atividades didático-matemáticas numa dada Instituição⁶;
- As *restrições* que dificultam, entorpecem ou, inclusivamente, impedem que se pratique essas atividades.

⁶ A escola primária, a escola secundária, a universidade, um domínio profissional determinado ou a sociedade em geral.

Por outras palavras, com a TAD pretendemos descobrir quais são os obstáculos ou imposições (como, por exemplo: o tempo de aula, o número de alunos ou a extensão dos programas, a estrutura e dinâmica da matemática escolar) que teremos que ultrapassar para “fazer viver” as atividades didáticas numa determinada instituição. Este tipo de pesquisa e reflexão *a priori* poderá permitir que o trabalho árduo da construção sucessiva de novas, criativas, motivadoras e cativantes atividades didático-matemáticas seja útil, possível e realizável em sala de aula e que não seja apenas um trabalho utópico.

Em termos gerais, podemos afirmar que em qualquer problema didático intervêm, pelo menos, três componentes fundamentais:

1. Uma *instituição* didática onde se formula o problema em questão (por exemplo: o sistema de ensino secundário/médio);
2. Um *conteúdo* matemático específico (por exemplo: a atividade matemática relativa ao estudo do cálculo diferencial elementar);
3. Uma organização didática do *processo de estudo* relativo ao conteúdo matemático (que deverá materializar-se num conjunto de dispositivos didáticos e de gestos de estudo).

Lo didáctico deja de ser exclusivo del proceso de enseñanza-aprendizaje para referirse a cualquiera de los aspectos del proceso de estudio. La didáctica de las matemáticas se convierte, en definitiva, en la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 1997, p.76).

Nos últimos anos têm surgido diversas investigações, teses e projetos desenvolvidos no âmbito desta teoria, em particular, salientamos as teses mais recentes de Barquero (2009), de Ruiz-Munzón (2010) e de Serrano (2013) por terem uma íntima relação com a investigação que se desenvolve neste estudo.

1.1. A noção de praxiologia ou organização matemática

Com o objetivo de modelar a atividade matemática, em meados dos anos 90, Chevallard introduziu a noção de *praxiologia* ou *organização matemática* (PM ou OM) que atualmente representa um dos pontos-chave da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1996, 1999, 2002a e 2002b). Uma praxiologia (*praxis+logos*) permite considerar em simultâneo e, atribuindo-lhes uma importância equivalente, tanto

a dimensão teórica como a dimensão prática do saber. Assim, considera-se a praxiologia como a unidade mínima que pode descrever a atividade matemática traduzida em duas vertentes que devem coexistir de forma indissociável e articulável:

- A *praxis* (a *prática* ou o “*saber fazer*”) engloba as *tarefas* propostas e as *técnicas* utilizadas para as resolver;
- O *logos* (a *teoria* ou o “*saber*”) envolve os discursos que descrevem, explicam e justificam as técnicas usadas. Esses discursos designam-se por *tecnologias* que, por sua vez, são descritas e justificadas pelas *teorias*.

Resumindo, uma praxiologia é um sistema formado por quatro componentes, divididas em dois blocos, como sugere a tabela seguinte:

Tabela 1: Componentes de uma praxiologia ou organização matemática.

Componentes	Bloco	
Tarefa	Prático-técnico	Saber fazer
Técnica		
Tecnologia	Tecnológico-teórico	Saber
Teoria		

Habitualmente uma instituição reconhece apenas, em relação a um certo tipo de tarefa, uma técnica privilegiada, e exclui outras técnicas alternativas que podem existir noutras instituições.

Em contrapartida, uma técnica deverá surgir, numa determinada instituição, como um procedimento perceptível e cuja utilidade esteja bem justificada por alguma tecnologia. Ou seja, se a presença de uma técnica não for realmente imprescindível numa instituição, então não fará qualquer sentido a sua existência ou permanência na mesma.

Uma tecnologia associada a uma técnica deverá ser constituída pelas proposições que descrevem o seu alcance, a sua relação com as outras técnicas, as possíveis generalizações e as causas das suas limitações que conduzem um processo de criação de novas técnicas. O que significa que uma tecnologia deverá ser a resposta a um amplo conjunto de questões relativas à funcionalidade e eficácia de uma técnica, como por exemplo:

- Quais são as condições para utilizar esta técnica?
- Qual é a técnica que funciona melhor? Qual é a mais adequada?
- Será que esta técnica serve para resolver qualquer tarefa deste tipo?
- Por que não posso usar essa técnica?

Para justificar a utilização dessas mesmas tecnologias, que permitem mostrar a razão de ser de uma certa técnica numa instituição, teremos de recorrer à designada teoria. Assim sendo, defendemos que é essencial a existência desta ligação entre as quatro componentes de uma praxiologia matemática, para que o bloco prático-técnico não viva isolado do bloco tecnológico-teórico ou do “discurso racional” que possa mostrar a pertinência de trabalhar com um certo tipo de tarefas.

Posteriormente, e com o objetivo de ter ferramentas mais precisas para analisar os processos didáticos institucionais, Chevallard (1999) classificou as praxiologias, de acordo com o grau de complexidade das suas componentes, em:

- Praxiologias *pontuais* (ou organizações matemáticas pontuais – PMP), quando são constituídas por um único tipo de tarefas;
- Praxiologias *locais* (PML), quando resultam da integração de várias praxiologias pontuais que compartilhem a mesma tecnologia.
- Praxiologias *regionais*, as que são obtidas mediante a coordenação e a articulação de praxiologias locais referentes à mesma teoria matemática;
- Praxiologias *globais*, as que emergem da agregação de diversas praxiologias regionais a partir da integração de diferentes teorias⁷.

Podemos citar alguns exemplos concretos de PMP que vivem no ensino secundário, geradas por diferentes tipos de tarefas: decompor em fatores um polinômio com raízes inteiras; resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas; determinar a equação de uma reta dada por um ponto e um vetor diretor; etc. Mas, para descrever adequadamente cada uma das PMP citadas, deveríamos detalhar, com precisão, o tipo de tarefas que estamos a considerar e as pequenas variações da técnica que se consideram, na instituição de referência, como correspondentes a uma “mesma técnica” (FONSECA, 2004).

