O cálculo e a escrita matemática na perspectiva da filosofia da linguagem: domínio de técnicas

The calculation and the mathematical writing from the perspective of philosophy of language: mastery of techniques

---

MARISA ROSÂNI ABREU DA SILVEIRA[1]
PAULO VILHENA DA SILVA[2]

Resumo

Pautado na filosofia da linguagem de Wittgenstein e alguns de seus comentadores, este texto tem o objetivo de discutir o cálculo e a escrita matemática em situações de ensino e aprendizagem. Em diferentes contextos os aprendizes devem mobilizar diferentes técnicas: no cotidiano, na feira, por exemplo, o aluno resolve "cálculos de cabeça" em suas relações comerciais; na escola o estudante deve aprender a fazer cálculos no papel e para isso aprende a objetivar/formalizar os cálculos de cabeça por meio da escrita matemática e, assim, aprende uma nova habilidade. Esse fato mostra que quando o discente tem sucesso com cálculos no seu cotidiano e não tem bom desempenho na escola, significa que lhe faltam habilidades de trabalhar com a escrita matemática. Buscamos mostrar, ainda, que em ambas as situações, tanto no cálculo de cabeça como no cálculo no papel, não se trata de um processo mental interno, uma vez que o aluno aplica regras de domínio público que são apreendidas.

Palavras-chave*: cálculos de cabeça; escrita matemática; filosofia de Wittgenstein.*

Abstract

Grounded on the philosophy of language of Wittgenstein and some of his commentators, this paper aims to discuss the calculation and the mathematical writting in situations of teaching and learning. In different contexts, learners must mobilize different techniques: in everyday life, on the market, for example, the student solves "calculations in his head" in their commercial relations; in school, students must learn to do calculations on paper and they learn to objectify/formalize the calculations using mathematical writing, learning, thus, a new skill. This fact shows that when the student has success with calculations in your everyday life and do not perform well in school, this means he lacks skills to work with mathematical writing. We seek to show also that in both situations, both in the calculation in the head as in the calculation on paper, it is not an internal mental process, once the student applies rules in the public domain that are learned.

Keywords: *head calculations, mathematical writing, philosophy of Wittgenstein.*

---

[1] Profª. Associada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará - marisabreu@ufpa.br
[2] Secretária Municipal de Educação (Ananindeua-PA), SEMED ; Professor colaborador na Universidade Federal do Pará - paulovilhena1@gmail.com

Introdução

Desde Descartes introduziu-se uma “divisão”, uma separação entre o interior e o exterior, entre corpo e alma. O “eu” afastou-se do corpo e, consequentemente, do mundo. O filosofo francês defendia a tese de que a dúvida era o primeiro passo para se chegar ao conhecimento: era preciso duvidar do próprio conhecimento, da imaginação, daquilo que se enxergava e inclusive da existência de seu próprio corpo, pois tudo poderia ser um sonho ou uma ilusão. Assim

> Se quisesse desfazer-se dessas ilusões, não lhe restava outra alternativa senão a de procurar boas razões. Ou seja, as ilusões que sua imaginação produzia só podiam ser definitivamente afastadas a partir de fundamentos seguros. O núcleo dessa empreitada se encontrava na entidade que lhe parecia mais próxima possível [...], mais próxima do que seu próprio corpo, inclusive: o “eu penso” (HEBECHE, 2002, p. 71)

Ao duvidar de todo o conhecimento que acreditava ter, concluiu que apenas poderia ter certeza que duvidava. Se podia duvidar, podia, então, também pensar, e se pensava necessariamente existia. Essa concepção traz a noção de que nos situamos em dois mundos, um mundo interno e outro externo, um mundo mental e outro físico. Esse modelo cognitivo representa uma das versões do modelo referencial da linguagem, a qual considera a consciência como algo privado, na qual representaríamos a realidade. A linguagem seria apenas o “veículo” de nossas representações mentais, ou seja, descreveria nossas ideias ou objetos mentais. Nesse modelo, a compreensão é tomada tal qual um processo mental privado, conforme nos apresenta Hebeche:

> Tem-se aí a noção de que apreender o sentido do que é dito envolve algo mental ou anímico (*etwas Seelishes*), algo que ocorre ou está guardado na memória de alguém e que pode, a qualquer momento, tornar-se manifesto pela linguagem. O que ocorre na mente é distinto da sua expressão lingüística. A linguagem é como um porta-voz daquilo a que antecipadamente já se tem acesso na mente. A consciência observa o que está dentro de si e, depois, o expressa pela linguagem (HEBECHE, 2002, p. 194).

