ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p315-338

Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos

A theoretical model of Mathematics for Teaching of the concept of function from realizations in textbooks

GRAÇA LUZIA DOMINGUEZ SANTOS[1]
JONEI CERQUEIRA BARBOSA[2]

Resumo

Nesse estudo, construímos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de uma perspectiva discursiva. Utilizamos como fonte de dados para construção do modelo duas coleções de livros didáticos. O modelo está estruturado em categorias de realizações (panoramas) do conceito de função, que foram sistematizados empregando como parâmetro a convergência das regras de reconhecimento e realização. Os panoramas que compõem o modelo são: tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal. O modelo construído explicita as formas de reconhecer, selecionar e produzir textos legítimos dentro de cada panorama, designando suas potencialidades e limitações comunicativas, podendo, desse modo, servir como quadro analítico para pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de função.

Palavras-chave: *Matemática para o Ensino; Conceito de Função; Regras de Reconhecimento e Realização.*

Abstract

In this study, we build a theoretical model of mathematics for teaching of the concept of function from a discursive perspective. Two collections of textbooks were used as data source. The theoretical model is structured around the realizations of the concept of function identified in such textbooks categorized in which we call landscapes. By identifying recognition and realization rules, we were able to structure the landscapes. The following were found: tabular, diagram, algebraic, graphical, generalization of patterns and formal. The model explains how to recognize, select and produce legitimate texts within each landscape, as well as describing their communicative affordances and limitations. The result is expected to be used as framework for researches about teaching and learning function.

Keywords: *Mathematics for Teaching; Function Concept; Recognition and Realization Rules.*

[1] Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia. E-mail: gracadom@ufba.br
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho. Professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia. E-mail: jonei.cerqueira@ufba.br

Introdução

O conceito de função é um dos fundamentos da matemática contemporânea, permeando praticamente todos os campos desta disciplina (KLEINER, 1993), caracterizando-se como o instrumento essencial para descrever, explicar e prever a interação quantidade-qualidade de regularidades em fenômenos naturais ou sociais (MOURA, MORETTI, 2003).

Os documentos oficiais vigentes no Brasil refletem a importância deste conceito ao estabelecerem funções como um dos subtemas estruturadores do Ensino Médio (BRASIL, 2002) e sugerirem que o ensino da Álgebra, no Ensino Fundamental II, dos 60 ao 90 anos, deve apresentar uma abordagem funcional, com análise na variação de grandezas, utilizando a notação de letras como variáveis para expressar relações funcionais (BRASIL, 1998).

Dada à centralidade desse tema na matemática escolar, nas últimas décadas, o ensino e a aprendizagem de função têm sido amplamente pesquisados na área de Educação Matemática (TABACH; NACHLIELI, 2015).

No que diz respeito a formas de abordar o ensino de funções, as definições formais de função (como por exemplo, a fundamentada na teoria dos conjuntos3) são consideradas muito amplas e gerais (KLEINER, 1993). Estudos indicam que a natureza estrutural lógica dos seus textos ocasiona dificuldade no seu entendimento, pelo menos para uma abordagem inicial, de forma que é necessário reconsiderar o seu lugar no processo de ensino e aprendizagem (NACHIELI, TABACH, 2015; VIIRMAN, 2014), no decorrer da Educação Básica. À vista disso, pesquisadores têm sugerido descrições mais operacionais para o seu ensino (VIIRMAN, 2014), considerando que as bases conceituais do conceito de função devem ser acessíveis desde os anos inicias do Ensino Fundamental (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013), tal como comunicá-lo como uma relação de dependência por meio da análise de regularidades e padrões em sequências numéricas e geométricas (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; MAGGIO; NEHRING, 2012), mesmo antes que a palavra função tenha sido oficialmente introduzida no ensino. Outra sugestão, indicada por Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), é comunicar o conceito de função usando a metáfora de uma máquina que transforma cada input em um único *output*.

[3] "Uma função f é definida como qualquer conjunto de pares ordenados de elementos tais que se $(a,b) \in f, (c,d) \in f$ e $a = c$ então $b = d$." (EVEN, 1990, p. 531, tradução nossa)

Tais alternativas apontam para uma certa variabilidade e especificidade nas formas de comunicar o conceito de função no ensino. Nesse estudo, temos o propósito de caracterizar, mapear e organizar estruturalmente essa variabilidade. Esse objetivo nos vincula a um tema de pesquisa que vem se consolidando na área de Educação Matemática, sob as denominações de Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (Mathematical Knowledge for Teaching, tradução nossa) ou Matemática para o Ensino (MpE) (Mathematical for Teaching, tradução nossa), que se tornou parte do léxico de pesquisas que visam desenvolver entendimentos sobre o ensino de matemática (CHAPMAN, 2013), formação de professores e desenvolvimento profissional (BARWELL, 2013).

Na seção a seguir enunciamos precisamente o objetivo do presente estudo, para tanto expomos a perspectiva que propomos para uma MpE do Conceito de Função, bem como o entendimento de um modelo teórico. Visando a compreensão desses construtos, apresentamos o aporte teórico que os fundamentam.

Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função

As investigações sobre MKT ou MpE têm sido efetuadas a partir de diversos pontos de vista, fundamentados em epistemologias variadas, nem sempre explicitadas (BARWELL, 2013; RHOADS; WEBER, 2016).

Uma das visões mais proeminentes na literatura é a elaborada por Deborah Ball e colaboradores (por exemplo, Ball, Thames e Phelps (2008) (RHOADS; WEBER, 2016), que compreende MKT como um conhecimento específico requerido para o trabalho de ensinar matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Em decorrência da epistemologia construtivista que alicerça o enfoque conceitual desses pesquisadores, o MKT é codificado e descrito utilizando taxonomias de conhecimento (RHOADS; WEBER, 2016). Chapman (2013) destaca que, apesar dessa caracterização de MKT oferecer uma estrutura útil para investigar os conhecimentos dos professores demandados para o ensino de matemática, fixar-se exclusivamente nesse conjunto de conhecimentos propende a limitar a "[...] nossa compreensão do que acontece nas salas de aula de matemática [...]" (p. 238, tradução nossa).

Para Davis e Renert (2014) o "[...] conhecimento dos professores de matemática (*matemática-para-ensino*, ou M_4T, em resumo) [...] compreende uma complexa rede de entendimentos, disposições e competências" (p.3, ênfase dos autores, tradução nossa) emergentes, que está distribuída pelo corpo de professores, habilitando-os a estruturar situações de ensino e aprendizagem (DAVIS; RENERT, 2014). Em decorrência de tal perspectiva, esses pesquisadores optam por evadir-se de tentativas de rotular ou estabelecer medidas para caracterizar o conhecimento dos professores (DAVIS; RENERT, 2014).

Adler e Hulliet (2008) adotam a nomenclatura MpE e, por assumirem uma perspectiva epistemológica social, consideram que a categorização para MKT proposta por Ball, Thames e Phelps (2008), em particular a categoria Conhecimento Comum do Conteúdo (tradução livre de *Common Content Knowledge*), é de caráter geral, por não considerar as demandas contextuais, e desse modo, não captura o fato de que "[...] toda atividade matemática é direcionada para algum propósito, e ocorre no interior de alguma instituição (social)" (p. 22, tradução nossa).