2. O fenômeno didático da rigidez e atomização das praxiologias matemáticas escolares do ensino secundário/médio

Postulamos que, uma grande parte das praxiologias matemáticas (PM) que são habitualmente estudadas no ensino secundário perdeu a sua *razão de ser* (ou seja, desapareceram dessa instituição escolar as questões às quais ditas PM poderiam vir a

⁷ As noções de PMP, PML, etc., são relativas à instituição de referência, uma vez que, o que é considerado numa instituição como “um único tipo de tarefas” pode ser considerado em outra como um conjunto de diferentes tipos de tarefas.

dar resposta) e, conseqüentemente, o seu estudo na citada instituição deixou de fazer *sentido*. Mais recentemente, têm emergido investigações, apoiadas na TAD, cujo principal objetivo reside em criar possíveis *razões de ser* das PM, de tal forma que seja exequível responder a certas questões, como por exemplo:

- Que razões históricas motivaram a construção de uma determinada PM?
- A que situações problemáticas pode responder a PM?
- Que situações novas podem brotar?
- Que problemas a PM vem resolver que as PMs estudadas anteriormente não permitiam? Ou seja, quais são as vantagens em estudar a referida PM?

Gascón (2004) considerou que qualquer tentativa de incidir sobre o fenômeno da *desarticulação das matemáticas escolares* deverá basear-se numa reformulação radical da epistemologia ingênua dominante nas instituições escolares, caracterizada pela separação do matemático do didático. Assim, propôs a integração das razões de ser das praxiologias ou organizações matemáticas nos programas oficiais sob a forma de *questões geratrizes* do processo de estudo das PMs, em vez de surgirem como meros *elementos decorativos*.

Trabalhos centrados no âmbito do ensino secundário/médio tomaram as discontinuidades como uma manifestação de um problema didático global que afeta todo o ensino das matemáticas e, que se torna mais evidente na passagem de um determinado nível educativo para outro mais avançado (GARCÍA, 2005; RUIZ-HIGUERAS, ESTEPA e GARCÍA, 2007). Como consequência, distinguiram-se três aspetos particulares do problema da desarticulação dos currículos de Matemática na passagem do ensino secundário/médio ao ensino universitário:

2. A atomização e a rigidez das organizações matemáticas que se estudam no ensino secundário;
3. A transição entre a instituição secundária e a universitária;
4. A desarticulação do currículo universitário.

Salientamos o primeiro aspeto que constituirá a perspetiva de investigação deste trabalho, embora se pretenda explorar os restantes aspetos em futuras investigações.

Posto isso e, partindo da noção de organização matemática pontual, local e regional (FONSECA, 2004), enunciamos uma *conjectura geral* como base para reformular o problema docente como um verdadeiro problema de investigação didática no âmbito do Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática (GASCÓN, 2003).

No Secundário o estudo das PMs foca o bloco prático-técnico com muito baixa incidência do bloco tecnológico-teórico sobre a atividade matemática. Há uma ausência de qualquer questionamento tecnológico dos tipos de tarefas e técnicas matemáticas. Assim, as PMs no Secundário são pontuais, muito rígidas e isoladas (ou pouco coordenadas entre si), o que dificulta, e inclusivamente impede, que nesta instituição se reconstruam efetivamente PMs locais que integrem de maneira flexível as PMs pontuais.

A partir desta conjectura geral, reformulamos as cinco conjecturas específicas relativas à atividade matemática escolar do ensino secundário da Espanha propostas por Cecilio Fonseca (FONSECA, 2004, p.45-48) da seguinte forma:

- C1.** *As técnicas matemáticas dependem fortemente da nomenclatura*
- C2.** *A aplicação de uma técnica não implica a interpretação do resultado obtido*
- C3.** *Cada tarefa está associada a uma técnica privilegiada*
- C4.** *Não há reversão das técnicas para realizar a tarefa matemática "inversa"*
- C5.** *Ausência de situações abertas de modelagem*

O objetivo deste trabalho, não consiste em comparar a situação de desarticulação e fragmentação da matemática em Portugal com a da Espanha⁸ mas, sim, em estudar em que medida e em que sentido o *fenômeno didático matemático de desarticulação e correspondente rigidez* das PMs escolares é generalizável para além das instituições escolares espanholas. Para o contraste experimental dessas conjecturas elegemos três tipos de dados empíricos como indicadores das características das PM que se reconstroem nas duas instituições:

- I. Os programas oficiais e respetivos *desenhos curriculares* de matemática, em particular, do 3º ciclo e ensino secundário português e do ensino secundário obrigatório e bacharelato do sistema escolar espanhol;
- II. *As respostas de uma amostra de estudantes* de matemática de escolas portuguesas e espanholas a tarefas matemáticas propostas num *questionário*;
- III. Os dados obtidos a partir da análise dos tipos de tarefas que propõe uma amostra de *manuals escolares* aprovados oficialmente pelas autoridades educacionais portuguesa e espanhola para uso nos níveis educativos referidos.

Neste trabalho explicitaremos apenas os dados empíricos referentes às respostas dos estudantes a um *questionário* especificamente desenhado para detectar os problemas determinados nas conjecturas C1-C5 (ponto II) e descreveremos parcialmente, nas

⁸ Em investigações futuras gostaríamos de recolher e analisar dados de outros países com o intuito de verificar se o fenómeno da rigidez e incompletude das matemáticas é independente das tradições culturais, da sociedade em estudo, ou mesmo, do nível de escolaridade em análise.

conclusões, alguns dos resultados obtidos com a análise das tarefas propostas nos *manuals escolares* (ponto III), com o objetivo de sublinhar a coerência entre os dados obtidos em ambos os casos. Os detalhes deste estudo exploratório complementar, assim como os referentes à análise dos *desenhos curriculares*, podem ser consultados em Lucas (2010) e Lucas *et al.* (no prelo).

