

O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica

The work with mathematical functions from the standpoint of the incompleteness of the institutional work: a theoretical analysis

LUIZ MÁRCIO SANTOS FARIAS¹
EDMO FERNANDES CARVALHO²
BARTIRA FERNANDES TEIXEIRA³

Resumo

Este artigo tem como objetivo associar os elementos e fenômenos da incompletude do trabalho institucional, reconhecendo a sua existência. Isto possibilita a identificação de problemas didáticos (PD) que subsidiarão investigações em Didática da Matemática à luz da Teoria Antropológica do Didático. Para enfrentamento destes problemas, trazemos à baila a razão de ser do Percurso de Estudo e Pesquisa, seu contexto e sua construção. Visando facilitar a compreensão do que consideramos incompletude, utilizaremos elementos de análise do objeto matemático funções. Reconhecer as incompletudes do trabalho institucional conduz o olhar sobre aquilo que restringe o trabalho e portanto, a atividade dos sujeitos na mediação de objetos do saber, possibilitando o questionamento dos modelos praxeológicos dominante e de referência.

Palavras-chave: *Incompletude do trabalho institucional. Problemas de ensino. Percurso de Estudo e Pesquisa.*

Abstract

This article aims to associate the elements and phenomena of the incompleteness of institutional work, recognizing its existence. This allows the identification of didactic problems (PD) that will subsidize investigations in Didactics from the standpoint of Anthropological Theory of the Didactic. To confront these problems, we evoke the reason for being of the Study & Research Programme, its context and its construction. In order to facilitate the understanding of what we consider incompleteness, we will use elements of analysis of the mathematical object functions. Recognizing the incompleteness of institutional work leads the observation on what restricts work and, therefore, the activity of subjects in the mediation of objects of knowledge, making possible the questioning of dominant and reference praxeological models.

Keywords: *Incomplete institutional work; Teaching problems; Study & Research Programme.*

¹ Professor do IHAC/UFBA e do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – PPGEFHC, UFBA/UEFo. Doutor em Didática da Matemática – UM2 – França. Coordenador do NIPEDICMT, lmsfarias@ufba.br.

² Professor assistente, Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - CCET, Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB. Doutorando em Ensino, Filosofia e História das Ciências - UFBA/UEFS. Membro do NIPEDICMT. edmo.carvalho@ufob.edu.br.

³ Mestranda do PPGEFHC- UFBA/UEFS. Servidora do Instituto Federal de educação Ciência e tecnologia da Bahia – IFBA. Membro do NIPEDICMT, bartiraft@yahoo.com.br.

Introdução

Nesse artigo pretendemos apresentar o que consideramos como a incompletude do *trabalho* institucional e, para isso apresentaremos um recorte sobre a incompletude *da atividade*, saindo do lugar comum em que nos encontrávamos nos primeiros trabalhos desenvolvidos no âmbito do grupo de investigação (grupo este que se debruça sobre o estudo dos aspectos do ensino, didática das ciências, matemática e tecnologias) voltando o olhar para o *trabalho* no intuito de compreender as formas de torná-lo completo (compreendendo as formas de tornar completas as atividades matemáticas institucionais⁴). Tal tarefa nos coloca diante de conflitos cognitivos, ante a inexistência de praxeologias que tangenciam a perfeição, além do risco de delimitar sobremaneira o espectro conceitual deste fenômeno.

Desta forma, trabalhamos esta noção em direção à ideia de uma *incompletude* - processo que denota a imprevisibilidade daquilo que torna autônomo o trabalho do sujeito em uma instituição - transpondo a ideia de realizarmos análises praxeológicas de maneira simplória, identificando o que caracteriza os momentos didáticos em um determinado contexto. Para isso, passamos, por exemplo, pela relação do sujeito com os tratados publicados de ensino e aprendizagem, tratados estes que talvez não estejam permitindo um mergulho na atividade institucional, uma busca pela compreensão teórica relacionada com a prática (no caso dos professores), mergulho que representaria a autonomia desse sujeito.

