EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p41-60

A transposição didática na perspectiva do saber e da formação do professor de matemática

The Didactic Transposition in the perspective of knowledge and of the professor's mathematics

RÚBIA CARLA PEREIRA[1]

MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA[2]

RONY CLÁUDIO DE OLIVEIRA FREITAS[3]

Resumo

Este artigo aborda a formação do professor com um olhar no seu saber e no processo de transposição didática do conteúdo de divisibilidade, mostrando que a matemática científica ensinada na disciplina de Teoria dos Números tem diferentes conceitos da matemática escolar, ensinada no ensino fundamental - séries finais. A análise no saber do professor de matemática e como ele influencia o processo de ensino e aprendizagem, é feita à luz da Teoria da Transposição Didática, do francês Chevallard. Observou-se a construção do conceito de divisibilidade em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental e na disciplina de Teoria dos Números em um curso de Licenciatura em Matemática. Foram identificadas distorções no saber matemático, consequência do distanciamento entre a formação do inicial do professor e a matemática escolar.

***Palavra-chave**: Transposição Didática, Divisibilidade, Formação de Professores.*

Abstract

This article deals with the formation of the teacher with a look at his knowledge and the process of didactic transposition of the content of divisibility, showing that the scientific mathematics taught in the discipline of Numbers Theory has different concepts of school mathematics, taught in elementary school - final series . The analysis in the knowledge of the teacher of mathematics and how it influences the process of teaching and learning, is made in the light of the Theory of Didactic Transposition by the Frenchman Chevallard. It was observed the construction of the concept of divisibility in a class of 6th year of Elementary School and in the discipline of Number Theory in a course of Degree in Mathematics. Distortions have been identified in mathematical knowledge, as a consequence of the distance between teacher's initial formation and school mathematics.

***Keywords:** Didactic Transposition, Divisibility, Teacher Training.*

[1] Mestra em Educação em Ciências e Matemática. Professora da Coordenadoria da Agropecuária do IFES, Campus Montanha – rubia,pereira@ifes.edu.br.

[2] Doutora em Educaçã0. Coordenadora da Especialização Práticas pedagógicas para Professores do Centro de Formação do IFES–dora@ifes.edu.br.

3 Doutor em Educação, Coordenador Geral do ProfEPT e professor da Coordenadoria de Matemática do IFES, Campus Vitória–ronyfreitas@ifes.edu.br.

INTRODUÇÃO

O professor de matemática da educação básica está em imediato contato com a matemática científica, como objeto de estudo, e com a matemática básica, como objeto de trabalho na escola. A distinção entre esses dois objetos é descrita por Moreira (2004, p.24) da seguinte forma:

> Para a matemática científica as definições formais e as demonstrações rigorosas são elementos importantes tanto durante o processo de conformação da teoria — nos momentos em que a comunidade avalia e eventualmente acata um resultado novo, garantindo-se, então, a sua incorporação ao conjunto daqueles já aceitos como válidos — quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada.
>
> (...) para a matemática escolar — sempre presente no cenário educativo — refere-se à aprendizagem e, portanto, ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extraescolar. (MOREIRA, 2004, p.24).

Tais distinções da Matemática não são dicotômicas, pelo contrário, ao sistematizar as especificidades do conhecimento matemático, abrem-se várias questões referentes à formação do professor de Matemática. Moreira (2004, p.37) lista algumas dessas questões:

> (...) seria possível e/ou adequado, "transferir" para a matemática escolar certas práticas e posturas associadas ao trabalho científico de investigação na fronteira do conhecimento matemático acadêmico? Que tipo de re-contextualização essas transferências demandariam? Qual seria o dimensionamento adequado e os papéis respectivos da matemática científica e da matemática escolar no processo de formação matemática na licenciatura? (MOREIRA, 2004, p.37)

Nesse cenário, a seleção de objetivos, conteúdos, metodologias e recursos não é uma atividade trivial que engloba aspectos políticos, didáticos, pedagógicos, éticos, entre outros. Para Resende (2015) essa seleção exige conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento curricular e conhecimento das tecnologias de informação e comunicação.

Neste conjunto complexo, o saber do professor de matemática transita entre o saber científico e o saber a ensinar na educação básica, sendo responsável por parte da transposição didática dos conteúdos. É fato que tanto o professor, quanto o aluno, relacionam-se didaticamente com o saber matemático escolar e científico. Nesse caso, "o objetivo é que o tratamento didático possa contribuir para que o aluno se aproxime da dimensão conceitual, característica do saber escolar e científico". (PAIS, 2011, p.57). Na concretização desse objetivo, o professor é o programador das situações de ensino e aprendizagem[4] e tem o desafio de lançar estratégias que contribuam para que o saber científico se torne ensinável ao aluno.

Neste contexto, o estudo dos conceitos matemáticos fica mais evidente quando considera a questão de sua especificidade científica e educacional. Segundo Pais (2011), a “natureza e o estatuto científico de cada disciplina, moldada pela sua trajetória histórica, determina uma forma particular de valorizar a dimensão educacional de cada saber” (PAIS, 2011, p.29). Especificamente, o conceito de divisibilidade, foco deste estudo, foi analisado no enfoque do saber científico do professor, no que se refere à formação inicial na ótica da Teoria dos Números e no saber fazer deste profissional na ótica da matemática escolar.

Para a área de Teoria dos Números define-se por divisibilidade quando um número natural a divide um número natural b, e escreve-se $a|b$, se existe um número natural c, tal que $b = a.c$. Assim, pode-se compreender que o conceito de divisibilidade é uma relação entre dois ou mais números naturais (ou inteiros), associado à operação de multiplicação (HEFEZ, 1993, p.66). Já na matemática básica, a divisibilidade é trabalhada nas relações de múltiplo, ser divisível e divisor, e no contexto escolar, o conceito dessas relações estão associadas à divisão exata. Ou seja, dizemos que a é múltiplo de ou divisível por b se existe c, tal que $a = bc$ e também se $a:b = c$ e o resto dessa divisão é nulo. Ou ainda, dizemos que b é divisor de a.