3. Estudo exploratório das respostas dos alunos

3.1. Construção do questionário

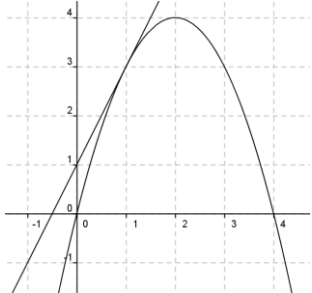
Inicialmente efetuamos uma adaptação do segundo questionário apresentado em Fonseca (2004) à situação do ensino secundário em Portugal. Foram necessários alguns ajustes iniciais dadas as diferenças entre os desenhos curriculares espanhol e português como, por exemplo, o fato do estudo da *racionalização de denominadores* e, também do *cálculo integral*, não ser abrangido pelo atual currículo oficial português. Estas diferenças implicaram a substituição dos itens do questionário referentes a temas não comuns aos desenhos curriculares dos dois países.

Foi salvaguardado o anonimato dos estudantes na aplicação do questionário e não foi permitida a utilização de máquina calculadora gráfica. As limitações do instrumento de medida levaram-nos a rever algumas tarefas e a construir um segundo questionário mais claro e completo, que permitisse agrupar⁹ os itens a contrastar segundo as cinco conjecturas e diferentes blocos de conteúdos, como mostra o seguinte quadro:

⁹ O questionário que foi passado aos alunos era constituído por estas 33 tarefas apresentadas por ordem crescente, de forma a que os estudantes não se apercebessem da relação de contraste que existia entre elas.

Quadro 1: Itens do questionário agrupados segundo as 5 conjecturas.

Conjectura	Bloco	Itens/tarefas correspondentes
CI. <i>Dependência da nomenclatura associada a uma técnica</i>	1.1. Cálculo de limites	1. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+8}{3n}$ 30. Calcule $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n}$
	1.2. Álgebra	20. Resolva a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$. 31. Resolva a equação $x^2 a^2 + 2xa + 1 = 0$, onde a é a incógnita e x é um número real conhecido (diferente de zero).
	1.3. Derivação	7. Calcule a derivada da seguinte função: $k(x) = \frac{3s}{x}, s \in IR$. 26. Calcule a derivada da seguinte função: $h(s) = \frac{x}{2s}, x \in IR$.
	1.4. Gráficos de funções	23(b). Represente graficamente e com precisão a função definida por $f(x) = x^2 - 4x$. 3. Represente graficamente e com precisão a função definida por $t(p) = 4p - p^2$.

<p>C2. A aplicação de uma técnica não inclui a interpretação do resultado</p>	<p>2.1. Interpretação da derivada</p>	<p>23 (a). Dada a função $f(x) = x^2 - 4x$, calcule $f'(1)$.</p> <p>2. Se tivesse que estudar a variação das seguintes funções: $f(x) = 6x^2 + 5$ $g(x) = 6x^2 + 5000$</p> <p>Qual das funções apresenta uma variação maior (variação de y relativamente a x) no intervalo $[1, 3]$?</p>
	<p>2.2. Limites de funções</p>	<p>12. As funções $f(x) = 3x^4 + x$ e $g(x) = x^3 - 100x^2$ tendem para zero quando x tende para zero.</p> <p>(a) Calcule o limite da função $f(x)/g(x)$ quando x tende para 0^+.</p> <p>(b) Qual das funções tende mais rapidamente para zero quando x tende para 0? Justifique.</p>
	<p>2.3. Continuidade</p>	<p>8. Estude a continuidade da função $f(x) = \frac{500x^2 + 4x + 1000}{x^2 + 20}$.</p> <p>19. Uma população de 500 bactérias foi introduzida numa cultura. O n.º de bactérias ao fim do tempo t (horas) vem dado por $g(t) = \frac{500t^2 + 2t + 2500}{t^2 + 50}$. Como podemos descobrir se há desníveis na população?</p>
	<p>2.4. Derivada e sua interpretação física</p>	<p>11. A família de retas da forma $y = m$ (m constante arbitrária) pode caracterizar-se por $y' = 0$. Que interpretação física pode dar à equação anterior?</p> <p>23 (a). Dada a função $f(x) = x^2 - 4x$, calcule $f'(1)$.</p>
	<p>2.5. Limites e modelagem</p>	<p>13. As vendas $V(t)$ (em milhares de unidades) de um produto, t anos depois de ser lançado no mercado são dadas por: $V(t) = 30e^{-\frac{18}{t}}$</p> <p>(a) Calcule o limite de $V(t)$ quando t tende para infinito.</p> <p>(b) Interprete o resultado anterior em termos de vendas do produto em questão.</p>
<p>C3. Inexistência de diferentes técnicas para realizar a mesma tarefa</p>	<p>3.1. Derivada: técnica algébrica ou geométrica</p>	<p>23 (a). Dada a função $f(x) = x^2 - 4x$, calcule $f'(1)$.</p> <p>21. O declive da reta tangente ao gráfico $y = f(x)$ em $x = 1$ aparece na seguinte figura. Calcule o valor da derivada em $x = 1$ sem conhecer a expressão algébrica da função?</p> 
	<p>3.2. Percentagens</p>	<p>24. Uma moto custava 4000 euros. Com um desconto de 15%, quanto custa a moto?</p> <p>5. Por que número deverá multiplicar uma quantidade para a diminuir 18%?</p>

	<p>3.3. Derivação</p>	<p>14(a) Dada a função $f(x) = \frac{5}{(3x-2)^2}$. Calcule a sua derivada.</p> <p>14(b) Saberia calcular esta mesma derivada por uma técnica diferente da utilizada na alínea anterior? Se positivo, apresente a resolução por essa técnica.</p>
	<p>3.4. Inequações e funções quadráticas</p>	<p>9. Resolva a inequação $(x - 1)(x + 3) \geq 0$ estudando a variação de sinal da função associada (sem recorrer ao gráfico).</p> <p>27. Resolva a inequação $(x + 4)(x - 2) \geq 0$ a partir de um esboço do gráfico da função associada.</p>
<p>C4. <i>Não se revertem as técnicas para realizar a tarefa inversa</i></p>	<p>4.1. Funções polinomiais</p>	<p>4. Escreva a expressão de uma função polinômica de grau três que corte o eixo dos xx nos seguintes pontos: $(1, 0)$, $(-2, 0)$ e $(3, 0)$</p> <p>22. Em que pontos o gráfico da função $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$ corta o eixo dos xx?</p>
	<p>4.2. Sistemas de equações lineares</p>	<p>6. Indique duas soluções do sistema de equações: $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ -4x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$</p> <p>25. Escreva um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas que aceite como soluções os pontos $(-1, 3)$ e $(5, 6)$.</p>
	<p>4.3. Sistemas de equações lineares e geometria analítica</p>	<p>10. Escreva a equação da reta representada, justificando os cálculos.</p> <p>25. Escreva um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas que aceite como soluções os pontos $(-1, 3)$ e $(5, 6)$.</p>
	<p>4.4. Álgebra elementar</p>	<p>17. Expresse em linguagem algébrica o enunciado: “O produto de três números pares consecutivos é igual a 1680”.</p> <p>29. Expresse em linguagem corrente a seguinte igualdade: $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 246, \quad x \in \mathbb{N}$</p>
	<p>4.5. Funções quadráticas</p>	<p>23 (b). Represente graficamente a função: $f(x) = x^2 - 4x$.</p> <p>28. Escreva a equação da seguinte parábola, justificando os cálculos.</p>