Na Educação Matemática essa concepção é representada principalmente pelo cognitivismo, que se fundamenta em uma concepção referencialista da linguagem, na qual a linguagem é apenas um apoio para algo que de certa forma já existe em algum lugar, ideal, mental ou empírico (GOTTSCHALK, 2008). O cálculo de cabeça pode ser um bom exemplo dessa discussão na literatura da Educação Matemática.

Em pesquisas sobre o saber matemático utilizado por grupos sociais, tais como feirantes, catadores e até crianças que vendem objetos no semáforo em seu cotidiano, observa-se que muitos desses sujeitos tem grande habilidade em cálculos de cabeça ao dar o troco, ao calcular o total de uma compra, etc., porém fracassam em cálculos semelhantes na escola. Esse fato leva esses pesquisadores a concluir que a solução seria contextualizar as aulas de matemática e valorizar os procedimentos "próprios" de cada aprendiz.

Bocasanta (2012), por exemplo, ao analisar as semelhanças e diferenças entre a matemática escolar e os saberes matemáticos de uma comunidade de catadores de resíduos sólidos, verifica que, diferentemente do praticado na escola, os cálculos matemáticos não necessitavam da escrita. A autora conclui que a escola falhava em "impor" aos aprendizes o aprendizado dos cálculos escritos, bem como em não contextualizar e valorizar os conhecimentos cotidianos dos sujeitos pesquisados.

Daí nosso interesse neste trabalho em discutir o cálculo e a escrita matemática em situações de ensino e aprendizagem, buscando apontar que o cálculo de cabeça não configura um processo mental interno, mas uma habilidade de cálculo que pode ser desenvolvida, que se apoia em regras e procedimentos matemáticos públicos e que portanto não basta contextualizar a matemática e valorizar os conhecimentos do aluno, uma vez que para diferentes tipos de cálculo são necessárias diferentes técnicas.

Para nossa discussão nos pautaremos principalmente na filosofia da linguagem de Ludwig Wittgenstein (e seus comentadores), que discute, entre outras questões, o "seguir regras", o "cálculo matemático", bem como o uso de conceitos psicológicos como pensar, imaginar, compreender, etc.

Assim, apontaremos as regras matemáticas como instituição humana e que, portanto, não estão antecipadamente em algum mundo e, consequentemente, não estão de antemão disponíveis ao aprendiz; discutiremos o cálculo e a escrita matemática, analisando o fato de que calcular não é apenas expressar o que já se tem na mente, mas depende de técnicas de formalização da linguagem matemática; por fim, mostraremos que na perspectiva da filosofia da psicologia de Wittgenstein, o cálculo de cabeça não se trata de um processo interno e privado, mas do domínio de técnicas.

Cálculo matemático

Na educação básica a noção de cálculo é geralmente ligada à ideia de "fazer contas", na universidade os estudantes utilizam a palavra cálculo para referirem-se as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico, Cálculo Vetorial etc. Neste texto, tomamos como referência o cálculo ligado às quatro operações aritméticas:

adição, subtração, multiplicação e divisão e, trazemos recortes de alguns autores que dissertam sobre o assunto.

Para Marion e Okada (2012), a palavra “cálculo” é entendida como uma generalização da noção vulgar de cálculo numérico, isto é, como um resultado das operações sobre signos, de acordo com um “procedimento eficaz” ou “mecânico”. Segundo os autores, para ser “eficaz”, um procedimento deve ser concluído em um número finito de etapas e deve ser tal que uma pessoa pode fazer a mão com caneta e papel, enquanto que cada passo deve consistir na aplicação de uma regra, de modo que a aplicação de tal regra não exige qualquer conjectura da pessoa que o faz (para diferenciar das máquinas, tais como as calculadoras eletrônicas), pois a regra é constante e definida.

Conforme Abbagnano (2007, p. 113), cálculo é um procedimento da matemática e da lógica e atualmente é entendido como “qualquer método ou procedimento *dedutivo*, isto é, que seja capaz de efetuar inferências sem recorrer a dados de fato”. O algoritmo “em um sentido mais amplo e geral, trata-se de um procedimento ou seqüência de instruções para a realização de uma operação de cálculo em um número finito de passos” (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2001, p. 10).