Dessa forma, fica evidente que a operação de divisão exata para conceituar a relação de divisibilidade é o que Chevallard (1991) classifica como uma criação didática, pois difere da forma que a divisibilidade é tratada na matemática científica e vem no sentido de facilitar o funcionamento didático desse conteúdo na matemática escolar.

Tendo esses fatores em pauta, a pesquisa detalhada neste artigo responde à seguinte questão: Como ocorre a Transposição Didática do conteúdo de Divisibilidade e as relações ao saber do professor no processo desse fenômeno, tanto na formação inicial como em uma turma de 6° ano do ensino fundamental?

[4] Entendemos ensino e aprendizagem como processos diferentes, no entanto, associados, no contexto da escolar. Enquanto o ensino se refere aos processos didáticos que colocam professor e aluno em contato com o saber, a aprendizagem se refere aos processos associados às experiências com o saber e a construção de significados.

O FENÔMENO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E O SABER DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

A Teoria da Transposição Didática está estruturada sobre o sistema de ensino, composto pela comunidade científica, pais, sistemas de gestão da educação, etc., e sobre o sistema didático, composto pelo professor, aluno e o saber; enfatizando este último e expondo a necessária distância entre o saber científico e o saber ensinado, e propõe analisar o sistema didático a partir dessa dimensão com base na epistemologia do saber ensinado (CHEVALLARD, 1991, p.16). Essa proposta não deteriora o saber escolar frente ao saber sábio[5], mas favorece o reconhecimento de especificidades do saber matemático escolar, situando-o dentro de um contexto próprio, com demandas e tratamentos específicos.

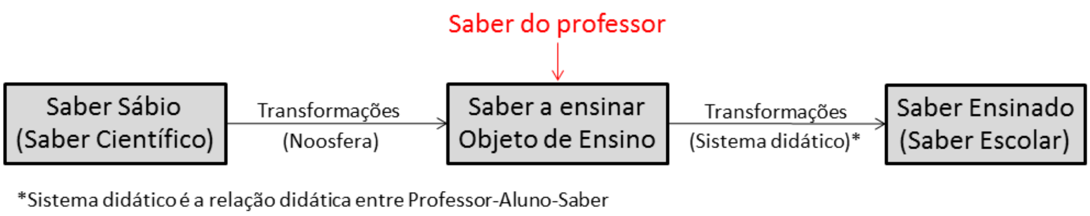
Frente ao objeto principal da sua teoria – o saber – Chevallard (1991, p.45) define a Transposição Didática:

> Um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado Transposição Didática. (CHEVALLARD, 1991, p.45. Tradução nossa. Grifos do autor).

Assim, a Transposição Didática é um conjunto de processos adaptativos que torna o objeto de saber (saber sábio) em objeto de ensino (saber a ensinar).

A definição de Transposição Didática pode ser representada pelo esquema:

Figura 1: Esquema da definição da Transposição Didática



Fonte: próprio dos autores, 2017

Os processos da Transposição Didática são: a epistemologia do regime didático do saber (noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas), a noosfera, as criações didáticas, a vigilância epistemológica, a desincretização do saber, a despersonalização do saber, a programabilidade do saber, a publicidade do saber, o controle social das

[5] Termo utilizado por Chevallard para o saber científico.

aprendizagens, a dialética antigo/novo, a obsolescência externa e interna, a cronogênese e a topogênese.

As noções matemática, paramatemáticas e protomatemáticas dizem respeito ao saber matemático. As noções matemáticas são os conteúdos de saber. Já as noções paramatemáticas são ferramentas auxiliares da atividade matemática, como noções de parametrização, demonstração, etc. E as noções protomatemáticas são as capacidades desenvolvidas como criar e testar hipóteses, análise de dados, etc. Nessa perspectiva, as noções se referem ao conhecimento do conteúdo (noção matemática) e ao conhecimento pedagógico do conteúdo (noções paramatemáticas e protomatemática).

Outro elemento citado na teoria de Chevallard (1991) é a noosfera, que é onde ocorre a interação entre o sistema de ensino (professor-aluno-saber) e a sociedade como, por exemplo, as discussões sobre os objetos de saber que se tornam escolarizáveis. Nessa dimensão são discutidos o currículo e outras demandas sociais que o professor também tem que se apropriar na sua formação.

Já as criações didáticas são “conteúdos” criados motivados pelas necessidades do ensino para atuarem como recursos para outras aprendizagens, esses conteúdos são úteis apenas no contexto escolar (PAIS, 2015, p.17). Nesse contexto, o processo de adaptação do saber sábio para ensinável pode causar distorções conceituais no objeto ensinado. Cabe então aos agentes do sistema de ensino, comunidade científica e, principalmente, o professor, por ser o ente mais direto no sistema, exercer a vigilância epistemológica para que essas distorções não ocorram. Assim, esse processo preserva a distância necessária entre o saber sábio e o saber escolar, ao mesmo tempo em que garante que tal separação não cause erros conceituais ao objeto de saber, como afirma Chevallard (1991, p.16):

> O conceito de Transposição Didática, enquanto refere-se à trajetória do saber sábio para o saber ensinado, e, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa, testemunha o questionamento necessário, ao mesmo tempo em que se torna a sua primeira ferramenta. Para didática, é uma ferramenta que permite reconsiderar, examinar as evidências, colocar em cheque as ideias simples, se livrar de familiaridade enganosa de seu objeto de estudo. Em uma palavra, que lhe permite exercer sua vigilância epistemológica. (CHEVALLARD, 1991, p.16. Tradução nossa.).