C5. <i>Ausência de situações abertas de modelagem</i>	5.1. Construção do modelo	<p>15. Num hipermercado todos os artigos estão com 10% de desconto e com um acréscimo de 16% de IVA.</p> <p>(a) Calcule o custo final de um artigo que inicialmente custa x euros.</p> <p>(b) Poderia calcular o preço final de um artigo aplicando a x uma única operação?</p> <p>18. Pretende-se construir uma caixa aberta de volume V com um cartão quadrado com 24 cm de lado, cortando quadrados iguais nos cantos e dobrando os lados para cima. Expresse V em função de x.</p> <p>33. Um operário da construção civil trabalha como independente. Cobra 50 euros por hora se o número de horas trabalhadas por semana for inferior a 40, e por cada hora adicional, 80 euros. Escreva uma função que represente o que cobra este operário em função das horas trabalhadas.</p>
	5.2. Manipulação do modelo	<p>16. Um estudo da eficácia do turno matinal ($8h$ às $15h$) de uma fábrica mostra que o número, $Q(t)$, de unidades produzidas (num período de t horas) por um trabalhador que chega à fábrica às 8 horas, é de:</p> $Q(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t \text{ unidades (em média)}$ <p>Em que momento da manhã a eficácia é máxima?</p>
	5.3. Construção e manipulação do modelo	<p>32. O volume $C(t)$ de água que sai de uma torneira (litros de água acumulada até ao instante t) é dado por uma função afim relativa ao tempo t (em segundos). Se no primeiro segundo a quantidade de água recolhida é de 3 litros, no segundo é de 5 litros e no terceiro é de 7 litros,</p> <p>(a) Qual é o volume de água recolhido num instante qualquer t?</p> <p>(b) Qual é o volume de água recolhido numa hora?</p> <p>(c) Quando corre mais água por segundo: aos 10 segundos ou aos 12 segundos?</p>

3.2. Descrição da amostra

A amostra deste estudo exploratório foi constituída por 51 alunos do último ano do ensino secundário português e por 29 alunos que frequentavam o início do primeiro ano do ensino universitário espanhol. Os dados relativos às últimas classificações obtidas pelos estudantes à disciplina de matemática apresentam-se nas tabelas e gráficos seguintes:

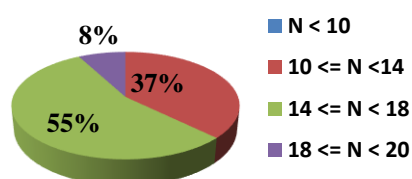
Tabela 2: Últimas classificações dos estudantes das duas subamostras.

Subamostra portuguesa

Nota do ano anterior				
Máximo	Mínimo	Média	Mediana	Desv. Pad.
20	10	14,14	14,00	2,38

N=Nota	Frequência	%
N < 10	0	0,00%
10 <= N < 14	19	37,25%
14 <= N < 18	28	54,90%
18 <= N < 20	4	7,84%
Total	51	100,00%

Classificação dos estudantes portugueses no ano anterior

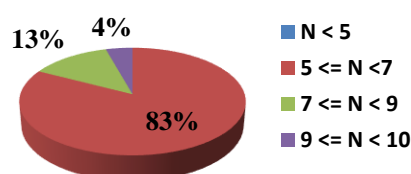


Subamostra espanhola¹⁰

Nota do ano anterior				
Máximo	Mínimo	Média	Mediana	Desv.Pad.
9,41	5,3	6,45	6,10	0,98

N=Nota	Frequência	%
N < 5	0	0,00%
5 <= N < 7	19	82,61%
7 <= N < 9	3	13,04%
9 <= N < 10	1	4,35%
Total	23	100,00%

Nota de "selectividad" dos estudantes espanhóis



Observando as tabelas e os gráficos podemos concluir que a distribuição das notas dos alunos portugueses que constituíram a amostra variou entre 10 e 20¹¹ e a nota de *selectividad*¹² dos estudantes espanhóis variou entre 5,3 e 9,41. Isto significa que as classificações são positivas e que as subamostras são compostas, essencialmente, por alunos médios/bons, o que nos leva a pensar que estes estudantes estejam bem adaptados aos seus sistemas educativos e que a atividade matemática por eles desenvolvida poderá ser representativa da atividade matemática atualmente desenvolvida pela população de estudantes portugueses e espanhóis nas respetivas instituições escolares.

Na subsecção seguinte apresentaremos os resultados obtidos para cada uma das conjecturas com o objetivo geral de mostrar em que sentido e em que medida os dados empíricos confirmam a existência de um fenómeno de rigidez e atomização das organizações matemáticas escolares. Pretendemos mostrar que os resultados globais podem ser interpretados como o fruto de um fenómeno didático geral de natureza institucional.

¹⁰ Alguns alunos não indicaram a nota de *selectividad* porque não foram sujeitos à referida prova.

¹¹ Em Portugal a escala de classificações varia entre 0 e 20, considerando uma classificação inferior a 10 como *Insuficiente*, igual ou superior a 14 como *Boa* e *Muito Boa* se superior ou igual a 18.

¹² Em Espanha as notas de *selectividad* (prova de acesso à Universidade) variam entre 0 e 10.

A descrição detalhada da análise dos resultados por blocos pode ser consultada na memória de investigação Lucas (2010).