As supracitadas perspectivas para MKT ou MpE apontam para o caráter singular da matemática veiculada e produzida no ensino. Nesse estudo, analisamos essa singularidade em termos discursivos, utilizando para tal fim, como aporte teórico, conceitos da Teoria dos Códigos de Basil Bernstein (2000, 2003). Para Bernstein (2000), os princípios reguladores da comunicação pedagógica são inerentes a essa prática e, por conseguinte, são fatos sociais. Consequentemente, a comunicação pedagógica matemática não pode ter origem em alguma lógica interna à Matemática Acadêmica (produzida por matemáticos), nem no fazer daqueles que a produzem. Fundamentados nesse quadro teórico, a variabilidade e especificidades das ações comunicativas (produtos discursivos) do conceito de função realizadas no contexto escolar constituem o próprio objeto de análise da presente investigação, ou seja, não atribuímos a tais ações comunicativas quaisquer categorias representacionais cognitivas. Por essa razão, optamos em utilizar a denominação MpE (do Conceito de Função).

Bernstein (2000, 2003) nomeia os princípios reguladores da comunicação de *classificação* e *enquadramento*, os quais são gerados, respectivamente, pelas relações de poder e controle que caracterizam determinada prática. O princípio de classificação cria, reproduz e legitima fronteiras, posicionando os sujeitos, espaços, discursos, etc., em diferentes categorias (BERNSTEIN, 2000). Com base no princípio classificatório, o enquadramento regula formas legítimas de comunicação para diferentes categorias de uma prática pedagógica[4], em termos do controle que uma determinada categoria dessa prática tem sobre a comunicação (BERNSTEN, 2000, 2003).

[4] Prática pedagógica diz respeito, por exemplo, às relações entre professores e alunos ou entre médico e paciente (BERNSTEIN, 2000).

O princípio de classificação gera marcadores de fronteira, denominados de *regras de reconhecimento*, que fornecem os meios necessários para distinção de “que” textos são legítimos para determinada categoria, estabelecendo assim, limites para o seu potencial comunicativo (BERNSTEIN, 2003). Um exemplo do princípio classificatório é a divisão do currículo escolar em disciplinas (Matemática, Física, Biologia e etc.), porquanto existem fronteiras que as delimitam, no que diz respeito aos textos que constituem cada uma delas. Consoante com a teoria, compreendemos por texto qualquer ato comunicativo expresso por alguém, incluindo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais (BERNSTEIN, 2003). O grau de isolamento do princípio de classificação pode variar entre as classificações mais forte (C+) e mais fraca (C-)[5] (BERNSTEIN, 2000, 2003), no qual, quando há C+, as categorias estão separadas por fortes limites, apresentando textos mais especializados. Já no caso C-, o isolamento entre as categorias é reduzido, tornando-as menos especializadas (BERNSTEIN, 2000, 2003).

A regulação de formas legítimas de comunicação para diferentes categorias oriundas do princípio de enquadramento é estabelecida por intermédio das *regras de realização*, as quais instituem o que conta “como” comunicação legítima e, consequentemente à forma dos textos (BERNSTEIN, 2000, 2003). O enquadramento também pode variar entre valores mais forte (E+) e mais fraco (E-)[6]. O enquadramento apresenta valor mais forte (E+) quando a categoria com maior estatuto tem maior controle sobre a comunicação na prática pedagógica e, há E-, quando as categorias com menor estatuto também têm algum controle sobre essa comunicação (BERNSTEIN, 2003). Por exemplo, E+ na relação professor-alunos implica que o professor (categoria com maior estatuto) tem mais controle sobre as regras comunicativas, já no caso E-, os alunos também têm algum controle sobre essas regras.

Apropriamo-nos dos conceitos de regras de reconhecimento e realização e, consequentemente, dos princípios de classificação e enquadramento, para analisar, categorizar e caracterizar a variabilidade e especificidades de formações textuais sobre o conceito de função, veiculadas e produzidas nos contextos de ensino, onde ocorrem as relações pedagógicas. Com essa perspectiva teórica, pretendemos apresentar uma

---

[5] Bernstein (2000, 2003) refere-se ao princípio de classificação como forte e fraco. Optamos por usar o advérbio *mais*, porque pretendemos ressaltar a flutuação desse valor.

[6] Bernstein (2000, 2003) atribui ao princípio de enquadramento os graus forte e fraco. Também nesse caso, optamos por utilizar o advérbio *mais*, porquanto pretendemos ressaltar a flutuação desse valor.

perspectiva de MpE do Conceito de Função em termos discursivos, demarcando as suas fronteiras e possibilidades comunicativas.

Entendemos um conceito matemático como um conjunto formado pelas *realizações* (tradução livre de *realizations* (DAVIS; RENERT, 2014)) – textos – que podem ser associadas à palavra que o nomeia. Por exemplo, o *conceito de função* é constituído pelo conjunto de realizações que podem ser associadas à palavra função. São reconhecidas como realizações: definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, algoritmos, gestos, desenhos ou objetos concretos (DAVIS; RENERT, 2014). Ressaltamos que, em decorrência desse ponto de vista, os conceitos existem apenas como atributos de suas realizações, ou seja, são nas realizações e pelas realizações que os conceitos são constituídos, não havendo, dessa forma, conceito fora do âmbito textual, estranho às próprias realizações.

Considerando tais pressupostos, conceptualizamos *Matemática no Ensino* (*MnE*) *do Conceito de Função* como a categoria constituída do conjunto de textos sobre o conceito de função, comunicados com propósito de ensino no contexto escolar, de acordo com a regulação operada (classificação e enquadramento) nesse contexto. Portanto, a MnE do Conceito de Função realiza-se na própria dinâmica da prática pedagógica no contexto escolar.

Sob esse prisma, conceptualizamos a *Matemática para o Ensino do Conceito de Função* como uma *re-presentação* da Matemática *no* Ensino do Conceito de Função. Assim, a simulação de uma aula sobre o conceito de função em um curso de formação ou um autor de livro didático apresentando o conceito de função em sua obra, são exemplos de MpE(s) do Conceito de Função, pois são *outras apresentações* das formas de realização do conceito de função no ensino. Por esse motivo, utilizamos a palavra *re-presentação*, separando o prefixo com um hífen, para ressaltar que estamos referindo-nos a outra apresentação das formas de realização do conceito de função no ensino.

Focalizamos nessa investigação uma MpE do Conceito de Função como um conjunto estruturado e sistematizado, identificando descritivamente as categorias de realizações e propriedades do fenômeno MnE do Conceito de Função. Nesse caso, MpE do Conceito de Função pode ser caracterizada como um *modelo teórico*, porquanto apresenta os atributos de um modelo teórico, isto é, um conjunto formalizado e coerente de proposições que descreve e possibilita a compreensão do fenômeno reconhecido como MnE do Conceito de Função.

As categorias de realizações que estruturam o modelo, denominadas de *panoramas* (*landscapes* (DAVIS; RENERT, 2014), tradução nossa), são organizadas considerando as instâncias estáveis identificáveis de classificação e enquadramento, por intermédio da convergência das regras de realização e reconhecimento.