O professor exerce, no decorrer do seu trabalho, a vigilância epistemológica quando questiona sobre a natureza do objeto, como se concebe esse objeto no ensino e qual a relação entre a construção desse objeto e sua abordagem didática.

Da academia à escola básica, o saber passa por várias transformações que o distancia cada vez mais do saber sábio. O processo de vigilância epistemológica é uma grande contribuição da teoria da Transposição Didática, pois diante do inevitável distanciamento entre o saber científico e escolar, ele traz à reflexão sobre o que e como ensinar de forma que seja possível manter a fidelidade ao conceito matemático.

A *desincretização*, *despersonalização*, *programabilidade* e publicidade do saber são processos da transposição didática associados à construção textual de um determinado conteúdo ou teoria matemática. A *desincretização* diz respeito à separação e organização da teoria em áreas. A despersonalização é o processo que torna um determinado saber desvinculado do seu autor, assim como a *descontextualização* desvincula o saber do contexto histórico o qual foi desenvolvido.

Visto que um determinado objeto de saber já se encontra *descontextualizado*, despersonalizado e *desincretizado* em áreas, ocorre o processo de *programabilidade*, que consiste em estabelecer uma programação segundo uma sequência didática progressiva e racional. Por fim, acontece o processo da publicidade do saber, que é a definição explicita do saber que deverá ser ensinado (PAIS, 2015, p.33). Isso, por sua vez, possibilita o controle social da aprendizagem, que se expressa nas práticas de avaliação para certificações oficiais.

Sobre a dialética Antigo/Novo, Chevallard (1991) e outros teóricos da linha da didática francesa consideram que a construção do saber matemático é motivada por uma problemática que deve ser tratada por conhecimentos matemáticos antigos e novos. Antigo, porque o problema proposto deve abordar conhecimentos prévios, de forma que estes já não são suficientes para responder a situação proposta, mas motivam a expansão do conhecimento e motivam o saber novo que, por sua vez, é aquele que impulsiona e justifica a relação didática. Depois de passado o tempo de ensino, esse saber se classificará em antigo, em um ciclo de superação dessa dialética e de aprendizagem contínua, como explica o autor da teoria:

> Na relação didática (que une professor, alunos e saber) o professor esta a serviço da máquina didática cujo motor é a contradição entre o antigo e o novo: alimenta seu funcionamento introduzindo objetos transicionais que são os objetos de saber convenientemente convertidos em objetos de ensino. (CHEVALLARD, 1991, p.81. Grifos do autor. Tradução nossa.).

Esse processo é assim, associado diretamente à prática do professor, pois diz respeito à construção de uma situação didática para ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo.

Já os processos de obsolescência externa e interna, a cromogêneas e a topo gênese dizem respeito ao tempo didático.

A obsolescência interna refere-se ao saber escolar em relação à duração de um ciclo de ensino, isto é, o objeto de saber superou a contradição antigo/novo e se tornou “antigo” para continuar. O controle e administração desse processo são de responsabilidade, primeira, do professor, que por sua vez, precisa de orientação para que o trabalho de um determinado conteúdo seja factível.

Já a obsolescência externa é um processo que ocorre em relação à sociedade, ou seja, é um desgaste histórico e cultural do saber, que já não é mais útil para a economia do sistema de ensino.

Chevallard (1991) evidencia diferenças temporais entre o professor e o aluno em relação ao saber. A cronogênese figura no fato de o professor saber mais conteúdos matemáticos, nas diversas áreas e suas inter-relações, o que o instrumentaliza para programar o tempo de ensino e aprendizagem. Por outro lado, a topogênese diz respeito à dimensão e ao domínio do objeto de saber que o professor detém e que o aluno ainda não. Além disso, o professor tem conhecimento de técnicas para ensinar, ou seja, para que o aluno desenvolva não só a dimensão conceitual do objeto de saber, mas as competências e as capacidades críticas.

Na situação em que um professor ou aluno, se relacionam com um dado saber, estabelece-se, então, um terceiro nível de relação ao saber, que Chevallard (1988) chamou de relação pessoal ao saber. Nessa relação, o saber apresenta concepções, competências, o ‘saber fazer’, as imagens mentais, dentre outros elementos, daquele sujeito que com ele se relaciona.

Como os saberes científicos precisam ser ensinados às novas gerações, mas de forma adapta às especificidades da escola básica, é na relação pessoal ao saber do professor que ocorre esse elo, pois ele se comunica tanto com o saber científico, no sentido de compreendê-lo na sua forma organizada e sistematizada e formal, como com o saber escolar, no que se refere à adaptação do conhecimento científico em ensinável numa linguagem mais acessível. Isso exige um profundo domínio dos conteúdos científicos e cognitivos, e das técnicas didáticas.

Nessa perspectiva, o saber ensinado para futuro professor, que não pode ser uma cópia do saber científico, pois são construções próprias que englobam elementos do ensino, o perfil do profissional que se pretende formar, etc.

Assim, concordamos com Resende (2007, p. 44) quando considera:

> Esse questionar (os saberes veiculados no ensino superior) é não só pertinente, mas necessário, quando se pensam os currículos de formação de professores, pois a relação entre os saberes científicos e os escolares pode ter repercussões substanciais no processo de formação, como também a formação pode ter sobre esses saberes (Resende, 2007, p.44).

Nesse contexto, nos cursos de licenciatura em Matemática, o saber científico da matemática não dá conta da formação profissional do professor, esse saber deve ser misturado com o saber ensinar matemática, sendo então, um conjunto de conteúdos científicos e práticas, frutos de uma transposição didática; finalidades; elementos pedagógicos e outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral; organizado de modo a manter uma unidade científica e didática.