O algoritmo é um método abreviado que representa o método não abreviado de resolução de um determinado cálculo, ele representa a forma de encontrar a solução de um problema de uma maneira mais econômica e sem exigir muitos esforços para desenvolver o cálculo. Aplicar o algoritmo da adição corretamente não implica saber explicar a operação. Por exemplo, quando um aluno adiciona duas frações com denominadores diferentes, aplica o algoritmo mecanicamente e encontra o denominador comum para estas frações, porém, muitas vezes, o aluno não sabe explicar o motivo deste cálculo. A regra de adicionar frações diz que, se os denominadores são diferentes, devemos calcular o denominador comum às frações que devem ser adicionadas para daí encontrarmos suas frações equivalentes e efetuarmos a operação. Isso o aluno faz porque existe uma regra que exige que ele o faça.

Para Wittgenstein, existe similaridade entre o cálculo, a gramática e o jogo de linguagem porque seguem regras. Uma regra matemática nos obriga a seguir seus passos, tais como quando seguimos regras aritméticas que envolvem procedimentos lógicos. As regras de trânsito, por exemplo, são acordos sociais para garantir a segurança nas estradas, mas podemos ou não segui-las. Os motoristas brasileiros, geralmente, não param perante o sinal vermelho durante a madrugada, pois existe o perigo iminente de serem abordados por ladrões. Assim, seguimos regras matemáticas e podemos ou não seguir regras do trânsito. Esse fato se explica porque a matemática é lógica e normativa, por isso, *devemos aceitar* suas proposições. Nas atividades práticas, *podemos* simplesmente *aceitar*.

> "Se somamos 2 coisas a 3 coisas, daí podem resultar diferentes quantidades de coisas. Mas consideramos como *norma* o processo de que 3 coisas e 2 coisas fazem 5 coisas. Entendes? *Assim* é como resultam 5".
> Não poderia dizer-se à criança: "Mostra-me como 3 e 2 dão 5?" Ante o qual a criança calcularia no ábaco 3 + 2.
> Se na lição de cálculo se pergunta à criança: "Como resulta 5 de 3 + 2?" – O que ela tem que demonstrar? Bom, evidentemente, há de reunir 3 bolas e 2 bolas e contá-las (ou algo semelhante). (...)
> E se a criança mostra agora como 3 e 2 dão 5, mostra um procedimento que pode ser considerado como fundamento da regra "2 + 3 = 5". (WITTGENSTEIN, 1987, parte VI, § 9, p. 262).

O cálculo, o jogo, a linguagem e a gramática são noções solidárias que seguem regras. A regra é a produção de um interesse na comunicação, mas, segundo Wittgenstein, não consultamos regras para nos comunicar, pois elas estão sempre se atualizando. As regras estão sempre num estado de devir, pois dependem do contexto, e o devir é a passagem daquilo que ainda não é e daquilo que será. O seguimento de uma regra encontra problemas na contingência surgida durante a aplicação da regra.

O jogo de linguagem é a analogia entre o jogo e a linguagem. Ele está imerso em uma forma de vida que, de acordo com Glock (1998, p. 173) é o "entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem". Desta forma, a forma de vida está relacionada também a atividades não linguísticas, pois dependem de um contexto.

Conforme Wittgenstein, aplicar uma regra corretamente é intuir o sentido da regra, mas existe um abismo entre a regra e a sua aplicação. "Poderíamos dizer também: Se seguimos as leis de inferência (regras de inferência), então em um seguir sempre há um interpretar". (WITTGENSTEIN, 1987, § 114, p. 56)

A matemática e a lógica, para Wittgenstein, constituem sistemas de regras de reconhecimento. O sistema das operações matemáticas constitui as regras de suas combinações possíveis, e este sistema é a própria aplicação da matemática, ou seja, a matemática é a sua própria aplicação (GRANGER, 1990). As construções da aritmética são autônomas e, portanto, elas mesmas garantem as suas aplicações. A aritmética parece fundamentada em si mesma e ensinando-a estaremos dando os seus fundamentos. "Você poderia dizer: por que se incomodar com limitar a aplicação da aritmética? Isso se resolve sozinho. (Posso fazer uma faca sem me preocupar com os tipos de material que cortarei com ela; isso será evidente em breve)" (WIITGENSTEIN, 2003, p. 241). Isso quer dizer que pode não haver aplicação imediata da aritmética, mas poderemos encontrá-la futuramente, pois quando construímos matemática não estamos preocupados com suas aplicações.

> Mas o que a aplicação adiciona ao cálculo? Ela introduz um novo cálculo? Nesse caso, ele não é mais o *mesmo* cálculo. Ou lhe dá substância em algum sentido essencial à matemática (lógica)? Se for assim, como podemos abstrair da aplicação, mesmo que apenas temporariamente?
>
> Não, o cálculo com maçãs é essencialmente o mesmo com linhas ou números. Uma máquina é uma extensão de um motor, uma aplicação não é, no mesmo sentido, uma extensão do cálculo. (WITTGENSTEIN, 2003, p. 244).

