Construcción social de los procesos de definir y demostrar

Construção social dos processos definir e demonstrar

Social construction of define and demonstrate processes

ANGELINA ALVARADO MONROY[1]

Mª TERESA GONZÁLEZ ASTUDILLO[2]

Resumen

Dado que los procesos de definir y demostrar en matemáticas no están considerados como objeto de estudio en los diferentes niveles educativos, realizamos una investigación en la educación inicial universitaria con el propósito de mostrar la importancia y el papel de las definiciones dentro del proceso de demostrar. Tratamos de mejorar su comprensión por parte de los estudiantes a través de una secuencia didáctica centrada en el análisis de los procesos de construcción social de tal conocimiento. A la luz del modelo Abstracción en Contexto, analizamos el flujo de conocimiento de un estudiante a otro mediante las interacciones producidas. Finalmente documentamos que la secuencia contribuye a su aprendizaje, dado que el conocimiento base compartido les permite incorporar habilidades y sutilezas para deconstruir definiciones y utilizarlas para realizar demostraciones y comunicarlas.

Palabras clave: *Demostración y Definición; Construcción social de conocimiento; Abstracción en Contexto.*

Resumo

Embora os processos de definir e de demonstrar em matemática não sejam considerados um objeto de estudo nos diferentes níveis de ensino, realizámos uma pesquisa sobre o seu ensino e aprendizagem na formação inicial universitária com a finalidade de mostrar o papel fundamental das definições em os processo de demonstração. Tentamos melhorar a compreensão do aluno através de uma sequência didática centrada na análise dos construção social daquele conhecimento. À luz do modelo Abstração em Contexto, analisámos o fluxo de conhecimento de um aluno para outro através interações que ocorreram. Por fim, chegamos evidência de que a sequência contribui para a aprendizagem, uma vez que o conhecimento base compartilhado permitiu-lhes incorporar capacidades e subtilezas para desconstruir definições, quer para a realização de demonstrações matemáticas, quer para comuncá-las.

Palavras-chave: *Demonstração e definição; Construção social do conhecimento; Abstração em Contexto.*

[1] Profesora de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México- aalvarado@ujed.mx

[2] Profesora Titular de la Universidad de Salamanca, España- maite@usal.es

Abstract

The processes of defining and proving in mathematics aren't considered as object for studying them in the different educative levels so we have made a research about the teaching and learning of these processes during the university education of mathematicians. We try to improve its understanding through a didactical session centered on the social construction of this knowledege. Through the light of the Abstraction in Context model, we analyze the knowledge flow between students during the interactions when they are solving different questions. As a result of these interactions the base knowledge shared, allow them to incorporate skills and subtleties to deconstruct the definitions and use them to construct correct mathematics proofs and to communicate them.

Keywords: *Proof and definition; Social Construction of Knowledge, Abstraction in Context.*

Introducción

Entender el papel de procesos como definir, demostrar y modelar, son de las tareas más importantes que enfrentan los alumnos durante su enseñanza universitaria, por lo que se debe mejorar la instrucción procurando hacer comprensible su significado. En esta investigación se aborda el papel de la definición en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática durante la educación inicial universitaria, así como, las posibles formas de mejorar su comprensión. Para ello, diseñamos una secuencia didáctica que se puso en práctica con un grupo de alumnos y analizamos los procesos por los cuales se produce una construcción social del conocimiento.

El propósito es mostrar la importancia y el papel de las definiciones dentro del proceso de demostrar y documentar cómo la secuencia diseñada contribuyó a su aprendizaje. La hipótesis de partida es que habilitar a los alumnos en el manejo de las definiciones a través de una estructura social, les permite desarrollar mayor flexibilidad para comprender y construir demostraciones.

Para Thurston (1994) el conocimiento de las matemáticas avanza si las incorporamos dentro de nuestro pensamiento. Como éste cada vez es más sofisticado, generamos nuevos conceptos y nuevas estructuras matemáticas: los cambios en los contenidos reflejan nuestro pensamiento. Sfard (2008) considera que aprender matemáticas significa cambiar el discurso matemático. En esta investigación nos centramos en documentar los avances ocurridos en la deconstrucción de definiciones y en su manejo durante el proceso de demostrar. Para ello hemos elegido el modelo Abstracción en Contexto (AiC por sus siglas en inglés) como un marco teórico metodológico para estudiar los procesos que siguen los estudiantes para construir conocimiento. A continuación describiremos el marco conceptual, la metodología asociada y el análisis con los resultados obtenidos.

Marco Conceptual

La demostración matemática es un medio para justificar y comunicar de manera convincente ideas, fenómenos, hechos, etc. Desde el punto de vista matemático e histórico ha sufrido notables cambios, aunque no han repercutido en su reconocimiento como objeto de estudio; a pesar de su uso e importancia dentro de las matemáticas escolares. Lo mismo ha ocurrido con el manejo de las definiciones, tópico de suma importancia para habilitar a los estudiantes en la demostración.

La demostración es una relación semántica entre proposiciones donde se decide la verdad o no de un argumento. Su validez no admite grados como puede tener una prueba. En este sentido se han realizado algunos trabajos (HAREL Y SOWDER, 1998; IBAÑES, 2001) en los que se han identificado diferentes niveles de prueba que pueden tener sentido en determinados contextos institucionales, para lo que es importante identificar a quién van encaminadas. Estos niveles aproximan a los alumnos hacia las demostraciones.

Para Tall et al. (2001), lo que hace diferente al pensamiento matemático avanzado del elemental son las definiciones y demostraciones formales. Tall y Chin (2002) consideran la demostración como *procepto formal* aunque pocos alumnos la entienden de esa manera. En este sentido el *símbolo* es el enunciado a probar, el *proceso* es la deducción de lo que está siendo probado y el *objeto* es el concepto o el significado del teorema. Como un *símbolo* evoca la deducción, como un *proceso* contiene procedimientos secuenciales y requiere la noción general del teorema, como un *objeto* manipulable, se utiliza para demostrar otros teoremas.

Chin y Tall (2000) establecieron una jerarquía para alcanzar la noción de demostración sistemática. La primera etapa, *basada en la imagen del concepto,* es intuitiva, los estudiantes tienen una imagen del concepto desarrollada a partir de la experiencia. En la segunda, *basada en la definición,* a partir de las propiedades de la imagen del concepto, se seleccionan y refinan algunas ideas generatrices para alcanzar la definición del concepto. Las definiciones se usan en este momento para hacer deducciones. En la tercera etapa, una vez que se demuestra *un teorema,* se encapsula en *conceptos* y se puede usar en la demostración de nuevos teoremas. Quienes han madurado en la tercera etapa muestran la habilidad para considerar un teorema como *procepto formal.* Finalmente, en la última etapa, *basada en el concepto encapsulado*, se usan los teoremas de manera flexible como procesos o como conceptos. De estas etapas se puede extraer que para alcanzar la noción de demostración matemática es necesario un trabajo previo con la construcción, comprensión y manejo de las definiciones formales.