Em virtude das perspectivas de MnE e MpE formuladas nesse estudo, podemos considerar como referentes de investigação (fonte de dados) para construção do modelo teórico, por exemplo, observação de salas de aula quando o ensino do conceito de função está sendo realizado, livros didáticos ou documentos oficiais. Neste estudo, adotamos como fonte de dados livros didáticos, tendo em vista que estes são uma referência para a prática pedagógica do contexto escolar. De fato, o livro didático é uma das principais fontes de orientação dos professores nas tarefas do fazer escolar, sendo utilizado como suporte e apoio tanto para a seleção do conteúdo a ser ensinado, o seu sequenciamento e a sua forma, quanto para a organização das atividades de aprendizagem e de avaliação (BIEHL, BAYER, 2009; PERRELLI; LIMA; BELMAR, 2013; SHIELD; DOLE, 2013). Em termos bernsteinianos, o livro didático é resultado dos textos que foram movidos dos campos de produção (Matemática Acadêmica e Educação Matemática) e dos documentos oficiais produzidos pelos órgãos normatizadores da educação, e transformados em textos com o propósito de ensino e aprendizagem. De fato, o livro didático é uma ferramenta de ensino legitimada pelo sistema educacional brasileiro (GRANVILLE, 2008), tendo o discurso tanto dos órgãos oficiais responsáveis pela educação, quanto dos agentes dos campos de produção manifestado em seus textos, por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[7].

Por conseguinte, temos por objetivo, na pesquisa que relatamos aqui, apresentar um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir da identificação de realizações em livros didáticos da Educação Básica[8].

No campo científico, espera-se que a estrutura teórica e metodológica utilizada para construção do modelo teórico de MpE do Conceito de Função possa ser utilizada para subsidiar análises sobre ensino e aprendizagem de função. Almejamos também, que o modelo apresentado possa fornecer, para a comunidade de professores, formadores de professores e autores de materiais didáticos que atuam nos diversos âmbitos de ensino,

[7] Informações sobre o PNLD disponíveis em <www.portal.mec.gov.br/pnld >. Acesso em 21 ago. 2016.

[8] Ressaltamos que não faremos uma análise dos livros didáticos, estes serão utilizados apenas como fontes de dados para construção do modelo teórico.

uma visão comunicacional multifacetada de aspectos do conceito de função que permeiam o seu ensino no contexto escolar.

Procedimentos metodológicos

Para selecionar os livros de matemática do Ensino Fundamental nos anos finais e do Ensino Médio que compuseram a investigação, recorremos inicialmente aos guias dos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dos anos 2014, para os anos finais do Ensino Fundamental, e 2015, para o Ensino Médio. O PNLD ocorre a cada três anos para cada nível de ensino, avaliando, selecionando e recomendando coleções de livros didáticos, de acordo com critérios previamente estabelecidos, gerais e específicos por área, cujos resultados são divulgados no Guia Nacional do Livro Didático (GNLD). Por intermédio do GLND, os professores tomam conhecimento das coleções selecionadas, e assim efetivam a escolha da coleção que será utilizada na escola, no triênio subsequente à publicação do Guia.

Fizemos uma leitura minuciosa das resenhas das obras recomendadas nos GLNDs 2014 (BRASIL, 2013) e 2015 (BRASIL, 2014), analisando, sobretudo, quais coleções apresentavam textos mais claros e simples, mais atividades contextualizadas, diversidade e quantidade de exercícios, e boas ilustrações. Segundo algumas pesquisas, esses são os critérios que os professores preponderantemente utilizam na escolha dos livros didáticos de Matemática constantes dos GLNDs (PERRELLI; LIMA; BELMAR, 2013; TRINDADE; SANTOS, 2012; VIEIRA, 2013). Com base nessa análise, construímos uma tabela para cada nível de ensino com os critérios citados, pontuando positivamente, com base na análise dos GLDNs, as coleções mais bem avaliadas nesses itens. Por fim, selecionamos as coleções *Matemática*, dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, dos 6º ao 9º anos (IMENES; LELLIS, 2010a, 2010b, 2010c, 2010 d), e *Matemática*, de autoria de Manoel Paiva, do Ensino Médio (PAIVA, 2013a, 2013b, 2013c). Optamos por analisar somente duas coleções, tendo em vista que a utilização de um número maior de coleções implicaria em um volume de dados muito grande, o que poderia inviabilizar uma análise mais refinada. Ademais, julgamos que os critérios empregados para escolha das coleções tornam-nas representativas o suficiente, para cumprir o propósito da investigação que ora estamos relatando.

Pode-se levantar o argumento de que o fato do presente estudo restringir-se à análise de livros didáticos limita a construção do modelo teórico a que nos propusemos. Entretanto, pelas razões apresentadas acima, os livros didáticos selecionados dão conta de uma diversidade de realizações legítimas do conceito de função, portanto atendendo ao que se espera de um modelo teórico, a saber a sua potencialidade descritiva.

As coleções foram lidas integralmente e, à medida que identificamos realizações que considerávamos associáveis à palavra função, codificamo-las. Para categorizar e analisar as realizações e, assim, construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, além de conceitos da teoria de Basil Bernstein (2000, 2003), apropriamo-nos da estrutura do Estudo do Conceito (EC) (tradução livre de *Concept Study*), proposta por Davis e Renert (2013, 2014), transformando-a em uma ferramenta analítica. Originalmente, o EC é uma estratégia colaborativa que visa propiciar a evolução do conhecimento dos professores, mediante a análise e elaboração de formas de comunicar um conceito matemático no seu ensino (DAVIS; RENERT, 2013, 2014). A partir de 2009, o EC tem sido organizado sistematicamente em torno de quatro ênfases: *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends* (DAVIS; RENERT, 2013, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas, vinculações e combinações, respectivamente.

O entendimento de realizações é o mesmo que consideramos precedentemente. Nos EC(s) organizados por Davis e Renert (2013, 2014), os panoramas são agrupamentos de realizações que apresentam características semelhantes, de acordo com critérios acordados entre os participantes do estudo[9]. Como mencionamos anteriormente, adotamos como critério para categorização das realizações identificadas nos livros didáticos em panoramas, a convergência das regras de reconhecimento e realização. Davis e Renert (2014) definem vinculações como implicações lógicas das realizações componentes de cada panorama, que acarretam em conexões, potencialidades e limitações das suas relações conceituais. Norteados por nossa perspectiva teórica, na composição das vinculações reportamo-nos às potencialidades e limitações *comunicativas* instauradas pelas realizações constituintes de cada panorama, que estabelecem uma rede de similaridades e dessemelhanças a respeito de noções e especificidades, em grande parte subjacente, do conceito de função. Combinações, para Davis e Renert (2014), são fusões de realizações que geram construtos (meta-realizações) com novas e mais abrangentes possibilidades interpretativas. A ênfase combinação não foi identificada no presente estudo.

[9] Como por exemplo, por nível de ensino (DAVIS; RENERT, 2014).

Os panoramas e suas vinculações

Nessa seção apresentamos os panoramas e suas vinculações. As realizações associáveis à palavra função identificadas nas coleções analisadas, que apresentam características semelhantes no que concernem às regras de realização e reconhecimento, foram organizadas nos seguintes panoramas: tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal.