Além disso, olhar para atividade institucional, embasados no sentido empregado por Leontiev (1978)⁵, é compreendê-la como transações recíprocas entre o sujeito e o objeto (neste caso, do saber), sem termos a pretensão de aprofundar a discussão por uma análise psicológica materialista. O desenvolvimento do sujeito resulta do processo de apropriação do ambiente no qual está imerso. O aspecto social, por sua vez, relaciona-se com a atividade desse sujeito. Numa instituição, o sujeito se apropria de tal ambiente cultural (científico – escolar) em situação de ação (diante de saberes matemáticos), dando

⁴ Atividade é o "conjunto de processos em que é envolvido um tema humano, individual ou coletivo, em seus relatórios com o ambiente (contexto, situação)". Entretanto, a atividade não pode ser descrita "fritamente" como uma situação pessoal, apenas como uma ferramenta de trabalho.

⁵ "A atividade é uma unidade molecular... é a unidade da vida mediada pelo reflexo psicológico, cuja função real consiste em orientar o sujeito no mundo objetivo. Em outras palavras, atividade não é uma reação nem um conjunto de reações, senão um sistema que tem estrutura, suas transições e transformações internas, seu desenvolvimento". (LEONTIEV, 1978, pp: 66-7).

significação aos objetos com os quais tem contato à medida em que os utiliza. Todavia, isso não se verifica com os objetos matemáticos nas instituições de ensino.

Por uma questão de ordem didática, após a apresentação da noção de *atividade*, destacamos alguns elementos que compõem aquilo que chamamos de *possível conceito aproximado* do termo *incompletude*, tarefa inatingível, ao menos por enquanto, já que prognosticamos um número significativo de incompletudes do trabalho institucional a partir do contexto em que desenvolvemos nossas investigações. Esses aspectos aparecem também em outros campos (a exemplo do campo jurídico e do campo econômico).

Inicialmente, nos detivemos em fazer uma analogia ao Teorema da Incompletude de Gödel⁶, no contexto intramatemático, para em seguida apresentarmos as referidas noções de *incompletude da atividade institucional* - IAI, exemplificando com elementos oriundos de trabalhos do nosso programa de investigação.

Ressaltamos para a necessidade de pensar nessas incompletudes, em função dos gestos profissionais e escolhas didáticas, aspectos bastante latentes. E ainda, ao compreendermos que o profissional (professor) possui uma série de condições e restrições (condições não alcançadas) relativas às tomadas de decisões, através das quais serão detectadas *lacunas no seu fazer didático* e na sua compreensão teórica sobre o processo no qual está inserido. O que significa que, nesse contexto, surge *um dos tipos de incompletude* quando considerado o processo transpositivo. Este tipo é apenas um daqueles que podemos identificar no âmbito do trabalho institucional do professor.

Ao falarmos do Brasil e a título meramente exemplificativo, existem incompletudes no trabalho com jogos, utilizados como recursos didáticos. Apontamos como prova indiciária, que o jogo não entra na bagagem praxeológica construída para o objeto do saber a ser trabalhado. Citamos ainda as *praxeologias invisíveis*⁷, aplicadas em objetos de saberes escolares de outras áreas do conhecimento, como é o caso da Educação Física. O olhar deve ser apurado e preciso nesta questão, principalmente quando da

⁶ O teorema de Gödel diz: “Qualquer teoria efetivamente gerada capaz de expressar aritmética elementar não pode ser tanto consistente quanto completa. Em particular, para qualquer teoria formal consistente e efetivamente gerada que prova certas verdades aritméticas básicas, existe uma afirmação aritmética que é verdadeira, mas que não pode ser provada em teoria.”

⁷ Para Chevallard (1999), a atividade matemática entendida como uma atividade humana como outra qualquer, pode ser modelada pelo conjunto formado por dois blocos (o saber-fazer e o logos), o qual denominou de organização praxeológica ou simplesmente praxeologia. O que estamos chamando de praxeologias invisíveis, consiste na dificuldade de representação de determinadas praxeologias, o que ocorre em outras áreas do conhecimento como na Educação Física.

institucionalização das aulas das componentes curriculares da Educação Básica, apresentando-se como hipótese o fato de que não são encontradas *ecologias* no sistema de ensino para tais objetos, possibilitando tornar a atividade completa, ou, ao menos, mitigar a sua incompletude.

Antes de avançarmos, é pertinente destacar que não fazemos referência às incompletudes das tarefas matemáticas, ou mais especificamente, às *tarefas matemáticas relativamente incompletas* (LUCAS et al., 2014), mas à *atividade matemática incompleta* (entendida como uma das dimensões do trabalho de um sujeito numa determinada instituição), e sobre a qual levantamos hipóteses. Hipóteses consistentes nesta investigação e que possibilitarão a abertura das incompletudes marcantes atualmente em diferentes frentes de pesquisa.