En el mismo sentido, Mejia-Ramos et al (2012) presentan un modelo de evaluación de comprensión de la demostración en términos prácticos en dos niveles: local y heurístico. La comprensión local incluye: conocimiento de las definiciones de términos clave; conocimiento del estatus lógico del enunciado a probar y de la técnica de demostración; conocimiento de cómo y por qué cada enunciado se sigue de uno previo. Por su parte, la comprensión heurística comprende: la habilidad para sintetizar las ideas principales de la demostración; identificar las subdemostraciones y su relación con la estructura de la demostración; ejemplicar las partes difíciles de la demostración; y la habilidad para transferir las ideas de la demostración a otras tareas de demostración.

Aunque en el nivel universitario se debe ser capaz de manejar los conceptos y definiciones implicadas y su estructura, Selden y Selden (1995) analizan las dificultades que presentan los alumnos para desenvolver los conceptos y definiciones, incluyendo su estructura lógica. Las definiciones permiten hacer los conceptos *formalmente operables* (BILLS Y TALL, 1998), es decir, se usan para crear o reproducir significativamente un argumento formal. Pero muchos alumnos recurren a experiencias tempranas e imágenes inoperables de los conceptos a la hora de demostrar en lugar de a las definiciones.

Pinto y Tall (1999) muestran dos manejos de definiciones formales, uno *dándole significado* a través de la consideración de ejemplos y otro por *extracción de significado* desde la manipulación y reflexión sobre la definición misma. Para tener éxito con la primera forma, se requiere dirigir la deconstrucción de ideas personales y centrarse en las propiedades esenciales procurando integrarlas en la teoría formal. La segunda forma evitó algunas dificultades respecto de la primera y los estudiantes construyeron una teoría formal no relacionada con imágenes informales. Alcock y Weber (2005) obtienen resultados similares con las formas de definir denominadas *referencial* y *sintáctica*. Gavilán et al (2012) desde un enfoque comognitivo caracterizan cambios en el discurso al abordar el proceso de definir.

Previamente, hemos comprobado que los estudiantes no utilizan las definiciones para demostrar un enunciado donde están implicadas. Utilizan más bien un representante concreto del objeto o alguna fórmula que los represente o consideran sólo alguna característica del objeto o definición “corta” (ALVARADO Y GONZÁLEZ, 2010). Dos pueden ser las razones de que se produzca esto, o bien una comprensión incompleta o errónea del concepto, o bien una comprensión matemáticamente incorrecta del papel de las definiciones en general. Para Edwards y Ward (2004) la definición debería tratarse en cursos iniciales como un concepto en sí mismo. Por otro lado, los estudiantes necesitan experiencias que les permita extraer el significado de las definiciones y poder establecer relaciones entre ellas y los objetos que representan. En este sentido, los ejemplos juegan un papel muy importante en la formación de conceptos (VINNER, 1983), para clarificar su significado y para construir y dar sentido a las definiciones (WATSON Y MASON, 2005).

Metodología

Hemos realizado un estudio experimental a partir de una secuencia didáctica considerando tres fases: a) Diseño de la propuesta didáctica, b) Experimentación y c) Análisis de las producciones de los alumnos.

a) Diseño de la propuesta didáctica

Debido a la ausencia de un curso enfocado al desarrollo de habilidades en la definición y la demostración, a medida que los alumnos se adentran en la formalización de la matemática presentan dificultades y experiencias traumáticas, derivadas de una exigencia de rigor que sobrepasa su comprensión. Por ello diseñamos una secuencia didáctica que permitiera intervenir y atemperar las dificultades que surgieran. El supuesto inicial fue que los alumnos estuvieran inmersos en situaciones de experimentación (CHEVALLARD, 1991) que les permitieran estudiar ejemplos e investigar contraejemplos (LAKATOS, 1978), definir e interpretar definiciones (DE VILLIERS, 1998), formular conjeturas y demostrarlas. Propusimos situaciones para provocar la emergencia del conocimiento necesario (construible por el alumno) para su adecuado manejo y para facilitar la transición entre el conocimiento informal y el formal. Nos centramos tanto en el desarrollo de habilidades (manipulación experta de objetos) como de sutilezas (manipulación experta de conceptos). Sólo los expertos en la sutileza pueden entender lo que es un sistema axiomático ya que éste trata relaciones entre enunciados sobre objetos. La secuencia didáctica se ha organizado en cuatro bloques, uno dedicado a las definiciones, otro al desarrollo de actitud y rigor, otro relativo al método directo de demostración y el último dedicado a métodos indirectos.

La propuesta didáctica se organizó en hojas de trabajo en las que se presenta un problema de manera sucinta, se explora acerca de la *definición y la imagen* de los conceptos y se formulan preguntas con sugerencias implícitas para responderlas. Se pretende que los alumnos organicen su pensamiento y comuniquen sus ideas.

b) Experimentación

La implementación del bloque correspondiente a las definiciones se realizó durante las dos primeras sesiones. El objetivo era desarrollar habilidades para "definir" y manipular definiciones. Para desarrollar la primera habilidad se plantearon tareas dirigidas a retomar conceptos conocidos, intentando "deconstruir" sus definiciones para luego compararlas y negociarlas con los compañeros en un proceso de socialización mediado por el profesor. Aunque las definiciones se refieren a conceptos utilizados antes por ellos, al tener la necesidad de definirlos, los alumnos se involucran en un proceso de abstracción. Para la segunda, se propusieron definiciones nuevas y construcciones guiadas con el fin de que encontraran y definieran los objetos asociados.

En estas dos primeras sesiones participaron 23 alumnos, distribuidos en 9 equipos; 4 equipos (**A**,**B**,**C**,**D**) de primer semestre y los 5 restantes (**E**,**F**,**G**,**H**,**I**) de diferentes semestres. Primero trabajaban en equipos de tres alumnos y una vez que terminaban cada hoja de trabajo se producía una interacción en gran grupo mediada por el profesor.

Posteriormente se implementaron diez sesiones más para los bloques dedicados al desarrollo de una cierta actitud y rigor, y a los métodos directos e indirectos de demostración. En estos últimos bloques nos centramos en el manejo de lo aprendido en el bloque correspondiente a las definiciones.

La forma de organizar la enseñanza (trabajo en equipos y socialización con el grupo completo) esta basada en una concepción del proceso de instrucción de naturaleza esencialmente cultural y social. La interacción social es esencial pues se da oportunidad a los alumnos de construir su conocimiento y de expresar sus ideas. A través de las discusiones entre ellos y con el profesor se organiza una explicación que quizás no es posible construir de manera individual (VOIGT, 1995). Por otro lado, las interacciones pueden resultar *efectivas* si se caracterizan por una comunicación verdadera, es decir, si los participantes: 1) Se comprometen de manera voluntaria a interactuar; 2) participan activamente y se involucran con la tarea; 3) tienen desarrolladas las bases para compartir y recibir en igualdad de condiciones, participando con ideas, al mismo tiempo que respetan y valoran las participaciones de otros; y 4) no representan una autoridad matemática durante la interacción. Los rasgos 3) y 4) son necesarios para un aprendizaje colaborativo genuino (COBB, 1995). De una interacción efectiva se deriva un producto (definición, justificación, conjetura, demostración, ejemplo) convenido por todos.