Panorama tabular

Constituem esse panorama as realizações de função como tabelas, que apresentam os dados de entrada e saída de uma relação funcional, dispostos em linhas ou colunas.

Na Parte A do Quadro 1, a tabela apresenta o resultado de um concurso para escolher a banda da cidade de Jucálopis que receberá o prêmio oferecido por uma revista local. O reconhecimento da referida tabela como a realização de uma função, mesmo sem uma menção explícita à palavra função, como é o caso, decorre da constatação que a cada banda da cidade corresponderá um único número de votos. Observe que se uma banda não obtiver nenhum voto, a ela será associada o número zero. Portanto, o reconhecimento de uma tabela como a realização de uma função está baseado em seu caráter univalente, isto é, a cada elemento do conjunto de entrada (das variáveis independentes) está associado a um único elemento do conjunto de saída (das variáveis dependentes).

Quadro 1 - Realizações de função como tabela

Parte A

Jucápolis	
Banda	Votos
Fala Grosso	730
Abóbora com Leite	682
Admirável Pé	611
Lamabamba	507

Fonte: Imenes e Lellis (2010ª)

Parte B

Nas feiras ou supermercados, o maço de couve é vendido por unidade. Pense nessas variáveis n, número de maços de couve; *P*, preço de *n* maços. Temos aqui uma função, pois P depende de n. A variação de *P* em função de *n* pode ser mostrada na tabela.

n(número de maços)	1	2	3	...
P (preço em R$)	2	5,00	7,50	...

Fonte: Imenes e Lellis (2010d, p. 207)

Parte C

x	*y*
-2	**-4**
0	**0**
2	**4**

Fonte: autores

A Parte B do Quadro 1, exibe a realização tabular que descreve a variação de *P* (preço de *n* maços de couve) em função de *n* (número de maços), considerando que um maço custa R$ 2,50. Para realização da tabela é necessário identificar as variáveis independente e dependente da relação funcional, *n* e *P*, respectivamente, e desse modo determinar *P* (que é único) para cada *n*. Assim, as realizações tabulares de função tanto possibilitam a identificação das variáveis independentes e dependentes, como também permitem que se integre a rede de entendimentos do conceito de função às noções de relação entre variáveis e de variação.

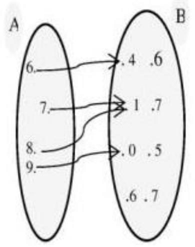
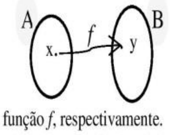
As realizações de função como tabelas podem ser empregadas para identificação de tipos específicos de funções, tais como a proporcionalidade direta e inversa (STEELE; HILLEN, SMITH, 2013), que posteriormente podem ser identificadas, respectivamente, como as relações funcionais linear e recíproca. Na realização tabular da Parte B do Quadro 1, as variáveis *n* e *P* são diretamente proporcionais, tendo em vista que se multiplicarmos *n* por um número real k, o preço *P* também fica multiplicado por k.

Vale ressaltar que a utilização exclusivamente da realização de função como tabela, pode não ser suficiente para identificação do tipo de relação funcional. Por exemplo, na realização tabular de uma relação funcional, apresentada na Parte C do Quadro 1, pode tratar-se de uma proporcionalidade direta entre *x* e *y* ($y = 2x$), no entanto os dados podem corresponder também à relação funcional $y = x^2$, a qual não é uma proporcionalidade direta, nem inversa, entre *x* e *y*. Tal limitação, nesse caso, é decorrência de, na realização tabular, termos informações apenas sobre um pequeno número de dados.

Panorama diagrama

As realizações de funções como diagramas de setas visibilizam o reconhecimento de uma relação funcional como uma correspondência univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. As referidas realizações estão usualmente restritas as relações funcionais em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser organizados em diagramas. A Parte A do Quadro 2 apresenta a realização de uma relação funcional como um diagrama de setas.

Quadro 2 - Realização do conceito de função como diagramas de setas

Parte A	**Parte B**
	Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se **função** de A em B toda correspondência *f* que associa cada elemento de A a um único elemento de B.  - Os conjuntos A e B são o domínio e contradomínio da função *f*, respectivamente. - Indica-se que f é uma função de domínio A e contradomínio B, por meio do símbolo $f : A \rightarrow B$. - Cada elemento y de B associado, através de f, a um elemento x de A é chamado de imagem de x. Esse fato é indicado por y = *f*(x) (lê-se "y é igual a *f* de x" ou "y é imagem de x através de *f*"). - O subconjunto de B, formado por todos os elementos que são imagens através de *f*, é chamado de conjunto imagem de *f*.
Fonte: Paiva (2013a, p. 119)	Fonte: Paiva (2013a, p. 120)

Na Parte B do Quadro 2, Paiva (2013a) utiliza a realização de função como diagrama de setas para tornar patente uma definição de função. Para relações funcionais cujo domínio e o contradomínio são conjuntos finitos e com um número reduzido de elementos, torna-se exequível o reconhecimento de correspondências entre conjuntos que são ou não relações funcionais, bem como a realização por diagramas dos exemplos de relações funcionais.

Como podemos observar Parte B do Quadro 2, com base nessas realizações pode-se introduzir a identificação dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma relação funcional, bem como, das suas respectivas notações, estabelecendo-se gradualmente textos com uma certa sintaxe matemática desse tema.

Paiva (2013a) apresenta a definição de uma relação funcional invertível, e da inversa de uma relação funcional, por intermédio das realizações de função como diagramas. O seu caráter icônico dá suporte à identificação da correspondência biunívoca entre dois conjuntos não vazios. Isso possibilita o reconhecimento de relações funcionais invertíveis, que é realizado pela afirmação "[...] uma função $f: A \to B$ é invertível se, e somente se, f é uma correspondência biunívoca entre A e B" (PAIVA, 2013a, p. 144). Assim, a relação funcional da Parte A do Quadro 1 não é invertível, tendo em vista que é não é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

Panorama algébrico

Compõem esse panorama as realizações de funções (cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais) que associam uma variável, chamada dependente, a uma outra variável, denominada de independente, por uma fórmula, equação ou lei algébrica. Quando a variável independente é denotada por x e a dependente por y, a realização de uma função como expressão algébrica é usualmente reconhecida e realizada pelo texto $y = f(x)$.

Nas coleções analisadas, mesmo quando o tema função ainda não tinha sido explicitamente abordado, as realizações desse panorama estão presentes na realização de fórmulas para situações (funcionais) do cotidiano, como a descrita na Parte A do Quadro 3, sobre o valor a pagar em um estacionamento, ou em leis que descrevem fenômenos físicos, conforme o exemplo da Parte B também do Quadro 3, ambos extraídos do livro do 8º ano (IMENES; LELLIS, 2010c).

Os autores Imenes e Lellis (2010b), em uma observação para o professor, destacam que exemplos de tal natureza viabilizam o início da construção do conceito de função. De fato, por intermédio das realizações algébricas das relações funcionais que modelam esses fenômenos é possível explorar o reconhecimento da relação de dependência entre variáveis, como constituinte da estrutura comunicacional do conceito de função. Considerando que, por exemplo, na situação descrita na Parte A do Quadro 3 – a quantia a pagar depende do número de horas que o carro permanece no estacionamento; e na Parte B o tempo gasto no movimento de ida e volta depende do comprimento do pêndulo.