A este respeito, na parte final deste ensaio, apresentaremos pontos que nos permitem inferir sobre uma *incompletude do conceito de função*. Inicialmente, todavia, traremos elementos objetivando uma conceituação da referida *incompletude institucional*.

Postas essas considerações prévias, nos deteremos às noções de incompletude postuladas em nosso núcleo de investigação, partindo da analogia ao *Teorema da Incompletude*.

Na Matemática, mais especificamente no estudo da Aritmética, falamos em *sistema formal incompleto*, classificação decorrente do fato dos axiomas não terem sido descobertos em sua totalidade. Pensemos também na Geometria Euclidiana, incompleta quando ausente o postulado das paralelas, sendo impossível provar o referido postulado a partir dos axiomas restantes. Assim, o termo incompletude representa lacuna, ainda que não saibamos a sua causa.

No estudo dos números naturais, citamos Gödel para ilustrar nossas reflexões sobre a incompletude do trabalho institucional, aqui referido a partir de algumas hipóteses. Apresentaremos apenas um dos teoremas, o que entendemos como suficiente para desvelar a forma de constituição da incompletude no contexto abordado (aritmética).

Portanto, o primeiro Teorema da Incompletude assegura que:

Qualquer teoria efetivamente gerada, capaz de expressar a aritmética elementar não pode ser tanto consistente quanto completa. Em particular, para qualquer teoria formal consistente e efetivamente gerada que prova certa verdade da aritmética básica, existe uma afirmação aritmética que é verdade, mas não demonstrável na teoria (KLEENE, 1967, p 250).

Em outras palavras, nenhum sistema consistente de axiomas, cujos teoremas podem ser listados por um “procedimento efetivo” é capaz de provar todas as verdades sobre as relações dos números naturais no quadro da aritmética. Para qualquer sistema, sempre

haverá afirmações sobre os números naturais que são verdadeiras, mas que não podem ser provadas dentro do sistema considerado.

Gödel, no intuito de provar seu teorema, representou as afirmações por números. Assim, a teoria que supostamente prova certos fatos sobre números naturais, também o faz em relação às suas próprias afirmações. Caso essa teoria fosse completa, a demonstração das afirmações representadas por propriedades de números seria possível. Entretanto, nenhum número natural existe com certa propriedade. Caso esta qualificação existisse, estaria codificada a *inconsistência* da teoria. Noutra viés, se assumida a *consistência* da teoria, o número não existiria. Desse modo, tornar o sistema completo implicaria em torná-lo ao mesmo tempo inconsistente, ou, dito de outra forma, considerá-lo consistente implica admiti-lo incompleto.

Uma crença nos persegue no itinerário de compreender o que torna a atividade matemática incompleta e como completá-la. Ainda que não tenhamos acesso a todos os elementos que perfariam este processo, existem *indícios* na direção da possibilidade de uma completude relativa.

Caso assumíssemos inicialmente a completude da atividade matemática, este fato, por si só, demonstraria uma inconsistência da nossa proposição, na medida em que não seria possível comprovar todas as maneiras de torná-la completa. Ou seja, mapear a *incompletude do trabalho institucional*, está longe de ser uma tentativa ingênua de tornar completa ao menos uma das atividades que compõe esse trabalho. Ou ainda, considerar a atividade completa é inconsistente do ponto de vista teórico (sobretudo quando analisada em distintas dimensões⁸ no âmbito da Teoria Antropológica do Didático -TAD).

Outra ideia associada à incompletude do trabalho institucional, além daquela da intangibilidade de se alcançar tal completude no campo teórico, vem da compreensão que as dificuldades, no âmbito do ensino dos saberes escolares, parecem mais latentes quando se trata da *exploração de conceitos* nas diferentes práticas institucionais.

Desse modo, não explorar conceitos em diferentes domínios, sejam matemáticos ou de outras áreas do conhecimento, configura-se uma *restrição* institucional importante, na medida em que inviabiliza o desenvolvimento da atividade, relacionada aos diferentes saberes escolares. Em especial, não contribui com o desenvolvimento do momento

⁸ Em nossas investigações, temos realizado um trabalho de mapeamento das incompletudes do trabalho institucional por meio das atividades que compõem o referido trabalho. As dimensões mapeadas são: docente, discente, escola e manuais didáticos. Todavia, as dimensões da atividade que compõem o trabalho institucional, também podem ser associadas aos *níveis de codeterminação didática*.