Al profesor previamente se le mostraron los recursos y las formas de organización para poner en práctica la propuesta didáctica. Su papel debía ser de *mediador*, es decir, responsable de promover el intercambio de ideas y la discusión e intermediario entre el estudiante y los conceptos. Tambien sería *monitor* al asegurarse que los alumnos en el equipo entendían la tarea y cuestionaría sobre sus intentos de solución y en caso necesario podía sugerir el uso de otra estrategia. El profesor debía *regular* el proceso, observando sus avances y dificultades e intervenir oportunamente. También actuaría como *organizador* de los contenidos al sintetizar ideas principales, definiciones y resultados aceptados por todos.

c) Análisis

Para cada tarea se realizó un análisis de la transcripción de la interacción en cada equipo, de sus respuestas escritas y de la transcripción de la puesta en común con todo el grupo de las producciones de los equipos. La recogida de datos se realizó por medio de: grabaciones de audio de las interacciones, informes escritos y notas de campo.

La relación entre la construcción de conocimiento por los individuos y la construcción del conocimiento compartido es crucial en la investigación relativa a los procesos de aprendizaje e involucra los dominios cognitivo y social. No obstante, es importante observar y analizar dichos procesos dentro de un contexto es complejo, dado que los datos son masivos y confusos. Con el propósito de analizar el flujo de conocimiento entre los estudiantes hasta lograr un conocimiento base compartido, utilizamos el modelo teórico-metodológico *Abstraction in Context (AiC)* (SCHWARZ; DREYFUS Y HERSHKOWITZ, 2009; DREYFUS; HERSHKOWITZ Y SCHWARZ 2015), que permite revisar los procesos de abstracción a fin de caracterizar la emergencia de un nuevo constructo a partir del análisis de las interacciones. Tal proceso de abstracción pasa por tres etapas: la necesidad de un nuevo constructo, su emergencia y su consolidación al utilizarlo en otros contextos. Las acciones epistémicas ocurridas durante la emergencia de un nuevo constructo son: *Recognizing, Building with, Constructing* (*R-acciones*, *B-acciones* y *C-acciones*). A tales acciones se les conoce como modelo *RBC-**<u>C</u>*** con la segunda **<u>C</u>** correspondiente a la etapa de consolidación.

Resultados

En la primera hoja de trabajo, los alumnos tenían que construir la definición de 12 conceptos. Además, incluía dos apartados donde se les pedía que generaran ejemplos desde sus definiciones y definieran un objeto a partir de su construcción guiada.

Para el análisis de las interacciones entre los alumnos dentro de cada equipo identificaremos las acciones epistémicas hasta alcanzar la construcción de cada concepto. El análisis de los procesos utilizados en la deconstrucción de definiciones se ha realizado distinguiendo entre dos maneras de definir: *descriptiva* y *constructiva* (DE VILLIERS, 1998). Además, hemos considerado si esas definiciones son: *ambiguas* o *visuales, incoherentes, equivocadas, no económicas, económicas correctas y parciales*.

Ambiguas o visuales: Admiten distintas interpretaciones y dan motivo a dudas o confusión. Realizan un dibujo del objeto (*e.g.* un rectángulo es uno cómo este) o bien lo describen con propiedades visuales (e.g. dos lados largos, dos lados cortos).

No económicas: Incluyen propiedades que pueden eliminarse, por corresponder con casos particulares o bien porque pueden derivarse de otras propiedades (*e.g.* rectángulo es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos e iguales, con los ángulos de 90°, diagonales iguales, simetría doblando a la mitad, 2 lados cortos y 2 largos, etc)

Incoherentes: Se percibe falta de conexión, relación o unión de unas palabras o ideas con otras. Es decir se caracterizan por una ausencia de lógica.

Equivocadas: Las definiciones se refieren a otro objeto matemático.

Economicas correctas: Determinan unívocamente al objeto matemático, consideran todos los casos y están libres de errores, acordes a las reglas de la disciplina (e.g. Un rectángulo es un cuadrilátero con un eje de simetría por cada par de lados opuestos).

Parciales: Aunque determinan unívocamente al objeto excluyen casos particulares.

Hemos vinculado las definiciones con los niveles de comprensión de Van Hiele. Así tenemos en el Nivel I a las definiciones visuales, en el II a las no económicas y en el III a las definiciones económicas correctas.

Mostraremos a continuación el análisis efectuado de las interacciones en el equipo **A** y cuando construyen la definición de triángulo isósceles, luego el de sus producciones escritas y, finalmente, el de la socialización en gran grupo.

Al iniciar la interacción en el equipo **A,** se producen las primeras *R-accione*s al tratar de dibujar triángulos isósceles y para ello buscan qué medidas deben tener los ángulos del triángulo. La tendencia no es dibujar casos genéricos [1-3], sino los casos particulares más utilizados en el contexto escolar (triángulos rectángulos y equiláteros). Además utilizan el triángulo equilátero como ejemplo y luego como no-ejemplo.

> [1] Triángulo isósceles. Ajá, sí creo. Ya. Entonces, con dos ángulos de *45º*. Sí son *45º*, ¿no? Un ángulo de *45º*. Ah no, ¿De cuánto es ese ángulo? [dibuja un triángulo rectángulo].
> [2] Ah no, mejor… [dibuja otro triángulo].
> [3] No, si fuera equilátero todos fueran iguales.

Con otras *R-acciones* [4-7] tratan de obtener ejemplos particulares de triángulos. Se percibe una *B-acción* [9] cuando intentan conectar los ejemplos y analizan las medidas de los ángulos.

> [4] Ah este es de *40º*, de *45º*.
> [5] O de *40º* ¿no?¬
> [6] ¿Cuánto vale?
> [7] No. //A ver ¿cómo probar?
> [8] Este ángulo mide *45º* ¿no?
> [9] …menos *180º* [hace cuentas en una mezcla de pensar y en voz alta].

A continuación, mediante una *B-acción* [10-11], se construye una familia de triángulos isósceles. Parten del dibujo de un triángulo equilátero y “visualmente” lo transforman “abriendo” (agregan el mismo número de grados a dos ángulos para mantener la igualdad) los dos ángulos de la base y obtienen así una familia de triángulos isósceles. No consideran la posibilidad de “cerrar” para obtener triángulos isósceles de “menor altura” en lo que se aprecia la influencia del contexto escolar. Aunque inicialmente contemplan el triángulo rectángulo [estereotipo de 90º, 45º, 45º] como isósceles, de nuevo, la posición en que aparecería el triángulo rectángulo al disminuir en la misma proporción los ángulos de la base no les resulta familiar. Algunos no consideran el triángulo equilátero, a partir del cual se realiza la transformación visual como un triángulo isósceles [ver 21-27]. Sólo uno de ellos, en la *R-acción* [14], muestra que reconoce al triángulo equilátero como caso particular del isósceles.