A aprendizagem de um saber matemático é exposto inicialmente, como saber científico para o futuro professor, que por sua vez, irá transpor/mediar didaticamente para o saber escolar. Logo, o nosso foco é no conceito. No entanto, o professor é um elemento essencial nesse processo e merece então uma relevante análise da relação do saber científico – professor – saber escolar – aluno. Analisaremos essa relação a partir da teoria de Shulman (1986) sobre o conhecimento do professor.

Nessa teoria, Shulman (1986) diferencia conhecimento do objeto de ensino, conhecimento pedagógico desse objeto e o currículo.

Segundo o autor, o conhecimento do objeto de ensino é saber o conteúdo específico a ser ensinado, isto é, conhecimento de definições, conceitos, propriedades, procedimentos, etc., além do conhecimento das estruturas substantivas (definido como o modo pelos quais os conceitos básicos são organizados) e sintáticas (que diz respeito a validação da teoria ou do saber), conforme explica Resende (2007, p. 62):

> O professor deve ser capaz de não só dizer que alguma coisa é verdadeira, mas de explicar por que o é, estabelecendo relações com outras proposições. No caso específico da matemática, poderíamos dizer que o professor deve conhecer os modos pelos quais os conceitos e as proposições se

> organizam: de modo formal, a partir de conceitos e proposições primitivas, numa linguagem própria, ou de forma intuitiva, a partir da necessidade da resolução de problemas, ou de outras formas possíveis. O conhecimento do conteúdo deve lhe permitir saber o que é central e o que é periférico ao trabalhar com um dado assunto. Além disso, o professor precisa saber provar ou demonstrar a veracidade de uma afirmação para casos gerais, de acordo com métodos e instrumentos que são próprios para a validação do conhecimento matemático, por exemplo, através do método lógico dedutivo ou da indução matemática (Resende, 2007, p.62).

O conhecimento pedagógico, por sua vez, é o conteúdo aprendido e adaptado para ser ensinado, indo além do objeto de saber. Shulman coloca nessa categoria as metodologias para transpor um saber em linguagem, seja ela verbal ou representações, de tal forma que seja ensinável e compreendida por outros indivíduos.

Tais metodologias são aplicadas no processo de transposição didática, como explica Resende (2007, p.63):

> Podemos dizer que o conhecimento pedagógico do conteúdo supõe uma transformação dos conteúdos específicos para fins de ensino. É uma categoria que não prescinde das demais, mas que aponta para um caráter de originalidade, de individualidade, pois consiste na transformação de algo que se sabe, em algo que possa ser compreendido pelo outro, na sua individualidade, no seu contexto (Resende, 2007, p.63).

Um professor precisa dispor de ambos os conhecimentos teorizados por Shulman, pois fragilidades e limitações em qualquer um deles tende a processos de ensino-aprendizado deficientes. Um exemplo, de uma consequência dessa fragilidade é a reprodução repetitiva das sequências do livro didático.

Podemos observar a aproximações das teorias de Chevallard com Shulman, no que se refere à adaptação do saber científico para o saber escolar, sendo uma diferença o foco dessas teorias. Enquanto Chevallard tem seu lócus no saber e nas relações didáticas, percebemos que para Shulman a ênfase é o saber do professor como principal responsável da mediação desse saber. Em nossa concepção, tanto o saber e o professor são importantes na análise do processo de transposição didática do saber, pois em ambos, existe uma preocupação com a aprendizagem do aluno.

Sobre o currículo destaca o conhecimento lateral, que diferente da teoria de Chevallard que trata a noosfera, Shulman afirma que a partir do reconhecimento do professor sobre o que os alunos já estudaram no campo do saber, ou até mesmo em outras áreas, ele pode estabelecer relações, aplicações atingindo assim uma esfera do conhecimento importante que é como utilizar o saber. O conhecimento com o currículo é vital para o planejamento do professor.

METODOLOGIA

Esta pesquisa retrata a observação do processo de a Transposição Didática do conteúdo de Divisibilidade em uma turma de Licenciatura em Matemática, mais especificamente o curso de Teoria dos Números e, também, em uma turma de 6° ano do ensino fundamental. Do estudo, participaram uma professora e os respectivos alunos da 6° ano do ensino fundamental de uma escola e o professor da disciplina de Teoria dos Números do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior.

A escolha da professora ocorreu pelo fato de ser regente de uma turma de 6° ano do ensino fundamental, etapa em que se trabalha o conceito de divisibilidade, e também por ser recém-graduada em Licenciatura em Matemática pela mesma instituição de ensino em que observamos as aulas de Teoria dos Números, tendo cursado a disciplina com o mesmo professor participante desta pesquisa.

Tudo isso, tornou possível estudar as inter-relações do fenômeno da Transposição Didática na formação e na atuação da professora no regime didático da construção do saber divisibilidade.

Os dados foram construídos em quatro etapas: entrevista com a professora do ensino fundamental e o professor da disciplina de Teoria dos Números; observação das aulas com a professora Sandra no 6° ano do ensino fundamental; observação das aulas da disciplina de Teoria dos Números na Licenciatura em Matemática.

Conforme abordado anteriormente, o conceito de Transposição Didática é o conjunto de transformações que tornam um objeto de saber a ensinar em objeto de ensino (CHEVALLARD, 1991, p.46). Tal conjunto de transformações é composto por elementos processuais da transposição didática que ocorrem no sistema de ensino e, mais especificamente, no sistema didático, por isso, observamos as relações professor-saber e aluno-saber.

Os processos de Transposição Didática inerentes ao sistema didático são aqueles que ocorrem na relação saber-professor-aluno. Assim, baseado nesta teoria analisamos os dados construídos em três categorias de análises: análise epistemológica do regime didático do saber (a diferenciação do saber em noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas), vigilância epistemológica e dialética antigo/novo.