Quadro 3 – Panorama algébrico

<table>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>Veja a tabela de preços de um estacionamento:
<table>
<tr><th>Tempo</th><th>Preço em reais</th></tr>
<tr><td>1ª hora</td><td>6,00</td></tr>
<tr><td>Horas seguintes</td><td>3,00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fração de hora é cobrada como hora inteira</td></tr>
</table>
a) Quanto tempo deverá pagar o motorista que deixar seu carro estacionado por 3 h e 20 min? (R$ 15,00)
b) Deduza a fórmula que fornece a quantia a pagar Q para um carro que ficou estacionando por **n** horas, n $\geq$ 1. ($Q = 6 + (n-1).3 = 3 + 3n$)</td>
<td>Há uma fórmula que se aplica ao movimento de um pêndulo e, para entendê-la, é preciso conhecer a raiz quadrada. A fórmula que permite calcular quanto tempo um pêndulo gasta aproximadamente em um movimento de ida e volta, é: $t = 2\sqrt{l}$.
Com *t* (tempo) em segundos e *l* (comprimento do pêndulo) em metro.</td></tr>
<tr><td>Fonte: Imenes e Lellis (2010c, p. 191)</td><td>Fonte: Imenes e Lellis (2010c, p.161)</td></tr>
</table>

As realizações de função como expressão algébrica descrevem como é o padrão da relação funcional, viabilizando mais facilmente, em virtude da sua forma compacta, o reconhecimento do tipo (linear, afim, quadrática, etc.) de relação funcional em questão. De modo que, quando o tópico função é abordado explicitamente no ensino, as realizações de funções como expressão algébrica podem ser usadas para definir classes de relações funcionais. Por exemplo, Paiva (2014a) define uma função exponencial do seguinte modo: “Chama-se **função exponencial** toda função $f: R \to R_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, com $a \in R_+^*$ e $a \neq 1$" (p. 215, realce do autor).

As realizações algébricas, também em virtude da especificidade e compacidade dos seus textos, possibilitam a execução de operações, tais como somar, subtrair, multiplicar, dividir e compor funções (quando possível) e, também determinar a realização algébrica da inversa de uma relação funcional invertível (EVEN, 1990).

No entanto, apesar das potencialidades das realizações desse panorama, a sua ênfase no ensino pode acarretar a subordinação do conceito de função à realização algébrica (EVEN, 1990; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013), ou seja, o não reconhecimento do caráter arbitrário de uma relação funcional, tanto no que diz respeito à natureza da relação entre às variáveis, que não precisa ser descrita por uma fórmula (como na parte A do

Quadro 2), quanto aos conjuntos (domínio e contradomínio) que não têm que ser numéricos (como podemos observar no exemplo da Parte A do Quadro 1).

Panorama gráfico

Esse panorama é constituído das realizações gráficas (gráficos) de uma relação funcional, na qual os conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais (*R*). A realização gráfica de uma relação funcional *f* dessa natureza é o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano cartesiano ($R \times R$), em que *x* pertence ao domínio da função *f* e *y* é a imagem de *x* por *f*, ou seja, $y = f(x)$.

O reconhecimento de um subconjunto do plano cartesiano como sendo uma realização gráfica de uma relação funcional é baseado no caráter univalente do conceito de função, descrito pelo denominado teste da linha vertical. Esse teste consiste em traçar retas paralelas ao eixo O*y* (variáveis dependentes), passando por pontos de abscissa *x* (variável independente), com *x* um elemento do domínio de *f*, de forma que o subconjunto em análise é o gráfico de uma relação funcional como esse domínio se, e somente se, cada uma dessas retas intersecta o subconjunto em um único ponto (PAIVA, 2014a).

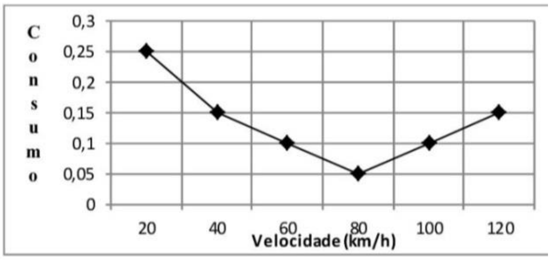
Nas coleções sob análise, os primeiros gráficos introduzidos no ensino são os gráficos de segmentos ou de linha, como na Parte A do Quadro 4, utilizados no tratamento de informações, antes de uma abordagem explícita ao tema função. Os dados da realização tabular foram plotados no sistema cartesiano, obtendo um gráfico de linha, o qual possibilita a constatação de que o automóvel consome mais combustível em velocidades mais altas ou mais baixas. Para os autores, os gráficos de linha "[...] são adequados para visualizar a **variação** de uma grandeza que depende de outra." (IMENES; LELLIS, 2010b, p. 187, ênfase dos autores). Inferimos que tal abordagem pode propiciar posteriormente a integração das noções de variação e dependência como constituintes da rede de possibilidades interpretativas do conceito de função.

Quadro 4 – Realizações gráficas

Parte A

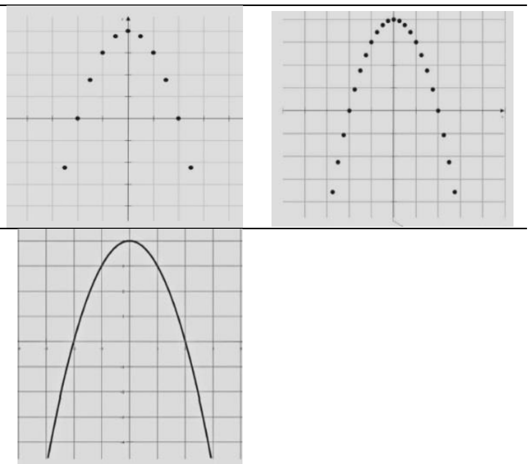
A tabela apresenta a relação entre o consumo de combustível de um automóvel e sua velocidade, fornecido por um fabricante.

Velocidade (km/h)	20	40	60	80	100	120
Consumo de combustível (l/km)	0,25	0,15	0,10	0,05	0,10	0,15



Fonte: Imenes e Lellis (2010b, p. 187-188)

Parte B



Fonte: Imenes e Lellis (2010d, p. 214)

Quando o tema função é apresentado explicitamente, no livro do nono ano na coleção analisada (IMENES; LELLIS, 2010d), o processo de transição de um conjunto finito de pontos no plano, como os utilizados na construção dos gráficos de linha, para realização gráfica de uma relação funcional cujo domínio é conjunto dos números reais, um intervalo ou reunião de intervalos do conjunto dos números reais, é feita de forma "informal" a partir de um conjunto finito de pontos $(x, f(x))$, tomando-se mais e mais pontos para uma relação funcional *f* cuja realização algébrica é dada (IMENES; LELLIS, 2010d). Os autores ressaltam que nesses casos os pontos não são ligados por segmentos de reta[10], pois existe uma curva que passa por esses pontos. Imenes e Lellis (2010d) justificam essa abordagem, afirmando que a demonstração formal desse fato não é acessível a esse nível de ensino. Na Parte B do Quadro 4, reportamos como os autores apresentam essa estratégia para a relação funcional realizada algebricamente por $f(x) = -x^2+4$.