> [10] Porque 60º- 60º- 60º…( ) [dibuja un triángulo equilátero].
> [11] Cuando es isósceles estos ángulos se van abriendo [no consideran cerrar los ángulos].
> [12] No, porque …
> [13] Entonces el ángulo entre *a* y *b* es menor que 60º [ángulo desigual] y éstos deben ser mayores.
> [14] Y éstos deben de ser mayores e iguales [incluye al triángulo equilátero como isósceles].

Mediante una *B-acción* [15], tratan de construir ejemplos genéricos de triángulos isósceles fijando un ángulo para compensar en los otros, teniendo implícita la *R-acción* de que la suma de ángulos de un triángulo sea 180^0. Sin embargo, podemos ver que un estudiante no está convencido con que sea suficiente abrir los dos ángulos iguales en la misma cantidad, sino que además considera importante cuidar que la medida de los ángulos sea un número entero (cerrados) y menciona que si el ángulo desigual fuera 45º los otros dos no serían enteros [16]. Nuevamente comprobamos la influencia del contexto escolar al considerar sólo triángulos con ángulos cuya medida sea un número entero. Para de Villiers (1998), esta forma de definir corresponde a una forma *descriptiva o a posteriori* y su producción es *visual*. En nuestra caracterización corresponde además a una *definición parcial*, dado que excluyen el triángulo equilátero en la *C-acción* para establecer la definición [20].

[15] Si este fuera de *45º* tendríamos *135º* [equilátero *60º-60º-60º* y piensa si uno fuera *45º*].
[16] No. Tendría que ser un número cerrado.
[17] Y éstos deben de ser mayores.
[18] ¡Ah no! Mira. Sobra. Bueno es igual a *45º*.
[19] …triángulo con 2 lados iguales, 2 lados de la misma longitud.
[20] Si le pongo los mismos ángulos [completa otro alumno]… Los mismos ángulos iguales y uno diferente.

En ese momento comparan su construcción con la discusión que se está produciendo en otro equipo. Se aprecia que siguen sin estar seguros en relación a si la definición debe o no incluir al triángulo equilátero. Mediante una *R-acción* [23] se expresa (en relación a las definiciones de otros equipos) que decir dos lados iguales no necesariamente significa que el tercero sea diferente. Así, [26-27] se produce una *definición no económica* (nivel II).

[21] No, hay otra. (Risas) [cuando se fijan en definiciones de otros equipos antes de la socialización]
[22] Es un triángulo que tiene dos lados iguales y uno diferente, igualmente con dos ángulos iguales y uno diferente [muestran acuerdo los estudiantes].
[23] No, es que no está definido si el tercero es igual o diferente [asienten].
[14] No es un isósceles [otro alumno corrige].
[25] Isósceles, sí.
[26] El otro.
[27] Ponle 3 [incluye al triángulo equilátero]

Vemos que la posición de los triángulos influye en la construcción de ejemplos y dichos ejemplos se perciben como elementos de espacios estructurados. Por otra parte, es importante para los alumnos comparar sus respuestas con las de otros equipos intentando establecer diferencias como un mecanismo de control previo a la socialización. En este caso, les ayudó a pasar de una definición visual (nivel I de Van Hiele) a una definición no económica (nivel II).

Aunque los alumnos conocen el triángulo isósceles desde una etapa temprana, se presentan conflictos dado que más que con el manejo de la definición y propiedades están familiarizados con figuras (ver producciones tabla 1).

Tabla 1. Producciones escritas generadas en los equipos

Triángulo isósceles	
$\boxed{A}$ Triángulo que tiene 2 lados iguales y uno diferente e igualmente dos ángulos iguales y uno diferente. $\boxed{B}$ Figura geométrica regular de 3 lados, donde 2 lados miden exactamente lo mismo mientras que el tercero es desigual a los otros dos anteriores; también tiene 2 ángulos iguales y uno desigual $\boxed{C\ y\ D}$ Figura geométrica de 3 lados donde 2 de sus lados son iguales y uno diferente $\boxed{F}$ Polígono de 3 lados con 2 lados iguales y 1 distinto.	*Definiciones parciales/excluye equilátero*
$\boxed{E\ G\ I}$ Triángulo con dos lados iguales.	*Definición correcta (económica Nivel III Van Hiele)*
$\boxed{H}$ Los tres lados del triángulo son diferentes entre sí.	*Definición equivocada/ refiere triángulo escaleno*

Fuente: Elaboración propia (2015)

Durante la socialización en grupo, la discusión se centró en el reconocimiento del triángulo equilátero como caso particular del isósceles [30-32a]. Aunque intuitivamente los alumnos consideran el triángulo equilátero dentro de los isósceles, en la definición lo excluyen al agregar «y un lado diferente» y el profesor [29] les invita a reflexionar sobre esto. Es así como visualizan que la definición «aquel que tiene 2 lados iguales» no habla de cómo debe ser el tercer lado y eso implica que puede ser o no igual a los otros. Se aprecia cómo el maestro impone [30-32a] (respaldado [31]) la transición de una *definición parcial y visual* producida por los alumnos, a una *definición económica* correcta, nivel III.

[28] Alumnos: Triángulo con 2 lados iguales y 1 diferente.
[29] Profesor: Parece que esta definición está clara. Pero, si definimos triángulo isósceles aquel que tiene 2 lados iguales, ¿estaría bien? [asienten los alumnos]
[30] P: Y uno que tenga 3 lados iguales ¿será isósceles?
[31] A: Sí, también, porque tiene 2 lados iguales.
[32] P: [a] Sí, ¿verdad? Aunque coincida que el tercero sea igual. Si pensamos en la definición que incluye "y un lado diferente" el triángulo equilátero, que tiene los 3 lados iguales, no sería isósceles. [b] Pero con la definición "aquel que tiene 2 lados iguales", el equilátero es también isósceles. Vemos la importancia de la definición precisa.

Aunque sólo presentamos, la definición de triángulo isósceles como ejemplo de definiciones geométricas, se abordaron otras más que se resumen en la tabla 2.

Tabla 2. Clasificación de definiciones y momento en que ocurren algunas.

	Tipos de definiciones producidas por los equipos				
	Ambiguas	Incoherentes	Equivocadas	Parciales	Correctas (Económicas-No E)
Triángulo isósceles			1	5 (quitan equilátero)	3 (E)
Cuadrilátero	3	1	0	1 (paralelogramos)	4 (NE)
Círculo	0	0	0	8	1 (E)
Semejanza	5	2	0		2 (NE)
Ortocentro	2		2		5 (E)
Número Par	1		0	1	5 (E) y 2 (NE)
Número impar	1	1	0	1	6
Un número a divide a un número b cuando…	1	6	0	0	1 (E) y 1 (NE)
Número primo	0	2	0	7	0
Número racional	2	2	0	2	3 (E)
Se dice que A es subconjunto de B si …	1	0	0	1	5 (E) y 2 (NE)

Fuente: Elaboración propia (2015)

Resumiendo, para deconstruir definiciones los alumnos recordaron y compartieron en sus equipos ejemplos específicos del concepto matemático, al igual que procedimientos o situaciones que recordaban de su trayectoria escolar. Las definiciones negociadas y aceptadas en los equipos estuvieron caracterizadas por:

a) Contener una lista parcial de propiedades del concepto. *Un número a divide a un número b cuando: a es diferente de 0 (equipo D).*

b) Construirlas a partir de ejemplos concretos, por ejemplo en el equipo C se dice*: un número par es aquel que se puede dividir entre él y otros; Sí, porque por ejemplo el 10 se puede dividir entre él, entre 5, entre 2*.