OS PROCESSOS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E O SABER DO PROFESSOR

Apresentamos aqui uma análise dos dados construídos a partir da observação das aulas e pontuamos a ocorrência de alguns elementos processuais da transposição didática, evidenciando o saber da professora de ensino fundamental no processo de adaptação da matemática científica para a matemática escolar. Já da observação das aulas de Teoria dos Números, analisamos a construção do conceito de divisibilidade na formação inicial de professores da educação básica.

As categorias de análise assumidos nesse estudo são alguns processos da Transposição Didática, inerentes ao sistema didático (professor-aluno-saber). Assim, as categorias são: análise epistemológica do regime didático do saber, isto é, a diferenciação o saber em noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas; a dialética antigo/novo; e a vigilância epistemológica.

RELAÇÃO PROFESSOR SABER

A professora do 6° ano do ensino fundamental iniciou a construção do conceito de Divisibilidade com a definição de múltiplos, que por sua vez, partiu da ideia de sequência numérica. Também o conceito de divisível foi construído a partir de múltiplos.

Nessa dinâmica percebe-se que a professora construiu conceitos matemáticos novos (múltiplos e divisíveis) abordando conhecimentos antigos (sequência) o que configura o processo Antigo/Novo. Nessa perspectiva Pais (2011, p. 59) explica:

> O desafio didático consiste em estudar estratégias que possam contribuir na transformação desse saber cotidiano para o saber escolar, preparando o caminho para a passagem ao plano científico. (PAIS, 2011, p. 59).

No diálogo abaixo, pode-se perceber essa construção:

> *Professora: afirma quero saber se 1559 é múltiplo de sete. Como eu faço para descobrir?*
> *Aluno1: afirma faz a operação inversa.*
> *Professora: afirma e como é a operação inversa*
> *Aluno1: afirma 1559 dividido por 7.*
> *Professora: afirma por que você pensou nisso?*
> *Aluno1: afirma porque se for de 7 em 7, teremos um monte de conta para descobrir.*

Aluno2: afirma – é mais fácil, mais rápido.
Professora: afirma eu entendi o que você falou, eu só vou falar em outras palavras: para eu afirmar que 1559 é múltiplo de 7, eu tenho que ter um número que vezes 7 dá 1559, para eu saber se isso é verdade eu tenho que saber qual é esse número. Então, para descobrir eu tenho que fazer o quê?
Alunos: firmam dividir.
Professora: afirma isso, a operação inversa.
(A professora faz a operação)
Professora: afirma se a divisão não é exata, o que eu concluo? Que não existe um número que multiplicado por 7 dá 1559. Porque a divisão não é exata.
Professora: afirma vamos pensar aqui, 4 vezes algum número é igual a 32. Então, se isso aqui é verdade, 32 é múltiplo de 4, a gente conversou com outro tópico que é a divisão exata. A gente também fala o seguinte: 32 é divisível por 4. E isso aqui fica subtendido o quê?
Aluno1: afirma que 32 dividido por 4 tem o resultado exato.
Professora: afirma mas toda conta de divisão o resultado não é exato?
Aluno2: afirma quer dizer que 32 dividido por 4 não tem resto.
Professora: afirma e aí o que a gente falou aqui? Ele falou de outras coisas?
Aluno3: afirma múltiplo, divisível e divisor.

Recorte da aula, em 5/2015.

Também nesse diálogo é possível identificar que a professora elabora perguntas para trabalhar o conceito de divisibilidade e a formalidade desse conteúdo, quando propõe: "Eu entendi o que você falou, eu só vou falar em outras palavras: para eu afirmar que 1559 é múltiplo de 7, eu tenho que ter um número que vezes 7 dá 1559"; essa proposta é uma adaptação didática do conceito científico.

Mas é possível observar também, que foi construído o conceito de divisível e múltiplo pela divisão exata. Essa construção é uma criação didática, pois só está no contexto da matemática escolar, conforme confirma Duval (1995a, p.2):

> A representação é então a *Forma* sob a qual uma informação pode ser descrita e levada em conta em um sistema de tratamento. Isso não tem, pois, mais nada a ver com uma "ideia/crença", com uma "evocação de objetos ausentes", os quais enviam de novo para a consciência vivamente de um sujeito. Trata-se ao contrário de uma "ação de codificar as informações". (DUVAL, 1995a, p.2. Tradução nossa. Aspas e grifos do autor).

Já a noção paramatemática não pode ser ensinada, segundo Chevallard (1991), mas a professor cria situações para que o aluno possa, de forma independente, consolidar essa noção. Segundo a definição do autor (CHEVALLARD, 1991, p.60):

> As noções paramatemáticas, não constituem objetos de um ensino: são objetos de saber "auxiliares", necessários para o ensino (e a aprendizagem) dos objetos matemáticos propriamente ditos. Devem ser "aprendidos", mas não são "ensinados" (seguem o plano de ensino das noções matemáticas). (CHEVALLARD, 1991, p. 60. Tradução nossa. Grifos do autor).

A noção paramatemática pode ser identificada no diálogo quando aluno propõe a divisão exata como validação da relação de divisibilidade. Essa situação didática foi proposta pela professora, demonstrando o saber fazer, mas a noção é desenvolvida pelo aluno de forma independente, essa estrutura didática é confirmada por Freitas (2015, p.91):

> [...] devemos possibilitar ao aluno o máximo de independência para que ele possa desenvolver autenticamente seus próprios mecanismos de resolução do problema, através de suas elaborações de conceitos. É evidente que não se trata de nenhuma forma de abandono ou desleixo, por parte do professor; pelo contrário, a estruturação didática de tais situações é antes de tudo um desafio não trivial. (FREITAS, 2015, p.91).