Podemos ensinar ao outro como aplicamos uma regra, utilizando nossa linguagem para descrever aquilo que sabemos (e vemos), tal como os passos da aplicação da regra por meio de imagens (mostrando/explicando). Para Wittgenstein (1987), descrever é diferente de explicar, explicamos no sentido de completar o visível pelo invisível, por exemplo, em forma de uma figura.

Quando falamos, utilizamos a expressão 'eu sei' que evidencia uma certeza, porém, não existe garantia que realmente sabemos, apenas a certeza que acreditamos saber. Neste sentido, Wittgenstein (2000, p. 47) afirma que os jogos de linguagem são assentados em certezas. Quando julgamos não partimos da dúvida, pois a dúvida vem depois da crença; "o próprio jogo da dúvida pressupõe a certeza". Wittgenstein ressalta que "quando alguém tenta ensinar-nos matemática, não começa por garantir-nos que *sabe* que a + b = b + a" (p. 45). Quem ensina deve mostrar "como" conhece aquilo que está ensinando, saber ensinar matemática não é simplesmente saber o que se ensina. É preciso saber mostrar como sabe o que ensina. A certeza é subjetiva, mas o saber não. "O conceito de saber está associado ao do jogo de linguagem (...) Se eu disser 'Eu sei' em matemática, então a sua justificação será uma demonstração" (p. 158).

Na demonstração do cálculo $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, por exemplo, é comum alguns alunos somarem $1+\frac{1}{2}$ e encontrarem $\frac{2}{2}$. Partindo do pressuposto que eles saibam que $\frac{1}{2}$ representa a metade de algo, como pode ser possível que algo inteiro somado com a sua metade seja $\frac{2}{2}$ que é o próprio inteiro? Isso pode acontecer com pessoas que fazem verdadeiros malabarismos mentais, mas não conseguem escrever no papel as operações correspondentes. Como é o caso do aluno que desempenha muito bem o papel de comerciante, ao fazer cálculos corretos de troco aos seus clientes, mas em sala de aula, é reprovado em matemática. Isso pode ser entendido a partir de Wittgenstein (1987), que afirma que quando muda o contexto (cotidiano e escola), muda o conceito.

A significação do signo isolado, às vezes, não adquire sentido na operação porque o aluno tem que ser capturado pela linguagem e produzir com ela. A objetivação por meio da escrita matemática é um obstáculo na aprendizagem da matemática. É na escola que tal conhecimento deve ser elucidado. Wittgenstein afirma que pessoas de uma determinada comunidade que tenha, dentro de seus padrões lógicos, uma maneira peculiar de calcular, podem não saber escrever tais operações no papel, justamente porque a intuição não caminha com o material morto da escrita (WITTGENSTEIN, 1999).

Escrita matemática

Alguns alunos não têm acesso ao discurso matemático que é o modo de apreensão da linguagem matemática. O texto matemático pode ser escrito em linguagem matemática que contem símbolos, gráficos e expressões algébricas, como também pode ser escrito em linguagem natural com expressões do vocabulário matemático. A linguagem matemática utiliza símbolos para representar signos, tais como: $\leq$, $\geq$, $\div$, $\times$, entre outros; abreviaturas: ∞, km, etc; letras: h para altura, l para lado e números. A linguagem matemática com seus códigos, dentre outras coisas, representa de forma abreviada o texto escrito pela linguagem natural. Esta abreviatura surge por meio da formalização da linguagem, mas que comporta um resíduo indicador dos sentidos contidos no texto não abreviado, que foram suprimidos no processo de abreviação. O conhecimento matemático envolve o conhecimento de sistemas formais e toda redução ao formal apresenta um resíduo que é resgatado/interpretado além do texto (GRANGER, 1974). A interpretação de textos matemáticos em linguagem matemática e em linguagem natural requer o conhecimento do vocabulário matemático que está ligado ao conhecimento de conceitos, bem como requer a prática de seguir regras matemáticas. (SILVEIRA, 2014)

Como a fala e a escrita têm parentesco, não compreendendo a escrita matemática, o aluno apresenta dificuldades inclusive em expressar-se verbalmente. Um dos grandes problemas dos alunos é não conseguir formalizar o cálculo de cabeça por meio da escrita, pois tal ação compreende o ato de transpor conhecimentos de uma habilidade a outra: o cálculo de cabeça para o cálculo no papel. A escrita é um dos meios pelo quais o aluno pode mostrar o que sabe, uma vez que "o critério para compreender o que alguém imagina ou pensa é "o que ele diz ou faz", isto é, a sua descrição é o único modo de eu ter acesso ao o que ele imagina" (HEBECHE, 2002, p. 204). A intuição que é subjetiva se distancia da linguagem escrita que é objetiva. A intenção do aluno de querer escrever o cálculo de cabeça quando objetiva por meio da escrita é um processo de formalização da operação que elimina aos poucos a sua intuição.