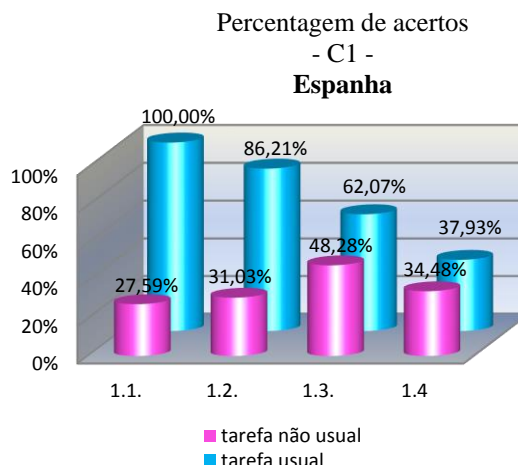
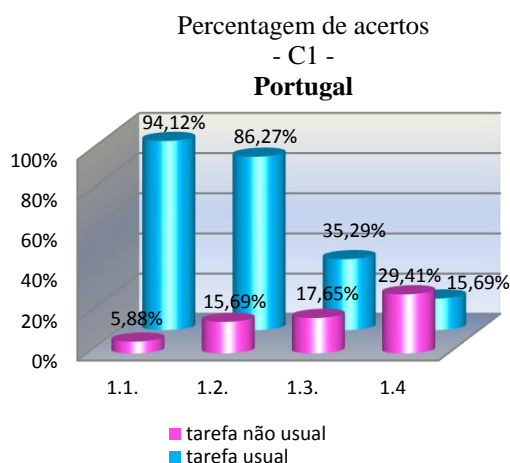
3.3. Análise dos resultados do questionário por conjecturas

C1. As técnicas matemáticas dependem fortemente da nomenclatura

Tabela 3: Percentagens de acertos aos itens da primeira conjectura.
Portugal *Espanha*

Bloco	Item	Certas	Diferença
1.1.	1	94,12%	88,24%
	30	5,88%	
1.2.	20	86,27%	70,59%
	31	15,69%	
1.3.	7	35,29%	17,65%
	26	17,65%	
1.4	23(b)	15,69%	-13,73%
	3	29,41%	

Bloco	Item	Certas	Diferença
1.1.	1	100,00%	72,41%
	30	27,59%	
1.2.	20	86,21%	55,17%
	31	31,03%	
1.3.	7	62,07%	13,79%
	26	48,28%	
1.4	23(b)	37,93%	3,45%
	3	34,48%	



De um modo global, os dados confirmam a primeira conjectura mostrando uma grande queda nos resultados quando se passa da tarefa usual para outra que deixa de ser usual por uma simples mudança de nomenclatura. A única exceção surge no bloco 1.4 cujos resultados parecem mostrar que a dificuldade da tarefa de representar graficamente uma função é relativamente independente da nomenclatura. A explicação para esta exceção deve ser procurada no papel singular que toma a representação de *funções quadráticas* na matemática escolar de ambos os países. Por outro lado, em termos globais, as baixas percentagens de respostas corretas aos itens 3 e 23(b) estão relacionadas com o fato de, nestas tarefas, terem sido solicitadas representações gráficas das respetivas funções

quadráticas que exigiam alguma *precisão*, no sentido de que o estudante não se limitasse apenas a esboçar uma parábola com uma determinada concavidade e sem a indicação gráfica das coordenadas do vértice, dos zeros ou de outros pontos particulares considerados pertinentes.

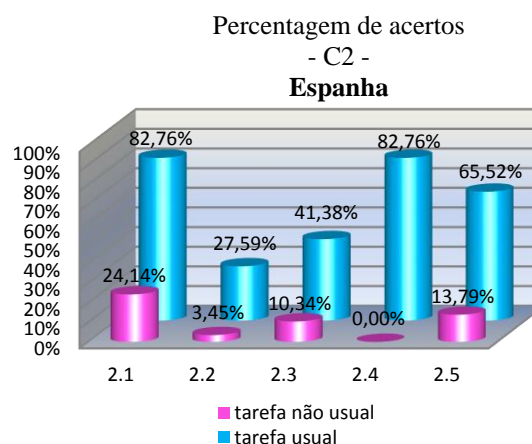
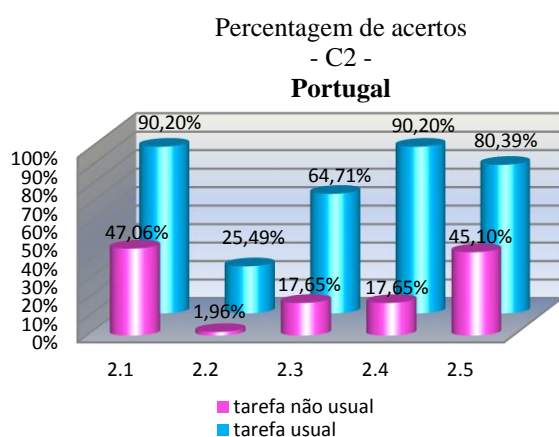
No entanto, poderemos concluir que os resultados provenientes das duas amostras determinam que esta primeira conjectura é válida em qualquer uma das instituições escolares, ou seja, que a existência de este fenômeno didático é independente da instituição.

C2. A aplicação de uma técnica não implica a interpretação do resultado obtido

Tabela 4: Percentagens de acertos aos itens da segunda conjectura.
Portugal Espanha

Bloco	Item	Certas	Diferença
2.1	23a	90,20%	43,14%
	2	47,06%	
2.2	12a	25,49%	23,53%
	12b	1,96%	
2.3	8	64,71%	47,06%
	19	17,65%	
2.4	23a	90,20%	72,55%
	11	17,65%	
2.5	13a	80,39%	35,29%
	13b	45,10%	

Bloco	Item	Certas	Diferença
2.1	23a	82,76%	58,62%
	2	24,14%	
2.2	12a	27,59%	24,14%
	12b	3,45%	
2.3	8	41,38%	31,03%
	19	10,34%	
2.4	23a	82,76%	82,76%
	11	0,00%	
2.5	13a	65,52%	51,72%
	13b	13,79%	



Após constatar que os dados corroboram claramente com a segunda conjectura, verificamos que as diferenças de percentagem de acertos são semelhantes nas duas subamostras. Por exemplo, relativamente ao bloco 2.1, podemos observar que as

elevadas percentagens de respostas corretas ao item 23a (quer em Portugal, quer em Espanha) refletem que a técnica associada ao *cálculo da derivada de uma função num ponto* forma parte do *equipamento praxiológico* do estudante, ao contrário de uma simples interpretação da mesma técnica como uma variação (item 2).