Já as noções protomatemáticas podem ser percebidas na capacidade de comparar as soluções do problema quando o aluno compara a verificação por sequência e pela divisão exata. Nesse caso, o aluno demonstrou o pensamento matemático de sistematizar os conceitos construídos, compará-los e escolher a melhor estratégia para resolução.

As noções protomatemáticas são os objetivos para elaboração das situações didáticas e a professora administrou bem as situações propostas e também os feedbacks dos alunos para verificação desse saber construído.

Assim, na construção do conhecimento sobre divisibilidade dos números naturais, na turma de 6° ano, foram desenvolvidas as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas que, para Chevallard (1991), *"esboçam uma análise epistemológica do regime didático do saber matemático"* (CHEVALLARD, 1991, p. 67). Essa distinção é importante para o desenvolvimento da didática, pois a professora criou situações em que trabalhou cada uma das noções aqui identificadas.

Nesta perspectiva, Pais (2015, p.30) afirma:

> É preciso ainda relacionar o trabalho do professor de matemática com o trabalho do matemático, não excluindo, evidentemente, a possibilidade de conciliação dessas duas atividades. Porém, é importante lembrar que o tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático acaba determinando uma influência considerável na prática pedagógica. (PAIS, 2015, p.30).

A didática trabalhada pela professora configura a inter-relação com o a disciplina de Teoria dos Números, pois o desenvolvimento conceitual da relação múltiplo/divisível que, em ambos os sistemas didáticos, foi trabalhado com base na operação de multiplicação (noção matemática), além de tratar o pensamento matemático (noção paramatemática) e as habilidades a cerca desse pensamento (noção protomatemática).

No entanto, na disciplina de Teoria dos Números não foram discutidas práticas e situações de ensino e aprendizagem a serem empregadas na escola básica, e supomos que essa competência foi transferida para o licenciando.

A habilidade de adaptação do conhecimento não é trivial. Por isso, as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas deveriam ser identificadas nas aulas de formação inicial do professor e discutidas as diferenças de tratamento na adaptação do saber para a escola básica.

Quanto à vigilância epistemológica constitui um processo fundamental da Transposição Didática, evitando que distorções conceituais ocorram no processo de *didatização* dos objetos a ensinar.

Na aula da disciplina de Teoria dos Números, o professor apresenta uma propriedade de divisibilidade: "Todo número inteiro divide a si mesmo, ou seja, todo inteiro é divisor de si mesmo", dessa forma, pode-se concluir que zero divide zero. De fato, no contexto da Teoria dos Números não se associa o conceito de divisibilidade com a operação de divisão, isso ocorre apenas na educação básica, como transformação didática do conteúdo. Nesse contexto, é importante que se trabalhe as transformações relativas a esse saber da matemática básica na disciplina de Teoria dos Números na formação inicial do professor a fim de exercer a vigilância epistemológica no processo de transformação, o que configura o fenômeno da Transposição Didática. O recorte a seguir descreve a discussão sobre esse conteúdo.

> *Professor: afirma qualquer que seja o n inteiro, ele divide a si mesmo. Se for zero não? 0 divide 0?*
> *Aluno1: afirma não.*
> *Aluno2: afirma é que qualquer número que você multiplicar o zero vai dar zero né, então, vai ser qualquer um.*
> *Professor: afirma isso aí. Então, todo número divide a si mesmo, ou seja, todo número inteiro é divisor de si mesmo, incluindo o zero. É só que, para zero divide zero, temos uma indeterminação, não é um número dado, pode ser igual a 2, igual a 3, pode ser qualquer número. Você começaria explicando isso lá no ensino fundamental? Que n divide n, para todo n, incluído o zero? Acho que não seria uma boa ideia não.*
> *Aluno1: afirma para n positivo acho que pode.*
> *Professor: afirma estou dizendo assim, se você for falar de n, para todo n incluído o zero você já vai criar um problema, já irá ter uma polêmica para se discutir logo no começo. Então, seria melhor você não entrar nisso, deixa o aluno perguntar, porque o n não pode ser nulo, e aí você discute isso. Ou então encara, o problema é seu. (risos)*

Professor: afirma um divide n, para qualquer n, incluindo o zero. Ok? Porque existe n tal que n = 1n, independente do n. E o n| 0, para qualquer n, isto é, todo n é divisor de zero. Isso, porque 0 = n0, então, o q é zero nesse caso, então divide. E o contrário? O zero divide algum número inteiro? Não, né?! O zero não divide ninguém, além de si mesmo.
Aluno1: afirma ai meu pai!
Aluno2: afirma eu continuo achando que o zero não divide a si mesmo, não aceitando, né?
Alunos: afirmam eu também não aceitei.
Aluno3: afirma apesar de que todo conjunto de múltiplo começa com zero.
Professor: afirma zero é múltiplo de qualquer número?
Aluno: afirmam sim.
Professor: afirma e zero é múltiplo dele mesmo?
Alunos: afirmam sim.
Professor: afirma então ele é divisor dele. Se o zero é múltiplo de todo número, incluído ele, então ele é divisor dele.

Recorte da aula de Teoria dos Números, em 07/2015.

No diálogo percebe-se que a divisibilidade por zero permaneceu em uma atmosfera de dúvida e de falta de aceitação por parte dos estudantes. Isso se confirma na fala do aluno: "Eu continuo achando que zero não divide zero. Não aceitando, né?". Para traçarmos uma análise comparativa com a discussão da divisibilidade por zero no 6° ano com a professora Sandra, realizada na subseção anterior, precisamos compreender o conceito trabalhado no contexto escola e o conceito trabalhado na Matemática científica da disciplina de Teoria dos Números.