Para que o aluno seja autor de um texto matemático, ele precisa saber ler e escrever em linguagem matemática. A autoria precisa lidar com o sentido fixado pela lógica matemática em oposição à linguagem natural que tem diferentes sentidos. Atualmente, no sentido de dar significado ao ensino de conceitos matemáticos da educação básica, os professores são solicitados, principalmente na abordagem dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a contextualizarem os conteúdos com atividades que contemplem o cotidiano do aluno. Porém, saber calcular de cabeça no cotidiano não garante o aprendizado na escola, mesmo que queiramos contextualizar as atividades, uma vez que calcular de cabeça e calcular no papel, apesar de técnicas que podem ser vistas como complementares, exigem habilidades diferentes.

Regras matemáticas: instituições humanas

Como alguém é capaz de compreender e seguir regras? Como uma regra (ou uma ordem) pode implicar sua aplicação, uma vez que qualquer modo de agir poderia, de alguma forma, ser interpretado como de acordo com a regra? Essas eram algumas das indagações de Wittgenstein (1999, p. 93).

Segundo o filósofo (1999), estamos inclinados a pensar que uma regra contém, em si mesma, isto é, *antecipadamente*, todas suas possibilidades de aplicação, como se um signo (uma palavra, frase, gesto etc.) carregasse seu uso de forma intrínseca, independente da aplicação feita por seus usuários. Entretanto "Todo signo por si só parece morto", isto é, não carrega em si o seu sentido, não tem significado independente do emprego que fazemos dele: "O que lhe dá vida? No uso ele vive" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 129).

Persiste a dúvida: se a regra não contém antecipadamente suas possibilidades de aplicação, como sabemos, então, de que maneira alguém pode segui-la corretamente? Como a regra pode implicar sua aplicação? Wittgenstein responde:

> O que tem a ver a expressão da regra – digamos o indicador de direção – com minhas ações? Que espécie de ligação existe aí? Ora, talvez esta: fui treinado para reagir de uma determinada maneira a este signo e agora reajo assim. [...] alguém somente se orienta por um indicador de direção na medida em que haja um uso constante, um hábito (WITTGENSTEIN, 1999, p. 92).

Destarte, o critério para como a regra é significada depende da prática comunitária de sua aplicação, da forma como convencionamos e fomos ensinados a usá-la. Daí decorre sabermos o que fazer quando aplicamos uma regra. Para Wittgenstein, seguir regras é mais uma das atividades que fazem parte de nossa vida, é uma instituição humana, faz parte de nossos hábitos e costumes, como comer com talheres da forma que comemos, sentar em cadeiras da forma que sentamos etc. (SILVEIRA; SILVA, 2013).

As considerações acima expostas são válidas também para um tipo particular de regra: a regra matemática. A concordância, a regularidade, enfim, os hábitos e asserções de nossa "forma de vida" são imprescindíveis para os resultados na Matemática e também para seu aprendizado (1999, p. 203). A Matemática não é um conjunto de cálculos isolados de nossos usos ou autocontidos em alguma "realidade matemática", mas uma atividade de criação humana, um conjunto de atividades relacionadas umas com as outras que estão incorporadas em nosso modo de vida (Gerrard, 1991).

Neste sentido, Wittgenstein salienta o fato de que o que constitui uma regra é nosso uso coletivo dela. "Seguir regras é uma prática geral estabelecida pela concordância, pelo hábito, pelo treino". A própria prática de seguir uma regra define o que está em acordo ou desacordo com a mesma, ou seja, temos critérios *públicos* para julgar a aplicação de uma regra como correta ou incorreta. Podemos dizer que, se o pano de fundo dos nossos costumes (hábitos), das convenções de seguir uma regra fosse removido, a própria regra desapareceria. Isto é, não poderíamos chamar isto e aquilo de vermelho, se não concordássemos em relação ao nome das cores, tampouco poderíamos calcular se cada um de nós contasse de uma forma diferente.

Assim, visto que as regras não contêm em si mesmas suas aplicações, isto é, uma regra não nos diz quando aplicá-la, estas não são de forma alguma estão antecipadamente na mente do aprendiz, dependem, ao contrário, de serem aprendidas.