De modo análogo, os resultados das restantes subconjecturas revelam que continua a existir uma diferença crucial entre o conhecimento ou domínio de uma técnica e a destreza para conseguir interpretá-la.

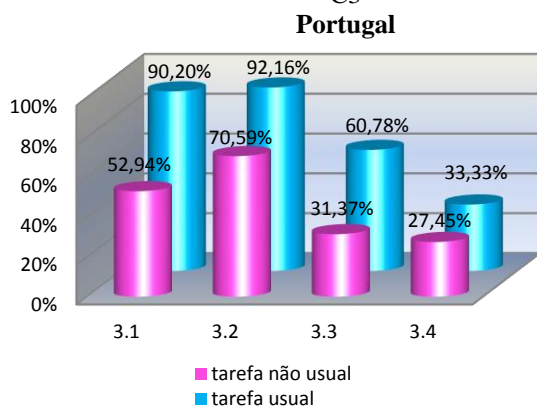
C3. A cada tarefa está associada uma técnica privilegiada

Tabela 5: Percentagens de acertos aos itens da terceira conjectura.
Portugal Espanha

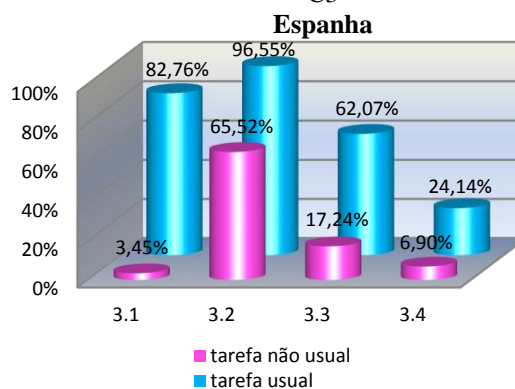
Bloco	Item	Certas	Diferença
3.1	23a	90,20%	37,25%
	21	52,94%	
3.2	24	92,16%	21,57%
	5	70,59%	
3.3	14a	60,78%	29,41%
	14b	31,37%	
3.4	9	33,33%	5,88%
	27	27,45%	

Bloco	Item	Certas	Diferença
3.1	23a	82,76%	79,31%
	21	3,45%	
3.2	24	96,55%	31,03%
	5	65,52%	
3.3	14a	62,07%	44,83%
	14b	17,24%	
3.4	9	24,14%	17,24%
	27	6,90%	

Percentagem de acertos
- C3 -
Portugal



Percentagem de acertos
- C3 -
Espanha



Os resultados obtidos conduzem-nos a crer que, em ambas as instituições escolares, não é comum a existência de um *questionamento tecnológico* de determinadas técnicas, no sentido de indagar se existe outra técnica, igualmente rigorosa, que possa ser mais útil ou mais econômica que a habitualmente utilizada para resolver uma dada tarefa.

Se nos fixarmos nos resultados obtidos com as duas subamostras em relação aos blocos 3.1. e 3.4., observamos que a diferença de sucessos é significativamente maior em Espanha do que em Portugal. Este acontecimento poderá estar relacionado com o fato

de a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto (como o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto) ser uma tarefa frequentemente explorada nos manuais portugueses e também, por já termos constatado em investigações anteriores, que a proporção entre a quantidade de exercícios referentes à *resolução gráfica* e à *resolução algébrica de uma inequação de grau maior ou igual a dois* é de 33/28 nos manuais portugueses e de 4/25 nos livros didáticos espanhóis (LUCAS, 2010; LUCAS *et al.*, no prelo). Estes dados sublinham, novamente, o caráter institucional (e não pessoal) do fenômeno estudado e das diferentes formas de se manifestar.

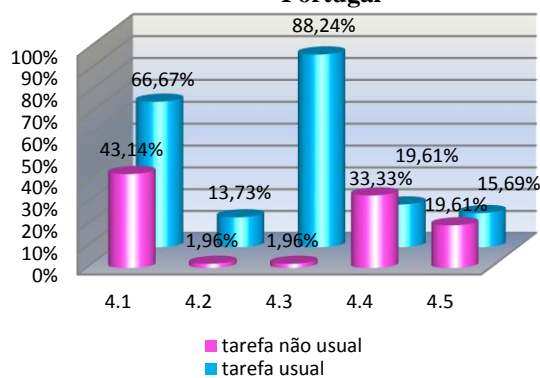
No entanto, todos estes resultados continuam a evidenciar uma certa rigidez na eleição e utilização das técnicas para resolver uma dada tarefa.

C4. Não há reversão das técnicas para realizar a tarefa “inversa”

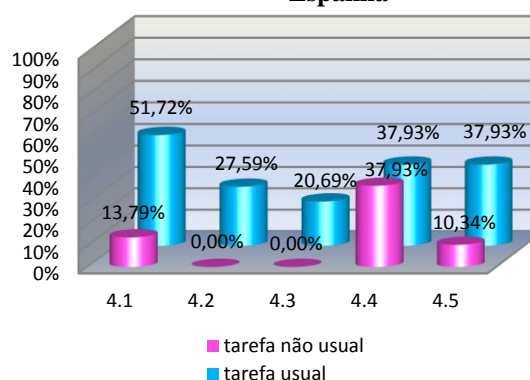
Tabela 6: Percentagens de acertos aos itens da quarta conjectura.

Portugal				Espanha			
Bloco	Item	Certas	Diferença	Bloco	Item	Certas	Diferença
4.1	22	66,67%	23,53%	4.1	22	51,72%	37,93%
	4	43,14%			4	13,79%	
4.2	6	13,73%	11,76%	4.2	6	27,59%	27,59%
	25	1,96%			25	0,00%	
4.3	10	88,24%	86,27%	4.3	10	20,69%	20,69%
	25	1,96%			25	0,00%	
4.4	17	19,61%	-13,73%	4.4	17	37,93%	0,00%
	29	33,33%			29	37,93%	
4.5	23b	15,69%	-3,92%	4.5	23b	37,93%	27,59%
	28	19,61%			28	10,34%	

Percentagem de acertos
- C4 -
Portugal



Percentagem de acertos
- C4 -
Espanha



Mais uma vez, e após comprovar que, de um modo geral, os dados sustentam a nossa conjectura, verificamos que os resultados obtidos revelam que os estudantes deparam-se

com grandes conflitos quando lhes é proposta a resolução da tarefa inversa de uma determinada tarefa que, à partida, consideramos que seja mais usual para o aluno.