c) Presentar ambigüedades, cuando se dice que: Dos triángulos son semejantes cuando *sus ángulos interiores y exteriores son iguales (equipo* ***A****).*

d) Excluir elementos o considerar un subconjunto del dominio de definición. En la definición de números pares el equipo **D** excluye a los pares negativos*: Son los que van ascendiendo de 2 en 2 a partir del 0;* o en la definición de triángulo isósceles el equipo **F** excluye al equilátero: *Polígono de tres lados con dos lados iguales y uno distinto.*

e) Producir definiciones incoherentes o equivocadas. Ortocentro de un triángulo*: Es el punto centro de un círculo que toca los tres vértices de un triángulo (equipo* ***A****);* o número impar*: es el número que se puede dividir entre el mismo y entre 1 (equipo* ***C****).*

f) Exhibir definiciones correctas pero no económicas, este es el caso cuando se dice que dos triángulos son semejantes cuando*: todos sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales y además se cumple a/d=c/e=b/f* (equipo **I**).

g) Lograr pocas definiciones correctas, es decir, aceptadas por la comunidad matemática, por ejemplo cuando se completa Un número a divide a un número b cuando diciendo que: *se cumple que xa=b para algún x entero* (equipo **E**), o bien se dice que *A* es subconjunto de *B* si: $x \in A \Rightarrow x \in B \ \forall x \in A$ *(equipo **E** e **I**).*

Las características a), b), c), d) y e) causaron sorpresa al profesor y evidenciaron que los alumnos manejan los conceptos de manera elemental. Esto lo convenció de que una aproximación estructural no resulta adecuada y puede ser el origen de las dificultades que enfrentan, ya que manipulan definiciones formales aun cuando no han desarrollado la habilidad para construirlas. La característica f) nos da información suficiente para afirmar que en algunas ocasiones los alumnos tienen más cuidado con las propiedades, el lenguaje y algunas sutilezas aunque presentan inmadurez en el pensamiento deductivo, dado que no perciben que ciertas características pueden derivarse de otras. Fue un hecho que se lograron pocas definiciones formales correctas que son las aceptadas en el medio. Pero en las discusiones se ha podido comprobar cómo los alumnos han discutido en los equipos hasta alcanzar una definición consensuada resolviendo los desacuerdos que surgieron con argumentos adecuados.

Para lograr que los alumnos desarrollen la habilidad de manejar las definiciones, además de realizar tareas de deconstrucción se requieren tareas inversas. En ese sentido, también se les presentó una tarea en la que, dada una definición no conocida (número feliz), se les pedía que construyeran diferentes ejemplos que la cumplieran. Creíamos que aportarían ejemplos apegados a la definición y suspenderían la tarea. Sin embargo, se mostraron motivados buscando ejemplos genéricos y construyendo espacios de ejemplos y de no ejemplos (ALVARADO Y GONZÁLEZ, 2014).

Durante el trabajo en equipos se lograron producciones negociadas, aunque limitadas. Es en el trabajo en grupo cuando las definiciones se van refinando a través de la discusión mediada por el profesor. Los alumnos transitan desde "describir" a "definir" gracias a la interacción, en la cual encontramos las siguientes fortalezas:

i) Proponer definiciones negociadas con sus pares en equipo, luego compartirlas con los demás equipos y el profesor. Interactúar con ellos para llegar a comprenderlas. La confrontación con las producciones de otros equipos, es un elemento que conduce a ampliarlas y mejorarlas a partir de argumentos, ejemplos y explicaciones.

ii) Decidir, por parte del profesor, cómo secuenciar y entrelazar las producciones de los estudiantes en la discusión en gran grupo para lograr discusiones académicamente productivas (la discusión sobre la definición de número par se inicia con *«son los números que van ascendiendo de 2 en 2 a partir del 0»*, se va afinando el lenguaje se continúa con *«son los números que se pueden dividir entre sí mismos y entre el 2»* se revisan en grupo significados locales ("se puede dividir"), se depuran y se identifican características exclusivas de los pares y luego se discute la definición de otro *equipo «los números pares son aquellos que tienen la forma 2n donde n es un entero»*.

iii) Activar y demandar ejemplos, resultaron mediadores eficaces para construir las definiciones y ampliar su significado.

iv) Integrar las ideas principales para concluir con una definición aceptada por el grupo.

c) Uso de la definición de triángulo isósceles en el proceso de demostrar.

Con el propósito de explorar el uso que hicieron los alumnos de las definiciones para demostrar, mostraremos un ejemplo correspondiente a la definición de triángulo isósceles.

A partir de la definición económica correcta de triángulo isósceles, los alumnos utilizan tal definición posteriormente en el proceso de demostrar la proposición: *Si el triángulo rectángulo XYZ con catetos de longitudes x e y e hipotenusa de longitud z tiene área* $z^2/4$*, entonces el triángulo XYZ es isósceles.*

Al iniciar este proceso los alumnos cuestionan las definiciones que intervienen en la proposición.

[33] Un triángulo isósceles es el que tiene 2 lados iguales.
[34] 2 ángulos y 2 lados [iguales] ¿verdad?

[35] Pues es lo mismo. Acuérdate que lo podemos definir de cualquiera de las dos formas. Dependiendo lo que nos diga para poder demostrarlo.

Durante la socialización se había establecido la definición de triángulo isósceles como: "un triángulo con dos lados iguales". Los alumnos recordaron correctamente la definición y además [35] consideraron la conveniencia de establecerla en función de lados o ángulos de acuerdo con la proposición; en este caso, en función de sus lados. A partir de la definición extraen información que utilizan en sus deducciones teniendo claro que el triángulo es rectángulo y sus catetos iguales.

[36] Bueno, aquí no sabemos que estos lados no son iguales pero podemos decir que, por ejemplo, el ángulo donde están *x* y *y* mide 90 grados y … que el triángulo …
[37] //tiene área de una hipotenusa cuadrada entre cuatro [apoyan la intervención].

[38] Nada más estás explicando que *z* es igual a la hipotenusa, pero se necesita probar que tiene dos de sus catetos iguales [que es un triángulo isósceles]. Que *x* y *y* son iguales.

Al considerar el caso de un triángulo equilátero [39-40] se dan cuenta de que deben descartar esa posibilidad al contrastarla con la definición de triángulo rectángulo [41]. Aquí mostraron confianza pues eran conscientes de hacia dónde debían dirigirse.

[39] Pero la hipotenusa ahí sí puede ser igual a ellos o ¿no?
[40] Bueno que sea isósceles significa que x y y sean iguales y la hipotenusa puede serlo [piensan en la posibilidad de sea triángulo equilátero].
[41] Ah sí, bueno. También si es rectángulo, no puede ser igual; la longitud es más grande.
[42] Okay ya. Queremos probar que estos dos [catetos] son iguales.
[43] Y queremos llegar a que x es igual a y ¿no?