A abordagem adotada legitima não apenas as realizações de função como gráfico no contexto escolar do Ensino Básico, como também a forma de realizá-las: "fórmula → tabela → marcar pontos → unir pontos" (IMENES; LELLIS, 2010d, p. 214).

Conforme os tipos de relações funcionais abordadas no Ensino Básico vão sendo inseridos, com o reconhecimento e a realização de *pontes* entre as suas realizações algébrica e gráfica, a produção das realizações gráficas seguem rotinas de acordo com o tipo da relação funcional. Por exemplo, se *f* é uma função polinomial do 1º grau $(f(x) = ax + b, a \neq 0, x \in R)$, então a sua realização gráfica é uma reta, logo para realizá-la é suficiente considerar dois pontos da forma $(x, f(x))$ (PAIVA, 2014a).

[10] Como nos gráficos de linha (parte A do Quadro 4).

As realizações gráficas tornam visíveis inúmeras informações sobre uma relação funcional, tais como, imagem, sinal, injetividade, intervalos de crescimento e decrescimento, zero(s) e extremos, caso existam.

Apesar das potencialidades operacionais e interpretativas das realizações desse panorama, estudos ponderam que o seu predomínio no ensino, sobretudo com o foco em relações funcionais contínuas, pode acarretar dificuldades em reconhecer como relações funcionais aquelas cujas realizações gráficas não são facilmente realizáveis, ou ainda, de relações funcionais que não podem ser realizadas graficamente, tal como a relação funcional real de variável real (função de Dirichlet), que associa a zero (0) todo número racional e um (1) a todo número irracional (KLEINER, 1993; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

Panorama da generalização de padrões

Compõem esse panorama as realizações que comunicam o conceito de função como um texto que descreve uma regra (funcional) para determinar o valor de um elemento de uma posição arbitrária em uma sequência, com base no conhecimento dos seus elementos iniciais (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). A construção e a validação dessa regra não são baseadas em uma inferência formal, ou seja, não são fundamentadas na realização de uma prova (demonstração), trata-se de processo indutivo "informal" que é legitimado como uma forma de argumentação no contexto da Escola Básica.

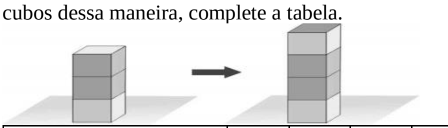
Nas coleções analisadas, as realizações desse panorama já estão presentes nos anos iniciais do Ensino Fundamental II, no reconhecimento e realização de generalização de padrões de sequências numéricas e/ou geométricas. Na Parte A do Quadro 5, reportamos um exemplo de uma sequência geométrica, em que os dados de entrada (número de cubos) e saída (número de faces visíveis) dos primeiros elementos da sequência, são organizados em uma realização tabular (item a), e depois generalizados pela afirmação constante do item b. Trata-se de um texto de cunho geral (generalização) que explicita a relação de dependência funcional entre o número de faces visíveis e o número de cubos, por intermédio de uma regra, que opera como uma "autorização" para determinar o número de faces visíveis para qualquer número de cubos.

No que concerne ao exemplo (Parte a – Quadro 5), Imenes e Lellis (2010a) sugerem ao professor a introdução de "[...] frases como: "O número de faces visíveis **depende** do número de cubos"; "Variando o número de cubos, **varia** o número de faces visíveis"; "O número de faces visíveis **é função** do número de cubos”” (p. 255, aspas e negrito no original), por considerarem que esses textos concorrem para formação do conceito de função. Atesta-se, dessa forma, o potencial dessas realizações como portadoras do reconhecimento das noções de variação e relação de dependência como constituintes da ampla teia de interpretações do conceito de função.

Quadro 5 - Generalização de padrões

Parte A

a) Imaginando que o garoto prossiga empilhando cubos dessa maneira, complete a tabela.



N^0 de cubos	3	4	7	13
N^0 de faces visíveis	13	17	29	53

b) Comple a conclusão: O número de faces visíveis é igual ao número de cubos multiplicado por_4_ e somado a _1_.

Fonte: Imenes e Lellis (2010a, p. 255)

Parte B

Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante.

Raciocinando como no exemplo anterior, vamos calcular o montante M, no fim de cada unidade de tempo, da aplicação de um capital C a juro composto, à taxa *i* por unidade de tempo.

Unidades de tempo	Capital	Juro	Montante
1	C	iC	$C+iC=C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$iC(1+i)$	$C(1+i)+iC(1+i)=C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$iC(1+i)^2$	$C(1+i)^2+iC(1+i)^2=C(1+i)^3$
4	$C(1+i)^3$	$iC(1+i)^3$	$C(1+i)^3+iC(1+i)^3=C(1+i)^4$
. .			

A última coluna da tabela possibilita concluir que, em cada unidade de tempo t, o montante M é dado por: $M=C(1+i)^t$

Fonte: Paiva (2014a, p. 56)

As realizações desse panorama podem ser empregadas para justificar e legitimar fórmulas no contexto da Escola Básica. A Parte B do Quadro 5, apresenta o processo indutivo (inferência não formal) de como, a partir dos primeiros elementos da sequência, “infere-se” a fórmula (realização algébrica, $M=C(1+i)^t$) que possibilita o cálculo do montante *M*, de um capital *C* (dado) aplicado a juros compostos à taxa *i* (fixa) por unidade de tempo *t*, também dada, em função do tempo *t*.

A despeito dos recursos facultados pelas realizações desse panorama, investigações identificaram a prevalência da escolha do modelo linear ou afim para gerar generalizações, mesmo que esse não seja o modelo da situação em análise (CALLEJO; ZAPATERA, 2014; REZENDE, 2011).

Panorama formal

O panorama formal é constituído das realizações de função como uma definição formal, tal como em Paiva (2014a)

> Dizemos que uma variável y é dada em função da variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y. A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de lei de associação, ou

> simplesmente lei entre x e y. Quando possível essa lei é expressa por uma equação (p. 117, ênfase do autor).

As caraterísticas de univalência e arbitrariedade são explicitadas nessas realizações. Considerando a citação anterior de Paiva (2014a), a univalência está expressa no trecho – “[...] a cada valor de *x* corresponde um único valor de *y* [...]” (p. 117), e o caráter arbitrário – na medida em que não são especificados os conjuntos aos quais as variáveis x e y pertencem, e também o tipo de associação entre as variáveis *x* e *y*. Essas características, como evidenciamos na análise de alguns panoramas anteriormente, estão presentes, ainda que não explicitamente, nas realizações consideradas como associáveis a palavra função, propiciando reconhecimento, a seleção e a produção de realizações legítimas do conceito de função.

A estrutura e a natureza precisa e concisa das realizações do presente panorama apresentam grande similitude com textos da Matemática Acadêmica que definem função, tendo em vista que, nesse contexto, conforme Tabach e Nachlieli (2015), as definições encerram condições necessárias e suficientes para fundamentar o reconhecimento de que uma palavra se aplica a certos exemplos. Entretanto, estudos têm demonstrado que mesmo os alunos que conseguem realizar as definições formais (reproduzir seus textos), podem não utilizá-las para identificar exemplos de relações funcionais (TABACH; NACHIELI, 2015). Em uma investigação empreendida por Tabach e Nachlieli (2015), essas limitações estavam relacionadas com a estrutura lógica dessas realizações, principalmente no que diz respeito à utilização dos quantificadores.