*didático tecnológico-teórico*⁹, uma das dimensões da referida atividade institucional, sendo este um dos aspectos mais restritos dentre os que vislumbramos como alvo das nossas investigações.

No que se refere à incompletude em decorrência das *lacunas* nos momentos didáticos (em desenvolvimento nas instituições), postulamos que, quando se alcança uma das referidas dimensões da atividade institucional, identifica-se somente o momento de trabalho da *técnica*¹⁰. Entretanto, esta dimensão tem características pouco identificadas, em especial na educação básica. Vislumbramos, por exemplo, a formulação de hipóteses, o levantamento de questões problemáticas, o contraste experimental, a identificação de ferramentas mais adequadas, tudo em conformidade ao apontado por Farras, Bosch e Gascón (2011). Tais posturas são imprescindíveis ao desenvolvimento do momento didático do trabalho da técnica. Mas mesmo nesta ocasião, lacunas de ordem teórico-prática se fazem presentes em algumas instituições.

A integração das posturas supracitadas nas praxeologias dos sujeitos institucionais, por si só, não garante a completude da atividade (aquela desenvolvida em uma determinada instituição preocupada com o ensino de diferentes saberes). Nossa hipótese é que essa atividade somente se aproxima de uma completude quando é dada ênfase à *exploração de conceitos* associada às posturas em relação ao fazer matemático, anteriormente mencionadas. Isto é, a atividade institucional se desenvolve pela indissociabilidade dos momentos de trabalho da técnica e tecnológico-teórico (BOSCH, GASCÓN, 2010).

Acreditamos, todavia, que a atividade institucional não é composta apenas por esses momentos didáticos. Estes momentos, entretanto, possibilitam uma compreensão parcial da referida atividade quando o sujeito estiver diante de tarefas que possuem ecologias¹¹ nas instituições concebidas.

Assim, por meio de nossas investigações, propomos um conceito inicial de *incompletude do trabalho institucional*: considerando o *trabalho* como um conjunto de atividades realizadas e esforços empreendidos por indivíduos com o objetivo específico, e *trabalho institucional*, como conjunto de atividades que envolvem relações entre condições

⁹ Momento ou dimensão em que, de forma mais ou menos explícita, se interpreta a matemática, bem como se constrói, difunde, ensina, aprende e utiliza (BOSCH, GASCÓN, 2010).

¹⁰ Tratando-se da atividade do professor de matemática, é o momento em que se revela o saber-fazer matemático e também didático.

¹¹ Termo com o sentido empregado por Artaud (1997), enquanto *Ecologia Didática do Saber*. Nesse sentido, diz respeito aos questionamentos sobre a real existência, ou inexistência, na instituição onde se instala um saber. Aquilo que o mantém vivo.

determinadas x reais, resultados antecipados x efetivos, tarefas x atividades de trabalho, trabalho planejado x trabalho realizado, no âmbito de uma instituição.

Assim, falar em *Incompletude do trabalho institucional* significa analisar as condições não alcançadas no referido trabalho, sinalizadas por *fenômenos didáticos*. Para mapear essas incompletudes *do trabalho* é indispensável o olhar para as atividades que o compõem. Podem tais atividades estarem relacionadas as instituições, o que implicaria na utilização, pelo sujeito, de diferentes métodos para ações distintas (a depender da motivação material ou ideal). Afinal, a atividade é percebida pelas ações.

O conceito supracitado é demasiadamente amplo, o que justifica a opção em estabelecer um recorte, focando na noção de incompletude da atividade institucional no que tange à compreensão de conceitos matemáticos.

Uma Incompletude da Atividade Institucional: o problema didático da não exploração de conceitos matemáticos

Nosso trabalho se materializa em um programa de investigação no âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD)¹² mediante um projeto intitulado *Projeto Guarda-Chuva*, com investigações visando o desenvolvimento da atividade matemática institucional escolar.

Focamos a análise das incompletudes da atividade institucional no domínio de um problema didático (PD), hoje visto de forma bem definida, o qual chamamos de *problema didático da exploração de conceitos nas praxeologias institucionais na educação básica*, e que associamos a alguns *fenômenos* didáticos, os quais nos permitem aprofundar o seu estudo, apontando características das práticas institucionais e sua relação com os saberes em suas áreas específicas.