Combinando lo anterior con otras deducciones finalmente llegan a la conclusión.

[44] Para que esto se cumpla, sería x igual a y. Porque x^2 y y^2 igual a $2xy$. Y luego de ahí, despejar y.
[45] Sí, mejor igualamos a cero [Apoyan la idea: $x^2-2xy+y^2=0$].¡Perfecto! x menos y es igual a 0, x igual a y.
[46] Algo estamos haciendo mal ahí. Sí, ¿no? … Cuyos catetos son x y y [revisa].
[47] Entonces el área está definida x por y sobre dos y esto es igual a z cuadrada sobre 4, ¿no? [asienten]. Entonces igual a x cuadrada, más y cuadrada, sobre 4. Luego lo demás queda bien x igual a y.
[48] Entonces el triángulo es isósceles [asienten].

Tabla 3. Demostración en dos columnas con el método avance-retroceso

Preguntas clave	Equipo $\boxed{A}$	Equipo $\boxed{B}$
¿Qué información se supone cierta?	***P***: *XYZ es triángulo rectángulo y su área* $=z^2/4$	***P***: *XYZ triángulo rectángulo,* $c_1=x$, $c_2=y$ *y* $h=z$, $A=z^2/4$
¿Qué se deduce a partir de la información ***P***?	$\boldsymbol{P_1}$: *el ángulo entre x e y es de 90º y su área es* $z^2/4$ *donde z es la hipotenusa.* $z^2=x^2+y^2 \Rightarrow z^2/4=(x^2+y^2)/4;$ $xy/2=(x^2+y^2)/4;\ 2xy=x^2+y^2\ ;\ x(2y-x)=y^2$ $x^2=y^2\ ;\ x=y$ *luego* $2y-x=x\ ;\ 2y=2x\ ;\ y=x$	$\boldsymbol{P_1}$: $x^2+y^2=z^2;\ A=z^2/4=xy/2$ *Entonces* $z^2=2xy;$ *Ahora* $x^2+y^2=2xy;\ x^2-2xy+y^2=0\ ;\ (x-y)^2=0\ x-y=0 \Rightarrow x=y$ $\boldsymbol{Q_1}$: $x=y$
¿Qué significa probar ***Q***?	$\boldsymbol{Q_1}$: Los catetos son de igual longitud	***Q***: *XYZ es isósceles*
¿Qué se pretende probar?	***Q***: *XYZ* es isósceles	

Fuente: Elaboración propia (2015)

En sus producciones escritas, observamos el manejo de las definiciones y cómo extraen información de las mismas para construir una demostración y su versión condensada (tablas 3 y 4), mostrando cómo han evolucionado en el manejo de las definiciones. En este momento las utilizan para demostrar. De acuerdo a las etapas de la demostración de Chin y Tall (2000) los alumnos han pasado de la etapa basada en la imagen del concepto a la etapa basada en la definición y están preparados para la transición a la etapa basada en el teorema y los conceptos comprimidos. Ahora los alumnos usan las definiciones como una doble implicación, tal objeto es *X* sí y sólo si satisface las propiedades *Y*. Esto les permite extraer significado de ellas y considerarlas para avanzar o retroceder en el proceso de demostrar.

Tabla 4. Producción comunicable escrita de la proposición demostrada

Equipo A: Dado que tenemos el triángulo rectángulo *XYZ* entonces su área está definida por $xy/2= z^2/4$ y por definición del $\triangle$ rectángulo sabemos que $z^2 =x^2+y^2$ entonces $zz/4=(x^2+y^2)/4$ entonces $xy/2=(x^2+y^2)/4$ luego $xy=(x^2+y^2)/2$ despejamos x^2+y^2 y tenemos $2xy=x^2+y^2$ volvemos a despejar y nos da $0= x^2-2xy+y^2$ lo que es igual a $(x-y)^2=0$ y para que esto se cumpla $x-y=0 \therefore y=x$.	**Equipo B:** Tenemos que *XYZ* es un triángulo rectángulo, *x, y* catetos, *z* hipotenusa y $A(\triangle XYZ)=z^2/4$. Luego del $\triangle$ rectángulo obtenemos que: $x^2+y^2= z^2$ y $A=z^2/4=xy/2$. Entonces $z^2=2xy$ y sustituyendo $x^2+y^2=2xy$. $x^2-2xy+y^2=0$; $(x-y)^2=0$; $x-y=0 \Rightarrow x=y$. Como $x=y$ entonces $\triangle XYZ$ es isósceles

Fuente: Elaboración propia (2015)

Discusión

Para realizar la discusión y con la intención de dar sustento a esta investigación, como base hemos tomado: las etapas de la demostración de Chin y Tall (2000), de las cuales se deduce la importancia de la definición para el avance en las primeras etapas así como el modelo de evaluación para la comprensión de la demostración de Mejia-Ramos et al (2012), en el cual se considera de suma importancia la comprensión de las definiciones de los conceptos claves establecidas en el enunciado a demostrar.

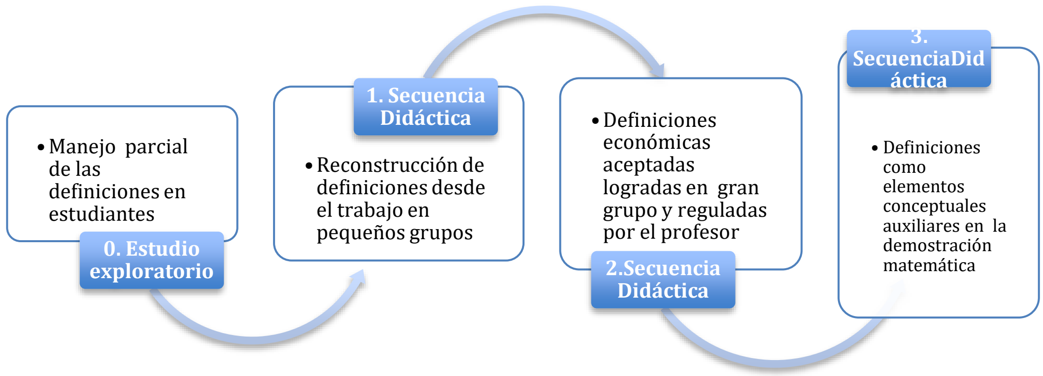
Además, como respaldo nos basamos en investigaciones que analizan las dificultades y el manejo de los estudiantes con las definiciones y la demostración (e.g. SELDEN Y SELDEN, 1995; DE VILLIERS, 1998; BILLS Y TALL, 1998; PINTO Y TALL, 1999; ALCOCK Y WEBER, 2005; GAVILÁN ET AL, 2012; ALVARADO Y GONZÁLEZ, 2009; 2010; 2013a; 2013b; ALVARADO, 2015; GONZÁLEZ Y ALVARADO, 2015), la concepción del proceso de instrucción como de naturaleza esencialmente cultural y social (VOIGT, 1995; COBB, 1995; SCHWARZ, DREYFUS Y HERSHKOWITZ, 2009 ; DREYFUS; HERSHKOWITZ Y SCHWARZ, 2015).