Na fala do professor, quando diz: "todo número divide a si mesmo, ou seja, todo número inteiro é divisor de si mesmo, incluindo o zero. Só que, para zero divide zero, temos uma indeterminação, não é um número dado, pode ser igual a 2, igual a 3, pode ser qualquer número", há coerência conceitual com a definição de divisibilidade definida pela operação da multiplicação. No entanto, há também uma zona de perigo no que se refere à distorção conceitual, como ocorrido com o aluno, quando diz: "Eu continuo achando que o zero não divide a si mesmo, não aceito". Nesse último caso, configura a fragilidade conceitual entre os objetivos do ensino sobre o conceito e a aprendizagem real. Neste sentido, Pais (2011, p.22) afirma:

> (...) não há garantias de que no plano individual, o conteúdo aprendido pelo aluno corresponda exatamente ao conteúdo ensinado pelo professor. Assim, pode-se chegar a conclusões distantes da proposta inicial e que, em casos extremos, permanecem apenas vestígios da intenção original. (PAIS, 2011; p. 22).

A superficialidade trabalha no conteúdo pode causar distorções na prática do professor criando uma crença na compreensão errada de determinado conceito, como pode ser observado no diálogo a seguir, recortado da aula da professora do 6° ano do ensino fundamental:

> *Aluno1: afirma é verdade que zero dividido por zero dá 1?*
> *Professora: afirma é, é verdade!*
> *Aluno2: afirma o quê? Como assim, zero dividido por zero dá 1?*
> *Professora: afirma vamos discutir? Tem uma afirmação aí no livro, página 115, depois do exemplo 1 que ele colocou assim: "Um detalhe, o zero é múltiplo dele mesmo, entretanto, o zero não é divisor de si" (Figura 14).*
> *Aluno1: afirma mas zero dividido por zero dá 1.*
> *Professora: afirma mas zero dividido por zero dá 2, e daí?*
> *Aluno2: afirma eu não entendi.*
> *Aluno1: afirma você que disse que zero dividido por zero dá 1.*
> *Professora: afirma mas zero dividido por zero dá 2. Porque se você pegar 0 = 2 x 0, não vale?*
> *Aluno1: afirma ah, tá! Zero dividido por zero dá 2.*
> *Professora: afirma vamos fazer a tabuada do zero?*
> *Alunos: afirmam 0 x 0 = 0, 0 x 1 = 0, 0 x 2 = 0, 0 x 3 = 0, 0 x 4 = 0, 0 x 5 = 0.*
> *Professora: afirma todo número multiplicado por zero dá zero, né?!*
> *Aluno3: afirma então, zero vezes qualquer coisa é zero, aí zero dividido por zero pode dar qualquer coisa?*
> *Aluno4: afirma porque tipo assim, eu tenho 15 unidades. 15 para dividir para zero. Eu não vou dividir para nada, então, não vai ter nada para nada, sacou?*
> *Professora: afirma saquei não. Olha só, vamos lembrar da operação inversa? Esse meu elemento aqui, 4 x 8 = 32, então 32 dividido por 4 dá 8. Vamos fazer a mesma coisa com o zero? Se zero vezes zero é zero, se eu dividir zero por zero dá zero. Mas se zero vezes um é zero, se eu dividir zero por zero dá um.*
> *Aluno5: afirma mas como a gente vai saber qual vai dar.*
> *Professora: afirma uai, a operação inversa. Olha aqui! 32 dividido por 4 dá 8, porque 8 x 4 dá 32.*
> *Aluno5: afirma eu entendi isso, mas só tem um jeito de fazer isso?*
> *Professora: afirma você pode fazer isso com qualquer número. Qualquer tabuada. Eu estou fazendo com o zero. Só que a tabuada do zero é uma tabuada especial.*
> *Aluno1: afirma é na tabuada do zero, zero dividido por zero vai dar 4.*
> *Professora: afirma calma! A tabuada do zero é especial, porque ela sempre dá de resultado o mesmo número, né?! Então, se eu fizer a operação inversa para todo mundo e vou achar quantos resultados?*
> *Aluno2: afirma muitos.*
> *Aluno4: afirma infinitos. Mas não entendo que eu divido zero, que é uma quantidade, vamos supor que é nada, por zero que também é nada, como que dá 1?*
> *Professora: afirma pela operação inversa da tabuada do zero.*
> *Aluno1: afirma matemática é muito doida.*
> *Aluno4: afirma tipo assim, eu não tenho nada, para dividir com nada, como que vai dar 1?*
> *Professora: afirma pois é, a tabuada do zero é diferente da outras tabuadas, todos os resultados dão zero.*
> *Aluno4: afirma tá, isso eu entendi, como que faz isso?*

Professora: afirma como que acontece?
Aluno5: afirma como é que alguém consegue dividir zero por zero e dar 1.
Professora: afirma é meio abstrato mesmo. Todo número multiplicado por zero dá zero por definição. Porque senão a sequência aqui vai dar errada.
Aluno4: afirma é mais ou menos assim: o cara decidiu lá que dá zero, e vai ser zero e acabou? É tipo isso?
Professora: afirma mais ou menos. Não foi exatamente dessa forma.
Aluno4: afirma porque não tem sentido isso. Você não vai colocar esse trem de zero na prova não, né?! Por favor, não coloca.

Recorte da aula com a professora, 5/2015.

Nesse recorte da aula, a professora justifica a divisão de zero por zero. Para isso, se apoia na operação de multiplicação, pois a definição de divisibilidade tem sua base nessa operação. No entanto, conceitualmente zero não é divisor de nenhum número, pois a relação divisor entre naturais, para essa etapa, associa-se ao algoritmo da divisão euclidiana, que ocorre no campo conceitual 'repartir' ou 'quantas vezes cabe', não se construindo o sentido para a divisão por zero. Isso se confirma na fala da aluna, quando diz: "Tipo assim, eu não tenho nada, para dividir com nada, como que vai dar 1?".