O primeiro destes fenômenos é o *vazio didático*¹³. Fenômeno inicialmente pensado e representado pela sensação de uma determinada ausência de alicerce para as organizações

¹² “Esta teoria é uma contribuição importante para a didática da matemática, pois, além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem das organizações matemáticas. [...] A teoria antropológica do didático, segundo Chevallard, estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais” (ALMOULOU, 20017, p.111)

¹³ Fenômeno apresentado na tese de Farias (2010). Posteriormente, o referido fenômeno é discutido conjuntamente com o estudo do tipo clinico em FARIAS et al., 2015.

didáticas¹⁴ dos professores, nas investigações que abordam questões do âmbito educacional, no que se refere ao ensino e/ou a aprendizagem (FARIAS, et al. 2015). Entretanto, ampliamos essa noção visto que, nas investigações desenvolvidas por membros do grupo, temos identificado que o vazio não se concentra apenas ao âmbito da organização para o ensino dos saberes, mas na própria *compreensão da razão de ser* dos objetos a serem ensinados e nos elementos teóricos que fundamentam os métodos de ensino.

Outro fenômeno, discutido de forma mais ampla em investigações na Espanha e há pouco tempo no Brasil (e que cremos ter uma íntima relação com o PD aqui abordado) é a *perda da razão de ser dos saberes* nas práticas institucionais de ensino (BOSCH, GASCÓN, 2010). Este fenômeno se caracteriza pelo desaparecimento do significado do saber no processo transpositivo (nas praxeologias matemáticas institucionais). Nossa hipótese sobre ele é que tal razão de ser pode ser perdida à medida que os conceitos não são devidamente explorados em situações significativas para os sujeitos que estudam e ensinam os saberes escolares. Estudos em andamento, a partir de trabalhos empíricos desenvolvidos, apontam respostas reveladoras dos aspectos que evidenciam a razão de ser dos saberes em jogo nessas investigações.

Além dos fenômenos anteriormente citados, consideramos ainda a *integridade institucional*, termo emprestado de Raymond Breton (1964), aqui adaptado em seu sentido e ao qual empreendemos um significado, referindo-nos a uma atividade que integra um determinado trabalho institucional, que mantém a sua essência e a epistemologia do saber matemático. Ao falarmos de praxeologias matemáticas e de organizações didáticas, ressaltamos que ambas possuem um elo com a instituição, conexão representada pelas praxeologias aceitas na mesma, ainda que não consistentes (aquelas que não atendem às tarefas mais complexas e problemáticas).

Buscamos uma relação entre este fenômeno e a incompletude da atividade matemática institucional. Talvez essa integridade (não epistemológica e sobre a qual precisamos manter vigilância) restrinja o surgimento de novas praxeologias, no intuito de manter a essência da cultura e o conjunto de normas da instituição.

Neste momento, limitaremos nosso estudo a tais fenômenos que tornam visível, ao menos nas nossas investigações, a relação com a compreensão da incompletude da atividade

¹⁴ Refere-se ao conjunto praxeológico didático (blocos do saber-fazer e tecnológico-teórico) relacionados a prática didática de difusão dos saberes matemáticos institucionais.

matemática institucional, buscando uma completude relativa, e certos de que o trabalho institucional é bem mais abrangente. Caracterizamos a completude pela sua relatividade, já que nos faltam substratos para propor sua totalidade.

Aplicando analogicamente o teorema de Gödel suprarreferido, sempre teremos um conjunto de proposições tidas como verdadeiras, ainda que, talvez, não tenhamos formas palpáveis de demonstrar sua veracidade.

A *ausência de um conceito* é apontada por Chevallard e Bosch (1999) como um fator preponderante no bloqueio da evolução do pensamento matemático e, por consequência, da atividade matemática precedida por tal pensamento. Sendo assim cabe a pergunta: seria esta ausência uma incompletude do trabalho institucional e não apenas um elemento dessa incompletude? Os autores questionam ainda se esta ausência se manifestaria apenas em uma maneira de *pensar* ou de *conceber* o mundo, e não a ausência de um sistema de ferramentas da atividade do sujeito, o que poderia modificar de forma drástica o desenvolvimento do trabalho institucional.