Relativamente aos blocos 4.1 e 4.2, observamos que essa dificuldade parece ser menor em Portugal do que em Espanha. Este acontecimento está novamente em conformidade com as diferentes proporções de exercícios relativos a este tipo de tarefas nos livros didáticos portugueses e espanhóis (LUCAS, 2010; LUCAS *et al.*, no prelo).

Em particular, em relação ao bloco 4.1, a proporção de exercícios referentes às tarefas inversa/direta é de 28/78 nos manuais portugueses e de 29/237 nos espanhóis. Talvez tenha sido por esta razão que os estudantes de Portugal revelaram uma maior destreza em "*determinar uma equação polinomial dadas as raízes*" que os de Espanha. Além disso, consta no programa oficial português a "*decomposição de polinômios em fatores*", enquanto o currículo de Espanha refere-se apenas ao estudo de funções polinomiais, sem especificar a *decomposição*.

Relativamente ao bloco 4.2, a proporção de exercícios referentes às tarefas inversa/direta é de 2/150 nos manuais portugueses e de 1/516 nos espanhóis. A tarefa de "*determinar um sistema de equações lineares dadas as soluções*" não consta nos desenhos curriculares.

No bloco 4.3, os dados apontam de novo que quando se requiere um trabalho com uma técnica gráfica, o comportamento dos estudantes portugueses é melhor do que o dos espanhóis, dada a grande discrepância na diferença de acertos nos dois países. Esta divergência deve-se à elevada percentagem de respostas corretas ao item 10, associado a uma tarefa familiar para os estudantes de Portugal ("*dados dois pontos, escreva uma equação da reta que passa por eles*"), que é continuamente trabalhada ao longo de todo o ensino secundário: a Geometria Analítica destaca a determinação das equações de uma reta e, posteriormente, no tema "*Funções e gráficos*", é retomada a referida tarefa. Em contrapartida, quando (no item 25) se propõe uma tarefa inversa desta última, que implica que o estudante considere *a equação de uma reta como o conjunto de pontos que são solução de um sistema de equações lineares possível e indeterminado*, os dados revelam claramente a ausência de articulação entre a Geometria e a Álgebra na atividade matemática escolar desenvolvida nestes dois países.

As diferenças negativas nos blocos 4.4 e 4.5 revelam que os portugueses realizam, nestes casos, mais facilmente a tarefa inversa do que a supostamente tarefa direta. Relativamente ao último bloco, acrescentamos a informação de que observamos, com ambas as subamostras, elevados valores de percentagem de respostas *em branco* ao item

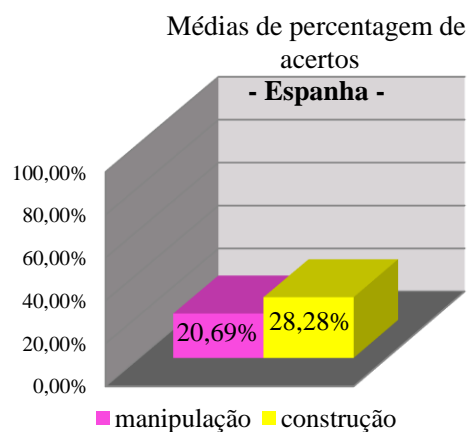
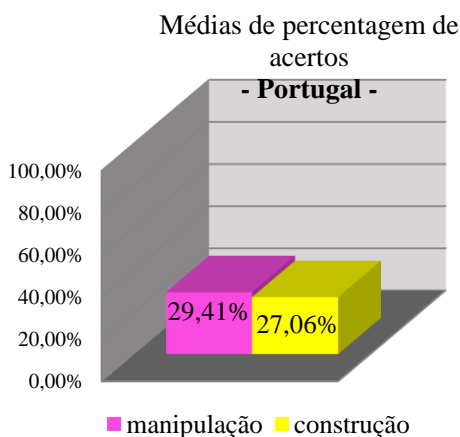
28 (em Espanha 89,66% e em Portugal 56,86%), que nos levam a crer que a tarefa inversa não é uma tarefa que forme parte do meio matemático do estudante sendo, deste modo, considerada uma tarefa bastante estranha e invulgar para os alunos (LUCAS, 2010).

C5. Ausência de situações abertas de modelagem

Tabela 7: Percentagens de acertos aos itens da quinta conjectura.

		5.1. Construção do modelo	
Problemas	Item	Portugal	Espanha
Percentagens	15a	25,49%	27,59%
Percentagens	15b	37,25%	31,03%
Fun.polin.	18	23,53%	17,24%
Fun.polin.	32a	47,06%	58,62%
Fun. por ramos	33	1,96%	6,90%
Média		27,06%	28,28%

		5.2. Manipulação do modelo	
Problemas	Item	Portugal	Espanha
Derivadas	16	15,69%	6,90%
Derivadas	32c	27,45%	24,14%
Fun.polin.	32b	45,10%	31,03%
Média		29,41%	20,69%



Após a análise das tabelas e observação dos gráficos concluímos que, as médias das percentagens de respostas corretas aos itens relativos a problemas de modelagem tomam valores muito reduzidos, inferiores a 30% dos alunos que constituem as subamostras. Estes resultados levam a crer que os estudantes não dominam este tipo de problema, revelando dificuldades na interpretação de enunciados que traduzem situações quotidianas extra-matemáticas. Também vimos, em Lucas (2010) e Lucas *et al.* (no prelo), que os problemas que exigem a construção e a manipulação de um modelo não são frequentes nos livros didáticos e talvez, por esse motivo, os alunos não estejam naturalmente familiarizados com essas questões revelando enormes dificuldades para responder a tarefas deste tipo.

Postulamos que, no momento em que a atividade matemática universitária seja concebida como uma atividade de modelagem matemática aparecerá um novo obstáculo que provocará um acréscimo das dificuldades que surgem habitualmente na transição do ensino secundário/médio para o ensino universitário.