Para essa questão, a professora, afirma que zero é divisor de zero e tem como resultados infinitos números, validando este fato pela tabuada do zero ser uma "tabuada especial", o que não está correto conceitualmente, mostrando a concepção da professora sobre o conteúdo (conhecimento pedagógico do conteúdo).

Assim, nesse recorte, percebemos uma ruptura com o conceito de divisibilidade, pois configura um erro conceitual no processo de didatização do saber, e como o processo de vigilância epistemológica pode causar danos conceituais quando não observada e executada no processo da Transposição Didática.

Outro fator de distorção conceitual do conteúdo foi pontuar que a tabuada de zero tem uma relação especial baseada em uma definição: "É meio abstrato mesmo. Todo número multiplicado por zero dá zero por definição. Por que senão a sequência vai dar errada". Nesta fala, há uma ruptura com o conceito de multiplicação. Nesse contexto, uma das alunas expressa uma síntese do que supõe compreender: "É mais ou menos assim: o cara decidiu lá que dá zero, e vai ser zero e acabou? É tipo isso?". Analisando essa fala percebe-se a falta de significação do saber. Dessa forma, é possível perceber como o saber o professor atinge a construção conceitual de um conteúdo.

Assim, nessa circunstância, a ruptura ocorre devido à concepção da professora sobre um determinado conceito, isto é, a epistemologia do professor. Tal concepção está distorcida e isso afeta a aprendizagem o aluno, como podemos perceber apresenta a fala da aula:

“Porque não tem sentido isso. Você não vai colocar esse trem de zero na prova não, né? Por favor, não coloca”.

Diante deste quadro, concordamos com Pais (2011, p.34) sobre a epistemologia e as concepções do professor:

> (...) entendemos a epistemologia do professor como sendo as concepções referentes à disciplina com que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados. (PAIS, 2011, p.34).

Assim, o processo adaptação do saber sábio para o saber ensinável é influenciado pelo saber do professor, principalmente no que se refere aos conteúdos matemáticos que nesse contexto, está diretamente atrelado à disciplina de Teoria dos Números na formação inicial.

CONCLUSÃO

O trabalho centrou-se no conceito de divisibilidade, com o intuito de mostrar por meio desta pesquisa os efeitos do saber do professor e sua formação inicial na transposição didática.

Ao analisarmos o processo de transposição do conceito de divisibilidade em uma turma de 6° ano do ensino fundamental e na disciplina de Teoria dos Números de um curso de Licenciatura em Matemática, concluímos que as situações didáticas, planejas pelo professor, são essenciais para o desenvolvimento das noções matemáticas e o processo de didatização pode, por vezes, causar rupturas conceituais desse conteúdo na educação básica.

Houve uma distorção no tratamento da relação da divisibilidade no que se refere ao número zero. Isto é consequência de uma vigilância epistemológica distorcida e de um regime didático mal estabelecido. Por isso a importância do professor saber relacionar o saber científico e o saber escolar, em um esforço de aproximar a matemática escolar da científica ao desenvolver um trabalho didático em sua sala de aula.

Nesse caso, o processo adaptação do saber sábio para saber ensinável foi fortemente influenciado pelo saber do professor, ou seja, é importante que pontos sensíveis, como vistos neste estudo sobre a divisibilidade por zero, sejam trabalhados na formação e o conceito deixe de ser uma “crença” do professor, pois isso pode acarretar distorções conceituais na construção de um saber matemático na educação básica.

Esta pesquisa conduziu algumas reflexões sobre a formação inicial do professor e da importância de se trabalhar, nas disciplinas matemáticas da licenciatura, os conceitos com profundidade, além da importância de aproximar a matemática escolar da científica nos cursos de formação inicial. O futuro professor precisa refletir durante a sua formação sobre a didatização do saber, pois este é um conhecimento necessário à construção de sua base de saberes para o ensino. Nesse contexto, é essencial que os formadores de professores reflitam sobre a licenciatura em matemática e na criação de espaços de discussão de conceitos e de sua transposição didática para a sala de aula e, também, na necessidade de materiais e ações que auxiliem na tarefa de formar professores.

A análise permitiu identificar os processos de transposição didática na construção do conceito de divisibilidade, tanto na turma de 6° ano do ensino fundamental como na disciplina de Teoria dos Números. Também pontuou alguns problemas no tratamento didático e conceitual gerados pelo afastamento, resultado da didatização da Matemática escolar referente à Matemática científica trabalhada na formação inicial do professor. Ao mesmo tempo, permitiu concluir que a disciplina de Teoria dos Números não fornece o tratamento didático específico para a Matemática da educação básica.

BIBLIOGRAFIA

CHEVALLARD, Yves. La tranposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. Traduzida por Claudia Gilman. Editora Aique: Buenos Aires. 1991.

DUVAL, Raymond. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995. 396 p.

MENEZES, A. P. A. B. Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação). EFP, Recife, 2006. 410 p.

MOREIRA, P. C. e DAVID, M. M. M . S. O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica. Tese (Doutorado em Educação). UFMG, Belo Horizonte, 2004. 195 p.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição Didática. MACHADO, S. D. A. (Org.) Educação Matemática Uma (nova) introdução. 3 ed. revisada, 3 reimp. – São Paulo: EDUC, 2015. p. 11-48. 2015.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática; uma análise da influência francesa. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2011.

RESENDE, M. R. Re-Significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC. São Paulo, 2007. 240 p.

RESENDE, M. R. A Teoria dos Números na Licenciatura em Matemática, Pedagogia e Educação Básica. MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. e MARANHÃO M. C. (Org.) Teoria Elementar dos Números da Educação Básica à Formação dos Professores que Ensinam Matemática. São Paulo: Iglu, 2015. 1-13 p.

Texto recebido: 17/10/2017
Texto aprovado: 14/01/2018