O cálculo de cabeça: domínio de técnicas

Como vimos, uma das versões do modelo referencial da linguagem, aquela que fundamenta as teorias cognitivistas na literatura da Educação Matemática, considera a mente como algo privado, na qual a realidade seria representada, cabendo a linguagem a função de descrevê-la, isto é, de expressá-la. A compreensão por sua vez, seja de uma demonstração matemática, de uma melodia, de uma frase da língua portuguesa, etc., também é tomada tal qual um processo mental. Entretanto, compreender algo é ter o domínio de técnicas de uso da linguagem. Técnica aqui no sentido de um "saber-fazer", do domínio do uso de regras. Quando dizemos "Eu sei...", estamos dizendo algo semelhante a "Eu posso..." ou "Sou capaz de..." ou ainda "Eu compreendo".

> "A gramática da palavra "saber" está, evidentemente, intimamente aparentada com a de "poder", "ser capaz de". Mas também estreitamente aparentada com a da palavra "compreender". ('Domínio' de uma técnica)" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 75).

Quem compreende algo é capaz de fazer certas coisas. Por exemplo, quem compreende o uso de uma palavra pode empregá-la, é capaz de ensiná-la a alguém seu uso, sabe dar exemplos, etc. Neste sentido, Baker & Hacker (2005), analisando as ideias de Wittgenstein, apontam que, se procurássemos o "local" onde se encontra a compreensão, esta estaria junto das habilidades: "Compreender uma frase significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa *dominar uma técnica"* (WITTGENSTEIN, 1999, p. 92).

Algumas vezes, ao subitamente compreendermos algo, como a lei de uma série numérica, ou ao notar um aspecto diferente em uma figura ambígua, dizemos "agora eu sei", "agora eu compreendo", "agora eu vejo" ou ainda "agora eu posso!" e temos a impressão de que algo misterioso aconteceu em nossa mente (SILVA; SILVEIRA, no prelo). Entretanto, compreender algo de repente marca uma mudança: da incompreensão à compreensão, portanto, de não ser capaz de fazer certas coisas a ser capaz de fazê-las. "Agora eu compreendo", "agora eu vejo" ou "agora eu sei" representa o *"nascimento" de uma habilidade* (BAKER e HACKER, 2005).

Compreender um tema musical, uma fórmula matemática, um jogo etc., assim como seguir regras, está relacionado à nossa participação em diversificadas práticas linguísticas – que envolvem compreender e seguir regras – de nossa forma de vida, da maneira como vivemos e agimos, isso porque as regras que fundamentam nossas habilidades fazem parte de nossas instituições, são criações humanas e, portanto, precisam ser aprendidas.

O cálculo de cabeça em alguns trabalhos na literatura da Educação matemática é considerado de maneira semelhante à compreensão no modelo referencial da linguagem: como algo interno e próprio de cada aluno (por exemplo em FRANCO, 2004; GUIMARÃES, 2009; GENTILE e GURGEL, 2009; PEREIRA JÚNIOR, 2013) e que se tem acesso como que de maneira antecipada na mente e que é descrito pela linguagem, oralmente ou no papel.

Franco (2004), por exemplo, ao discutir o cálculo mental, baseado em Luria[3] (1986), aponta a existência de uma "linguagem interna", que pode ser expressa pela "linguagem externa": "Portanto, mais uma vez, reafirmamos que a linguagem interior está estreitamente unida à externa que se interioriza em pensamento e pode se transformar em linguagem externa desdobrada" (FRANCO, 2004, p. 41).

O fato de que em geral o cálculo de cabeça leve menos tempo que o cálculo no papel nos faz pensar que o cálculo de cabeça é menos real que o feito no papel, reforçando a ideia de que algo misterioso aconteceu: um processo mental que, de alguma forma, antecipa o resultado. Ora, no papel tudo parece mais real, mais claro, daí que os cálculos que fazemos de cabeça podem parecer algo interno, anímico. E nesse sentido o cálculo mental seria como uma cópia do que escrevemos no papel ou na lousa. Nossa linguagem descreveria o que está na mente: ao realizarmos 2 + 2 de cabeça, é como se ao 2 escrito no papel correspondesse um 2 imaginado em nossa mente.

> Quando recorremos ao papel, tudo parece mais às claras, pode-se melhor notar as etapas que vamos seguindo, e com isso se reforça a noção de processo externo. O cálculo de cabeça, ao contrário, por ser mais rápido, reforça a noção de processo privado interno, e sua rapidez dá a ideia errônea de que um ato mental de significação se antecipa à sequência numérica. A noção de instantaneidade do saltar etapas dá a ideia de um calcular anterior a regra (HEBECHE, 2002, 196).