De um modo global, poderemos concluir que os resultados obtidos revelam a existência de *problemas didáticos comuns* a diferentes instituições escolares, ou seja, que o fenômeno de rigidez e atomização das matemáticas escolares é um fenômeno didático geral e, portanto, não depende da instituição escolar em análise.

Considerações finais

Verificamos que, alunos com diferentes culturas, sociedades, tradições e também, diferentes níveis educativos manifestam um comportamento semelhante ao responder a um questionário relativo à rigidez e atomização de certas praxiologias matemáticas escolares, o que induz-nos a acreditar que o tipo de atividade matemática proposta em Portugal e em Espanha é similar.

É importante salientar que a análise dos resultados do questionário não se destina a avaliar o nível de conhecimentos matemáticos dos estudantes espanhóis e portugueses nem, por conseguinte, efetuar qualquer comparação entre eles, mas analisar o tipo de tarefas e técnicas institucionais propostas no estudo da atividade matemática do ensino secundário. Temos a intenção de apenas mostrar em que medida os resultados do questionário reforçam e são coerentes com os dados obtidos a partir da análise dos manuais (LUCAS, 2010; LUCAS *et al.*, no prelo), em relação aos tipos de tarefas matemáticas que predominam na atividade matemática escolar e, até que ponto, o fenômeno de rigidez e de atomização que estamos a estudar é um fenômeno que tem uma origem institucional, na estrutura das praxiologias matemáticas escolares, refletindo-se posteriormente no comportamento dos alunos perante as tarefas matemáticas.

Em geral, pretendemos destacar a atomização, a rigidez e a incompletude das PM do ensino secundário/médio como um fenômeno didático relativamente independente das características individuais dos professores e dos alunos.

A partir dos dados obtidos referentes ao primeiro aspeto da rigidez da matemática concluímos que as técnicas utilizadas no ensino secundário dependem fortemente da nomenclatura, uma vez que, bastou simplesmente substituir no questionário o símbolo

representativo da incógnita por um menos habitual para que o número de respostas incorretas e em branco dos estudantes aumentasse consideravelmente.

Em coerência com os resultados de Cecilio Fonseca (FONSECA, 2004), os resultados relativos ao segundo aspecto da rigidez das PMs mostram que os alunos manifestam dificuldades nas tarefas onde intervém o bloco tecnológico-teórico, em particular, na interpretação da atividade matemática.

Um terceiro aspecto da rigidez consiste na existência de uma *técnica privilegiada* associada a cada tarefa matemática e, conseqüente fragmentação das diversas tarefas. Em vários casos, para resolver uma determinada tarefa, os estudantes usaram uma técnica custosa, originando erros de cálculo e respostas incorretas.

Verificamos também que não faz parte da responsabilidade matemática do aluno (estabelecida pelo contrato didático habitual) *inverter uma técnica* para resolver a tarefa inversa. Neste quarto aspecto da rigidez das matemáticas, observamos que os enunciados relativos a tarefas não padronizadas representam uma grande dificuldade para o estudante. Basta alterar, por exemplo, a *determinação das soluções de uma equação* para a *determinação da equação sabendo as soluções* para que o número de respostas corretas decresça significativamente.

Em relação ao quinto aspecto da rigidez da matemática do ensino secundário, os dados obtidos revelam a dificuldade dos alunos em responder às questões que envolvem a construção e manipulação de modelos que traduzem situações reais. Podemos considerar que este aspecto da rigidez, que admite a ausência escolar de uma verdadeira atividade de modelagem matemática, constitui um dos principais efeitos indesejados do conjunto das várias inflexibilidades do sistema que, obviamente, não deve considerar-se independente dos anteriores. Em efeito, uma interpretação global dos resultados obtidos permite concluir que a precária situação da modelagem matemática está fortemente condicionada pela rigidez (ou falta de maleabilidade) da atividade matemática escolar, até ao ponto que poderíamos dizer que, os resultados obtidos nas quatro primeiras conjecturas mostram que no ensino secundário não se cumprem algumas das *condições necessárias* (em termos de flexibilidade e de articulação das organizações matemáticas escolares) para que a modelagem matemática possa viver e desenvolver-se com normalidade.

Em suma, esta investigação pretende suportar empiricamente que a rigidez e a atomização das matemáticas escolares constituem um *fenômeno didático de caráter institucional* (e não pessoal), relativamente independente das características pessoais

dos sujeitos do processo didático (alunos e professores) e, até mesmo, das culturas pedagógicas nas quais eles estão imersos.

As conclusões deste estudo sugerem a necessidade de que sejam as próprias instituições educacionais a reconstruir e a completar as praxiologias matemáticas locais, permitindo assim flexibilizar e integrar as praxiologias estudadas no ensino secundário.

Referências

BARQUERO, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. En R. Noirfalise y M-J. Perrin-Glorian (coord.), *Actes de l'École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 83-122). Saint-Sauves d'Auvergne, 1995.

_____. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-266.

_____. (2002a). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions, in Dorier J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11^e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble: La Pensée Sauvage.

_____. (2002b). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation, in Dorier, J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11^e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage,.

_____. BOSCH, M. & GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori. [Existe tradução em português: *Estudar Matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre (Brasil): Artmed Editora, 2001].

FONSECA, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

GARCÍA, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

GASCÓN, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, (pp. 129-150). Valladolid.

_____. (2003). From the cognitive to the epistemological program in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programs. *For the learning of mathematics*, 23(2), p. 44-55.

_____. (2004). *El problema de la articulación del currículo de matemáticas*. Curso de doctorado, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona (inédito).

LUCAS, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas*. Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados. Universidad de Vigo.

_____; FONSECA, C.; GASCÓN, J. & CASAS, J. (no prelo). O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. *Bolema (Boletim de Educação Matemática)* (aceite em Setembro de 2013).

RUIZ-HIGUERAS, L., ESTEPA A. & GARCÍA F. J. (2007). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Jaén: *Publicaciones de la Diputación de Jaén*, Servicio de Publicaciones. Universidad de Jaén.

RUIZ-MUNZÓN, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

SERRANO, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull.

Recebido: 30/01/2014

Aceito: 21/03/2014