Síntese do modelo teórico

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído nesse estudo foi estruturado em categorias de realizações (panoramas) utilizando como parâmetro a convergência das regras de reconhecimento e realização. As regras de reconhecimento são os marcadores de fronteiras, que fornecem critérios para o reconhecimento dos panoramas pela especificidade dos seus textos, na sua variedade de apresentações. Elas regulam “o que vai com que”, ou seja, “que” textos podem ser legitimamente reunidos (BERNSTEIN, 2000) em cada panorama. As regras de realização regulam o que conta como comunicação legítima (BERNSTEIN, 2003) em cada panorama. Sendo assim, são necessárias para a seleção e produção de textos legítimos, considerando que regulam “como” o texto pode ser dito (BERNSTEIN, 2003) em cada panorama.

No Quadro 6, sintetizamos o "que" (regras de reconhecimento), o "como" (regras de realização) das realizações constituintes de cada um dos panoramas e as vinculações instauradas pelas suas realizações, que foram analisadas e especificadas na seção anterior. Como podemos constatar na síntese apresentada no Quadro 6, cada panorama é caracterizado por uma sintaxe específica, revelada nas regras de reconhecimento e realização, que evidenciam facetas comunicacionais e interpretativas singulares do conceito de função, proporcionando uma rede de possibilidades de comunicação, que são estabelecidas por parâmetros próprios de legitimação.

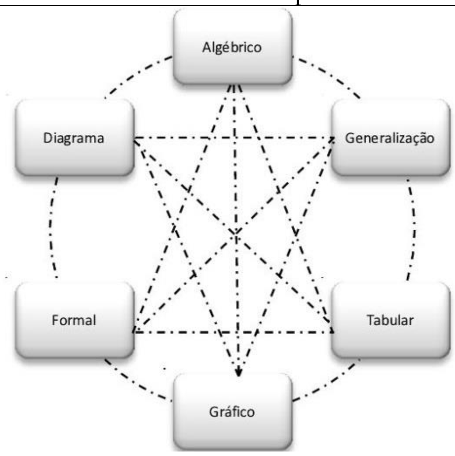
Quadro 6 – Síntese do modelo

Panorama	"que" (regras de reconhecimento)	"como" (regras de realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados por intermédio de uma tabela, desde que a cada dado de entrada esteja relacionado a um único dado de saída.	Dispor os dados de entrada e os correspondentes de saída, de uma relação funcional, em linhas ou colunas.	-Identificar variáveis dependentes e independentes. -Reconhecer a noção de variação. -Identificar relações funcionais lineares (proporcionalidade direta) e recíprocas (proporcionalidade inversa). -Caracterizar incorretamente o tipo de relação funcional.
Diagrama	Correspondência entre conjuntos (apresentados em diagramas), que a cada elemento de conjunto de entrada corresponda um único elemento do conjunto de saída.	Dispor os conjuntos de entrada e saída de uma relação funcional em diagramas, de forma que cada elemento do conjunto de entrada corresponda (seta) a único elemento do conjunto de saída.	-Identificar os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma relação funcional. -Reconhecer relações funcionais invertíveis.
Algébrico	Lei, regra, fórmula, a qual seja possível explicitar, de forma única (excetuando-se expressões algébricas equivalentes), a variável dependente em termos da variável independente.	Realizar um texto da forma $y = f(x)$, para uma relação funcional f cuja variável independente é denotada por x e a dependente por y.	-Reconhecer a relação de dependência entre variáveis. -Reconhecer e definir tipos de relações funcionais. -Operar com relações funcionais. -Dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não são realizáveis algebricamente.
Gráfico	Conjunto de pontos (x,y) no plano cartesiano (RxR), em que $(x,y_1) = (x,y_2)$, se e somente se $y_1 = y_2$.	Plotar pontos (x,y) no plano cartesiano, em que y e x estão em relação funcional, com x variável independente e y dependente. Esses dados podem ser extraídos de uma realização tabular, por diagrama, ou algébrica.	-Reconhecer a noção de variação e dependência entre variáveis. -Caracterizar e reconhecer algumas características das relações funcionais, tais como: zeros, sinal, injetividade e monotonicidade. -Dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não são realizáveis graficamente.
Generalização de padrões	Texto declarativo ou simbólico que a partir de algumas informações de uma sequência aritmética ou geométrica, explicita de forma geral, seu padrão.	Expressar um padrão ou regularidade para um elemento em uma posição genérica de uma sequência aritmética ou geométrica, em termos da sua posição.	- Reconhecer e desenvolver o entendimento da relação de dependência entre variáveis e de variação. -Gerar equívocos na caracterização da relação funcional, com a prevalência do modelo linear ou afim para produzir generalização de padrões.
Formal	Associação ou correspondência univalente e arbitrária entre variáveis quaisquer.	Produzir um texto que defina função, na qual devem estar explicitadas as características de univalência e arbitrariedade, por intermédio de quantificadores.	- Evidenciar as características de univalência e arbitrariedade do conceito de função. -Propiciar o reconhecimento de relações que são funcionais em diferentes realizações. -Exigir uma familiaridade com a terminologia de quantificadores.

Fonte: autores

Na Figura 1, apresentamos um texto icônico do modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de realizações desse conceito identificadas nas duas coleções de livros didáticos, utilizadas como fontes da presente investigação. Dispomos os panoramas em retângulos disjuntos com o propósito de ressaltar as suas características textuais específicas. As dimensões semelhantes dos retângulos e ordenação circular pretendem comunicar que, do ponto de vista do modelo, há uma dimensão horizontal entre os panoramas; eles não têm relações hierárquicas, pois partilham o pertencimento a um conjunto comum, ou seja, são conjuntos de realizações de um mesmo conceito (função). Por fim, as linhas tracejadas que conectam, dois a dois, todos os panoramas, indicam que podem existir *pontes* interligando os panoramas. O "tamanho" dessas pontes refere-se ao grau de isolamento entre os panoramas (princípio de classificação), que varia a depender das relações que poderão ser estabelecidos entre os textos dos panoramas (*intraconceito*), na realização do ensino do conceito de função, isto é, na MnE deste conceito. Dessa perspectiva, quando a classificação é mais forte (C+) nas relações intraconceito, os panoramas estão fortemente isolados, não se estabelecendo ou estabelecendo-se uma reduzida relação entre os seus textos. Quando a classificação é mais fraca (C-) nessa relação, há uma redução no isolamento entre os panoramas, as pontes "diminuem de tamanho", havendo articulação entre os seus textos.

Figura 1 – Um Modelo Teórico de MpE do Conceito de Função



Fonte: autores

Estudos sustentam que um componente fundamental para a aprendizagem do tema função, em nossos termos, é a fluência na transição entre os textos do que chamamos de diferentes panoramas (EVEN, 1990, MAGGIO; NEHRING, 2012; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013). Isto nos possibilita inferir sobre a importância da implementação de uma C- nas relações intraconceito na realização do ensino desse conceito. Porquanto, uma permanente C+, nessas relações, pode implicar em uma compartimentalização do conceito de função (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013), de forma que os panoramas venham a constituir-se apenas em um somatório de produções textuais do conceito de função, sem articulação.