O cálculo de cabeça está apoiado nas operações e regras matemáticas que, como vimos anteriormente, são instituições humanas e, portanto, são *publicamente* aprendidas. Por exemplo, para calcular 7×13, de cabeça pode nos ser mais simples fazer $4 \times 13 + 3 \times 13 = 52 + 39 = 91$. Ora, este tipo de raciocínio tem fundamento na propriedade distributiva da multiplicação: $7 \times 13 = 13 \ \times (4 + 3) = 4 \times 13 + 3 \times$

[3]LURIA, Alexander Romanovich. **Pensamento e Linguagem:** as últimas conferências de Luria. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.

$13 = 52 + 39 = 91$. Daí que o cálculo de cabeça, assim como a compreensão, não é uma atividade mental interna, mas o domínio de uma técnica, uma vez que só podemos calcular de cabeça quando aprendemos calcular, isto é, trata-se de regras e procedimentos comunitários de domínio público.

> Apenas para aquele que aprendeu a calcular – por escrito ou oralmente – pode se tornar compreensível, por meio desse conceito de cálculo, o que é o cálculo de cabeça [...]. Você só pode aprender o que é ‘calcular de cabeça’ na medida em que você aprende o que é ‘calcular’; você só pode aprender a calcular de cabeça, na medida em que aprende a calcular (WITTGENSTEIN, 1999, p. 196;199)

Destarte, não alteramos a natureza da operação se a fazemos com ou sem o auxílio do papel. Calcular na mente (ou no papel) é uma habilidade, uma instituição, e portanto coincide com a práxis de seguirmos regras, por isso o cálculo não é uma atividade mental, mas o domínio de uma técnica que podemos desenvolver (HEBECHE, 2002).

Cabe notar que com isso não deixamos de distinguir o calcular de cabeça e o cálculo no papel: ora, usamos várias técnicas para calcular, podemos contar nos dedos, usar um algoritmo, usar uma calculadora, calcular de cabeça, um *software* de computador, etc. O cálculo de cabeça é mais uma técnica de cálculo que se diferencia do cálculo no papel, assim como se diferencia das demais técnicas. Naturalmente, podemos ter mais habilidade no uso de uma técnica do que no uso de outras: é possível ter mais habilidade e segurança no cálculo feito no papel que no cálculo de cabeça e vice-versa, mas ambas são maneiras diferentes de seguir regras públicas, técnicas diferentes que são *aprendidas*.

Alguns trabalhos na literatura da Educação Matemática, ao explicarem o motivo pelos quais um aluno que tem sucesso com cálculos de cabeça no seu cotidiano, como um feirante, por exemplo, e fracassa na escola, salientam/justificam que o problema está no modo de ensino que não é adequado para o aluno. Com base em nossas leituras da filosofia de Wittgenstein, reconhecemos que não se trata simplesmente da falta da contextualização de conceitos matemáticos, e sim, a falta de habilidades com a escrita matemática.

Considerações finais

Nossas análises buscaram esclarecer que não temos acesso ao pensamento do aluno, temos acesso apenas àquilo que ele diz ou faz (escreve). Porém, até mesmo sua escrita, não nos mostra sua compreensão sobre um determinado conteúdo matemático que estamos tentando ensiná-lo. A escrita não comporta suas intuições utilizadas para, por exemplo, resolver um cálculo. Mas o aluno pode nos explicar como compreendeu a regra para o desenvolvimento do cálculo de uma determinada operação. A compreensão é uma capacidade, não um processo interno. O aluno aprende algumas habilidades para calcular de cabeça e outras para calcular no papel.

O cálculo de cabeça é similar aquele feito no papel, mas as habilidades utilizadas são diferentes. Quando ensinamos uma regra matemática ao aluno, ele deve intuir o sentido correto da regra para poder aplicá-la em diferentes situações, já que não podemos ensiná-lo todas as aplicações da regra, pois ela depende da contingência de cada contexto onde está sendo aplicada. Por exemplo, ao resolver a operação 41 – 12, um aluno em situação de ensino e de aprendizagem, afirmou que resultava 20, explicando como procedeu ao cálculo: 1 pede emprestado para o 4 e fica com 2, o 4 que emprestou 1 fica com 3; assim a conta reescrita ficaria 32 – 12 = 20. Com a descrição deste episódio, podemos perceber que apenas temos acesso à sua compreensão, no momento em que ele explica por meio da linguagem oral. Portanto, ressaltamos que precisamos ouvir o aluno para saber como resolve seus cálculos. É a partir do jogo de linguagem entre professor e aluno que a forma de vida das palavras pronunciadas produz sentidos para que as habilidades do cálculo escrito se aprimorem.