A partir de la base y el respaldo, descrito en los párrafos anteriores, nos proponemos dar válidez a la siguiente proposición: El desarrollo de habilidades en los alumnos para el manejo de las definiciones, en un ambiente de construcción de conocimiento compartido, implica desarrollo de mayor flexibilidad y poder conceptual para comprender y construir demostraciones.

Para argumentar su validez nos planteamos el diseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica mencionada a lo largo de este artículo. A fin de documentar la formación, evolución y uso de la definición en relación con la demostración, además del respaldo presentado al inicio de este apartado de discusión, hemos incluido una cadena de evidencias que nos dan cuenta de la evolución en el desempeño de los alumnos. Se ha provocado la emergencia de las definiciones que han ido evolucionando hasta que los alumnos las han usado adecuadamente cuando han tenido que demostrar.

La importancia que tiene la definición como concepto y como proceso en la construcción de la demostración de una proposición (figura 1) se evidencia en los distintos momentos en los que se producen avances en cuanto a la noción de definición, su evolución y manejo como competencia desarrollada en los alumnos.

Figura 1. Evolución del manejo de definiciones



Fuente: Elaboración propia (2015)

Estudio exploratorio Momento 0. En un estudio exploratorio encontramos evidencia de dificultades que tienen los alumnos con el manejo de definiciones (ALVARADO Y GONZÁLEZ, 2009, 2010). Aún cuando pueden enunciar de memoria una definición, no la utilizan para deducir o extraer información de ella que les permita comprender su papel dentro del proceso de demostrar. Es decir, para dicha comprensión se requiere identificar en el enunciado de la proposición los elementos que intervienen y sus propiedades y, a partir de esa comprensión, poder iniciar el proceso deductivo.

Secuencia Didáctica Momento 1. En el primer bloque de la secuencia didáctica se da la oportunidad a los alumnos para deconstruir, en equipos, definiciones de conceptos conocidos y simples (número par, impar, primo, racional, triángulo isósceles, mediatriz, etc) y afinarlas para lograr definiciones matemáticas aceptables. En este proceso se hacen evidentes errores y malos entendidos en torno a ellas.

Secuencia Didáctica Momento 2. Al compartir y comparar producciones en gran grupo se generó una discusión en la que los equipos presentan sus argumentos y el profesor orquestó la actividad tratando de que fueran ellos mismos quienes depuraran sus definiciones, logrando que fueran más consistentes. Aunque en la mayoría de los casos los equipos produjeron definiciones correctas algunas fueron no económicas, el profesor ayudó en la transición hacia definiciones económicas demandando argumentos para justificar los elementos de la definición que se pueden excluir. Esta parte del proceso conduce hacia el pensamiento deductivo necesario para demostrar, dado que hay que establecer las relaciones entre los elementos que se han excluídos con otros elementos que forman parte del enunciado de la definición.

Secuencia Didáctica Momento 3. En los siguientes bloques de la secuencia (III y IV) observamos cómo los alumnos utilizan las definiciones para generar demostraciones. Para ello, como podemos observar en la tabla 5, primero se ayudó a los alumnos a centrarse en el enunciado de una proposición respondiendo a la pregunta ¿qué conceptos intervienen? A continuación se extrae el significado de las definiciones para construir las primeras deducciones lo que significa responder a la pregunta ¿qué significaría llegar a esta conclusión a partir del significado de los conceptos presentes en la misma? En esta parte, los alumnos comprendieron la necesidad de la definición para comunicarse en matemáticas y su papel para avanzar en una demostración.

Desde el estudio exploratorio hasta el final de la implementación creemos que el diseño ha permitido que se transite desde un manejo parcial de las definiciones, a establecer acuerdos para dar una definición aceptada por la comunidad de práctica que se pueda utilizar en una demostración. El estudiante participa en la construcción compartida del conocimiento y es capaz de ver la necesidad de una formulación precisa y, con ello, enfrentar y comprender el papel de la definición para realizar una demostración, percibiéndola como una forma de avance en una disciplina no acabada.

Conclusiones

El análisis de los datos, nos permite afirmar que al desarrollar en los estudiantes la habilidad para desenvolver analíticamente las definiciones de conceptos, cuando enfrentan una proposición para demostrar primero analizan los conceptos presentes en el enunciado y a partir de esto extraen significado y construyen deducciones (ver tabla 5). Para lo anterior, el uso de ejemplos y contraejemplos ha sido de gran importancia, en virtud de que ayuda a extraer características propias de los objetos y a construir espacios de ejemplos que apoyan al alumno al construir y comprender una definición.

La secuencia de enseñanza se diseñó bajo la idea de que la definición y la demostración deben considerarse objetos de estudio para evitar errores inducidos por el contexto cotidiano como referente principal. Esto contribuye también a que:

- Se ordenan y contextualizan los contenidos matemáticos de acuerdo a la situación cognitiva percibida. No importa el nivel de conocimiento previo, todos pueden abordar las tareas y a través de las interacciones avanzar para construir conocimiento.
- Se da un acercamiento informal al concepto, siendo los alumnos quienes construyen su definición a partir de las imágenes disponibles, antes de formalizar la teoría. También, son ellos quienes se aproximan a la demostración de un resultado a partir de ciclos de refinamiento de sus intuiciones e interpretaciones, extraídas de la discusión en equipos y luego extendidas en grupo con el profesor.
- Se ha podido realizar un análisis de la construcción, evolución y consolidación del conocimiento compartido de los estudiantes tanto en equipos como en grupo.
- Se ha roto con la clase tradicional expositiva, enfatizando el pensamiento del estudiante y visualizando un conocimiento construido activamente.

En este sentido, podemos afirmar que la propuesta es una alternativa para incorporar como objetos de estudio en la enseñanza universitaria la demostración y la definición matemática y ha sido un instrumento de investigación que ha permitido: localizar dificultades y errores que su aprendizaje conlleva; y vislumbrar estrategias para mejorar el acceso democrático de los alumnos a la tareas de definir y demostrar.

Hemos comprobado que se han producido modificaciones en el contrato didáctico así, desde la primera sesión, la participación de los alumnos ha sido muy activa. Participar en la construcción del conocimiento ha sido motivador e incluso después de las sesiones se mostraron interesandos en ampliar sus producciones. También manifiestaron responsabilidad y compromiso con las tareas; así escribieron los resultados convenidos en los equipos para después compartirlos. La secuencia llevó más tiempo del previsto, dada su amplitud y extensión. En relación a los procesos, el abordaje de las definiciones ha favorecido el desarrollo de competencias demostrativas en los estudiantes. Las definiciones establecidas por los alumnos, causaron sorpresa al profesor que implementó la secuencia, e incluso a otros lectores de los resultados. Esto nos conduce a discutir: si se plantearon conceptos que los alumnos conocen desde edad temprana *¿por qué siguen produciendo definiciones parciales?, ¿en qué momento de sus estudios se les ha enseñado a definir?* más aún, *¿en qué momento aprenden a distinguir, cuándo una definición se considera "buena"?* No hay momentos durante su formación escolar para trabajar la definición. En esta propuesta se dieron oportunidades a los alumnos para aprender a definir, produciendo un avance sustancial cuando abordaron la demostración. Al final se produjeron definiciones en una versión comunicable en la que se omiten los detalles y se priorizan los elementos principales. Así mismo, leer e interpretar una demostración realizada por otros les lleva a construir una versión detallada que los conduce por el proceso de razonamiento seguido por el autor y para ello deben deshacer analíticamente las definiciones para extraer la información relevante. Con ello logran una visión global del proceso de demostrar.