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído apresenta uma visão micro, macro e correlacionada deste conceito (Quadro 6 e Figura 1). O ponto de vista micro corresponde às formas de reconhecer, selecionar e produzir realizações legítimas dentro de cada panorama, cônscio das suas implicações e limitações comunicacionais. A visão macro fica patente na diversidade de panoramas e a correlacionada evidencia a possibilidade (quando possível) do estabelecimento de *pontes* entre os panoramas (Figura 1).

Considerações finais

Esse artigo apresenta o resultado de um estudo que teve como objetivo construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de diferentes realizações, identificadas em duas coleções de livros didáticos dos Ensinos Fundamental II e Médio.

Espera-se que o modelo teórico de MpE do conceito de função, construído nesse estudo, ao explicitar as regras de reconhecimento e realização, possa contribuir trazendo reflexões e subsidiando discussões acerca do ensino desse tema na Escola Básica, tanto na elaboração de materiais didáticos, como nos cursos de formação inicial e continuada de professores. Em virtude do papel desempenhado por uma variedade de realizações na compreensão de conceitos (DAVIS; RENERT, 2014), em particular no conceito de função, por revelar, por exemplo, aspectos e interpretações particulares deste conceito (STEELE, HILLEN; SMITH, 2013) e, que esse tópico (realizações), ainda não foi sistematicamente incorporado aos cursos de formação (DAVIS; RENERT, 2014). Considerando, além disso, que as referenciadas regras são tacitamente adquiridas de acordo com inferências que o sujeito (a quem depreendemos como sendo agentes que compartilham o contexto, por exemplo: professor, alunos) faz (BERNSTEIN, 2000, 2003).

Segundo Davis e Renert (2014), apesar de décadas de pesquisa, a MpE ainda não é bem compreendida. Nesse estudo, apresentamos uma perspectiva para MnE e MpE de um conceito matemático e um percurso metodológico para construção de um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, utilizando como arcabouço teórico conceitos da Teoria dos códigos de Basil Bernstein (2000, 2003) e como ferramenta de análise a estrutura organizacional do EC proposta por Davis e Renert (2013, 2014). Esses construtos teóricos instrumentaram-nos com um quadro rigoroso para desenvolver uma descrição precisa, que nos propiciou demarcar as fronteiras comunicacionais, conferindo do ponto de vista discursivo, identidade as conceptualizações propostas. Estamos cientes que se trata de uma abordagem teórica distinta da presente na literatura sobre MKT ou MpE analisada, e ainda em construção, portanto, sujeita a análise, críticas e reavaliações. Entretanto, almejamos que esse estudo possa servir como ponto de partida para reflexões de pesquisadores que compartilham tanto o interesse por esse tema de pesquisa, quanto com perspectiva teórica utilizada.

Referências

ADLER, J.; HUILLET, D. The social production of mathematics for teaching. In SULLIVAN, P.; WOOD, T. (eds). *International handbook of mathematics teacher education*: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 195-222. 2008.

ASGHARY, N.; SHAHNARANI, A.; MEDGHALCHI, A. R. Sobre o Processo de Mudança de Professores das Séries Iniciais Relativo ao Desenvolvimento do Pensamento Funcional. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 1007-1026. 2013.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, p. 389-407. 2008.

BARWELL, R. Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, V. 45, p. 595-606. 2013.

BERNSTEIN, B. *Pedagogy, symbolic control and identity***:** theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield, 2000.

BERNSTEIN, B. *Class, codes and control*: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge. 2003.

BIEHL, J. V.; BAYER, A. A escolha do livro didático de Matemática. *X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Ijuí/RS. Disponível em <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_43.pdf >. Acesso em 08 de ago. 2015. 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais PCN* – 3 e 4 ciclos - Matemática . Brasília : MEC /SEF, 148 p. 1998.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN + Ensino médio***:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos*: PNLD 2014. Matemática. Ensino Fundamental – Anos finais. Brasília, 104 p. 2013.

BRASIL Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos*: PNLD 2015. Matemática. Ensino Médio. Brasília, 108 p. 2014.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *Bolema*. v. 28, n. 48, p. 64-88. 2014.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, V. 40, p. 3-22. 2008.

CHAPMAN, O. Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 237-243. 2013.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers'disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, , p. 245-265. 2013.

DAVIS, B.; RENERT, M. *The Math Teachers Know*: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group, 141 p. 2014.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, V. 21, p. 521-544. 1990.

GRANVILLE, M. A. O discurso pedagógico dos livros didáticos da década de sessenta: reflexos ou reproduções das "políticas públicas de educação" da época? *1ª JIED – Jornada Internacional de Estudos do Discurso*. Maringá – PR. Disponível em <www.dle.uem.br/jied/trab3.html>. Acesso em 17 jun. 2015. 2008.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 6º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010a.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 7º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010b.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 8º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010c.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 9º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010d.

KLEINER, I. Functions: Historical and Pedagogic Aspects. *Science & Education*. Vol 2, p. 183-209. 1993.

MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. Saberes docentes acerca das representações semióticas do conceito de função: Atuais desafios à educação matemática, *Boletim GEPEM*, n. 61, p. 95-108. 2012.

MOURA, M. O.; MORETTI, V. D. Investigando a Aprendizagem do Conceito de Função a partir dos Conhecimentos Prévios e das Interações Sociais. *Ciência & Educação*, v. 9, n. 1, p. 67-82. 2003.

PAIVA, M. *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 1. 2ª edição. São Paulo. 2013a.

PAIVA, M. *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 2. 2ª edição. São Paulo. 2013b.

PAIVA, M. *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 3. 2ª edição. São Paulo. 2013c.

PERRELLI, M. A. S.; LIMA, A. A., BELMAR, C. C. A escolha e o uso do livro didático pelos professores das áreas de Ciências Naturais e Matemática: as pesquisas que abordam essa temática. *Série-Estudos* (UCDB), v. 35, p. 241-261. 2013.

REZENDE, W. M. O conhecimento do professor de matemática sobre funções reais. *CIAEM – XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife – Brasil. 2011.

RHOADS, K.; WEBER, K. Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. *International Journal of Education*, V. 78, p. 1-12. 2016

SHIELD, M.; DOLE, S. Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, n. 82, p. 183-99. 2013.

STEELE, M.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 16, I. 6, p. 451-483. 2013.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, n. 90, p. 163-187. 2015.

TRINDADE, D. A.; SANTOS, I. B. Critérios apontados por professores de matemática aracajuanos para seleção do livro didático. In: *VI Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade*, 2012, São Cristóvão. Anais VI Educon. 2012.

VIEIRA, C. M. Professores dos anos iniciais do ensino fundamental e livros didáticos de matemática. *Tese de Doutorado*. Programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação (FaE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Minas Gerais. 2013.

VIIRMAN, O. The function concept and university mathematics teaching. *Dissertation*. Karlstad University, Faculty of Health, Science and Technology, Department of Mathematics and Computer Science. Disponível em: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/fulltext01.pdf>, acesso em 05 out. 2016. 2014.

Recebido 07/02/2017
Aceito 14/07/2017