Destacamos também, que a regra matemática aplicada no cotidiano para resolver cálculos está inserida em um contexto, na sala de aula a regra é outra, ela está inserida no contexto de escrita com a linguagem matemática. Esta escrita é aprendida na escola, ela depende de um processo de objetivação, não de elementos subjetivos envolvidos no cotidiano do aluno. Neste sentido, a escola deve propiciar o aprendizado das várias habilidades de cálculo: escrito, oral, de cabeça, com a calculadora, com *sofwares* de computador, etc., para ampliar as habilidades de cálculo matemático.

A Matemática não está antecipadamente no mundo, ela é fruto de criação humana e dessa forma pode ser publicamente apreendida e ensinada. O cálculo, a exatidão e tantas outras invenções provenientes de estudos em Matemática, também não estão antecipadamente na mente de quem calcula, elas são criações que precisam ser ensinadas. O homem cria habilidades, dentre outras coisas, para se comunicar e resolver problemas. A habilidade de calcular de cabeça, assim como a habilidade de calcular no papel foi desenvolvida através de um processo histórico que não pode ser esquecido pela humanidade. As construções do campo teórico da Matemática podem e precisam ser ensinadas indistintamente para todos os estudantes, já que estes saberes devem ser socializados.

Referências

ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de Filosofia. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BAKER, G. P. & HACKER, P. M. S. "Family resemblance".In: BAKER, G. P. & HACKER, P. M. S. **Wittgenstein:** understanding and meaning – part I. 2. ed. Oxford: Blackwell, 2005. pp. 201-226.

BOCASANTA, Daiane Martins. **O jogo de linguagem "calcular" e crianças catadoras**: um estudo etnomatemático. Anais do IV Encontro Nacional de Etnomatemática, Belém, 2012. Disponível em: < http://www.cbem4.ufpa.br/anais/Arquivos/CC_BOCASANTA.pdf>. Acesso em 15 abril de 2014.

FRANCO, Izabel Cristina de Araújo. **Procedimentos multiplicativos:** do cálculo mental à representação escolar na educação matemática de Jovens e Adultos. Campinas: UNICAMP, 2004. Dissertação (mestrado em Educação).

GENTILE, Paola; GURGEL, Thaís. Cálculo mental: contas de cabeça e sem errar. **Revista Nova escola (online),** set 2009. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/cabeca-errar-500351.shtml>. Acesso em 25 out 2014.

GERRARD, Steve. **Wittgenstein's philosophies of mathematics**. Synthese, n. 87, Kluwer Academic Publishers, 1991. pp. 125-142.

GUIMARÃES, Sheila Denize. **A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º anos do ensino fundamental.** Campo Grande: UFMG, 2009. Tese (Doutorado em Educação).

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cad. Cedes**, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do estilo**. São Paulo: Perspectiva, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Invitation à la lecture de Wittgenstein**. Aix-en-Provence: Editions Alinea, 1990.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência:** ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. Dicionário Básico de Filosofia. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 2001.

Mathieu Marion et Mitsuhiro Okada. **Wittgenstein et le lien entre la signification d'un énoncé mathématique et sa preuve**. Société de philosophie du Québec: Philosophiques, vol. 39, n° 1, 2012, p. 101-124. Disponível em: <http://id.erudit.org/iderudit/1011612ar>. Acesso em 18 de out 2014.

PEREIRA JÚNIOR, Ademir. **O uso do cálculo mental no uso das operações fundamentais.** XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013. Disponível em: < http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2320_1237_ID.pdf>. Acesso em 22 de out 2014.

SILVA, Paulo Vilhena; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da Matemática: um ensaio. **Boletim Online de Educação Matemática.** No prelo.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu; SILVA, Paulo Vilhena. A Compreensão de Regras Matemáticas na Formação Docente: uma pesquisa sob o ponto de vista da linguagem. **Arquivos Analíticos de Políticas Educativas,** vol. 21, nº. 27, 2013, p 1-24. Dossiê Formação de Professores e Práticas Culturais: descobertas, enlaces, experimentações.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. **Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem**. São Paulo: Educação Matemática e Pesquisa, v.16, n.1, pp. 47-73, 2014.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza**. Lisboa: Edições 70, 2000.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Gramática Filosófica**. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações filosóficas.** São Paulo: Nova cultural, 1999 (coleção os pensadores).

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

Enviado: 24/07/2015
Aceito: 25/02/2016