El modelo Abstracción en Contexto ha servido para documentar la emergencia y construcción de los conceptos tanto en equipos, como en grupo a partir de las acciones epistémicas. Los alumnos realizan *R-acciones* como reconocimiento de axiomas, errores, hipótesis, conclusiones, así como el papel que cumplen cada uno de estos elementos en la demostración y, además, son capaces de establecer conjeturas. Las *B-acciones* se caracterizan por la generación de ejemplos para avanzar en los procesos. Y en las *C-acciones* muestran cómo organizan las ideas para explicarlas y comunicarlas.

El profesor observó en el siguiente curso que los participantes de esta secuencia tenían cuidado en el manejo de ejemplos y contraejemplos, en la extracción de significado de las definiciones y en el uso de las técnicas y medios aquí trabajados. No obstante, para reportar aprendizaje significativo a largo plazo se requiere un seguimiento detallado.

Por último, nos hemos centrado en el pensamiento del estudiante, pero bien se puede analizar el pensamiento del profesor y estudiar las acciones que producen avances en el conocimiento. Sin embargo, es difícil separar las dos aproximaciones y es por eso que no hemos podido evitar fijarnos en las acciones del profesor.

Referencias

ALCOCK, L. Y WEBER, K. Referencial and syntactic approaches to proof: Case studies from a transition course. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Ed.), Proceedings of the 29 PME International Conference. 2 (pp 33-40). Melbourne Australia: PME. 2005.

ALVARADO, A. Y GONZÁLEZ, M. T. A study of university students’ performance with proof En Proceedings CIAEM 61. Quaderni di ricerca in didattica (Scienze Mathematiche) of G.R.I.M., Palermo 2-19, (pp 348-352). Montréal, Quebéc, Canadá. 2009.

ALVARADO, A. Y GONZÁLEZ, M. T. La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. Enseñanza de las Ciencias, 28(1), 73-84. 2010.

ALVARADO, A. Y GONZÁLEZ, M. T. Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16(1), 37-63. 2013a.

ALVARADO, A. Y GONZÁLEZ, M. T. Interactive Reconstruction of a definition. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (eds.) Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp 2276-2285). Antalya, Turquía. 2013b.

ALVARADO, A. Y GONZÁLEZ, M. T. El método de demostración directo aplicado a una situación extramatemática. En Investigaçao em Educaçáo Matemática. Raciocinío matemático. EIEM2013 (pp 405-419). Covilha, Portugal: Sociedade Portuguesa de Investigaçao em Educaçao Matemática. 2013c.

ALVARADO, A. Y GONZÁLEZ, M. T. Definir, buscar ejemplos, conjeturar… para probar si un número es feliz. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1(5), 5-24. 2014.

ALVARADO, A. El estatus de la demostración matemática en el aula: de una noción paramatemática al diseño de una ingeniería didáctica. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, España. 2015.

BILLS, L. Y TALL, D. Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. En Proceedings of PME 22th International Conference. 2, (pp. 104-111). Stellenbosch, South Africa: PME. 1998.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage. 1991

CHIN, E.-T. Y TALL, D. Making, having and compressing formal mathematical concepts. En Nakahara, y M. Koyamal (Ed.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2 (pp.177-184). 2000.

CHIN, E.-T. Y TALL, D. Proof as a Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking. En International Conference on Mathematics: Understanding Proving and

Proving to Understand (pp. 212-221). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University. 2002.

COBB, P. Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. En P. Cobb, H. Bauersfeld, P. Cobb, y H. Bauersfeld (Ed.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures (pp. 25-129). Hillsdale: Laurence Erlbaum. 1995.

DE VILLIERS, M. To teach definitions in geometry or to teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Ed.), Proceedings of the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2, (pp. 248-255). Stellenbosch, ZA: PME. 1998.

DREYFUS, T., HERSHKOWITZ, R. Y SCHWARZ, B. The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory. En Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education (pp. 185-217). New York London: Springer Netherlands. 2015.

EDWARDS, B. Y WARD, M. Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. The Mathematical Association of America Monthly, 111, 411-424. 2004.

GAVILÁN, J. M.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. Y ESCUDERO, I. El proceso de definir en matemáticas desde una perspectiva comognitiva. En Actas del XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 275-283). Jaén, España: SEIEM. 2012.

GONZALEZ, M. T. Y ALVARADO, A. Proof by reductio ad absurdum: an experience with university students. Proceedings of the Ninth Congress of European Research in Mathematics (72-78). CERME 9. Czech Republic, Praga. 2015.

HAREL, G. Y SOWDER, L. Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Ed.), Research in Collegiate Mathematics Education III (pp. 234-283). Providence: American Mathematical Society. 1998.

IBAÑES, M. Aspectos cognitivos de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid. 2001.

LAKATOS, I. Pruebas y refutaciones. Madrid: Alianza. 1978.

MEJIA-RAMOS, J. P.; FULLER, E.; WEBER, K.; RHOADS, K.; Y SAMKOFF, A. An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. Educational Studies in Mathematics, 79(1), 3- 18. 2012.

PEDEMONTE, B. Y BUCHBINDER, O. Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. ZDM Mathematics Education, 43, 257-267. 2011.

PINTO, M. Y TALL, D. Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. En O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd International Conference of PME. 4 (pp. 65-73). Haifa, Israel: PME. 1999.

SELDEN, A. Y SELDEN, J. Unpacking the logic of mathematical statements. Educational Studies in Mathematics, 29, 123-151. 1995.

SFARD, A. Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press. 2008.

SCHWARZ, B., DREYFUS, T. Y HERSHKOWITZ, R. The nested epistemic actions model for abstraction in context. En B. Schwarz, T. Dreyfus, R. Hershkowitz, B. Schwarz, T. Dreyfus, y R. Hershkowitz (Ed.), Transformation of Knowledge through Classroom Interaction (pp. 11-42). London, UK: Routledge. 2009.

TALL, D.; GRAY, E.; ALI, M. B.; CROWLEY, L.; DEMAROIS, P.; MCGOWEN, M.; Y YUSOF, Y. Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 1(1), 81-104. 2001.

THURSTON, W. On proof and progress in mathematics. Bulletin (New Series) of the AMS, 30 (2), 161 -177. 1994.

VINNER, S. The notion of proof some aspects of students' views at the senior high level. En R. Hershkowitz (Ed), Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education (pp. 289-294). Shoresh, Israel: 1983.

VOIGT, J. Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb, H. Bauersfeld (Ed.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures (pp. 163-201). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 1995

WATSON, A. Y MASON, J. Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Mahwah, NewJersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers. 2005.