Este raciocínio nos conduz a pensar nos tipos de objetos, sua relação com os conceitos ou a ausência destes, o que denominamos *não exploração de conceitos* (problema didático anteriormente enunciado).

Investigaremos os objetos não ostensivos, tais como as *ideias*, *intuições* e *conceitos*, para os quais são atribuídas existências, ainda que não se possa vê-los, dizê-los, mostrá-los, percebê-los por si mesmos (CHEVALLARD, BOSCH, 1999). Compreender a *ausência de conceitos* talvez seja reconhecer uma incompletude institucional, já que não estamos “dando conta” dos objetos não ostensivos, a ponto de torná-los perceptíveis. Todavia, isso é inerente à Matemática como um todo, já que tornar os objetos não ostensivos perceptíveis é necessidade de todas as instituições escolares, evocando sempre os objetos manifestos (palavras, frases, grafismos, gestos, discursos, etc.) sem os quais as barreiras seriam ainda maiores.

Tomemos um exemplo da incompletude analisada pela lente da exploração de conceitos: a relação entre o conceito de função e a aprendizagem de elementos específicos das funções.

Por meio de uma investigação com licenciandos em matemática, ainda em andamento, analisando-se os registros escritos de uma atividade experimentada sobre a função quadrática no domínio matemático gráfico (o que implicou um olhar sobre o duplo estatuto da parábola) questionamos os efeitos da compreensão do conceito global de função e o tipo de tarefa experimentado. Algo implícito, mas que decorre da nossa

hipótese e é resultado da dissociação dos momentos didáticos do trabalho da técnica e tecnológico-teórico.

A questão posta é: qual(is) elemento(s) do conceito materializa(m) o momento tecnológico teórico e implicam em condições alcançadas no estudo do saber ‘funções quadráticas no domínio gráfico’?

Em outras palavras, não explorar amplamente o conceito, se limitando apenas a revelá-lo, conduz ao alcance das condições previstas ou implica em restrições no estudo do saber? A experimentação desta tarefa será discutida a seguir.

A utilização da Teoria Antropológica do Didático na compreensão das incompletudes das atividades matemáticas institucionais

Iniciamos essa reflexão pela ideia de *atividade*, implícita nos trabalhos que temos desenvolvido em nossas investigações. O sujeito, na sua relação com o mundo e com as instituições, apresenta algumas necessidades que devem ser satisfeitas, como, por exemplo, manipular os objetos matemáticos por meio dos *objetos ostensivos*¹⁵. Esta necessidade é o que regula e orienta a atividade concreta do sujeito em seu meio objetivo. Porém, o meio externo também cria as necessidades dos indivíduos, levando-os a agir. Para Leontiev (1987), não é qualquer processo que pode ser chamado de *atividade*. Este termo designa apenas aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente, percebendo e compreendendo objetos *não ostensivos* (como os conceitos). Transpondo para a didática de uma área específica, Chevallard (1999) considera que o trabalho é a base de toda atividade humana, e conseqüentemente da atividade matemática. Nela, existem tarefas que são executadas à medida que se constituem como necessidade do sujeito. As relações do sujeito com um determinado objeto cultural (dentro do sistema de ensino da matemática, por exemplo) e as necessidades que regulam sua atividade nessa instituição tem sido alvo de estudos sob a ótica da antropologia da didática.

¹⁵ “O problema da “natureza” dos objetos matemáticos e o de seu funcionamento na atividade matemática conduziram Chevallard e Bosch (1999) a estabelecer uma dicotomia fundamental que os distingue em dois tipos: ostensivos e não ostensivos. Esses autores falam de objetos ostensivos [...] para se referir a todo objeto que, tendo uma natureza sensível e certa materialidade, tem, para o sujeito, uma realidade perceptível. Pode-se dizer, dessa forma, que os ostensivos são os objetos manipuláveis na realização da atividade matemática” (ALMOLOUD, 2017, p. 119).

Não analisaremos aqui, ainda que reconheçamos sua importância, as *influências do ambiente familiar* nas praxeologias a serem desenvolvidas numa instituição que abrigue um determinado saber. Da mesma forma, não aprofundaremos a questão da *avaliação do estudante*, que numa perspectiva antropológica, implica em analisar as sujeições institucionais a que se submetem os sujeitos nas suas relações com o saber (pessoal e institucional). Todavia, informamos que determinados instruções oferecidas aos estudantes causam adaptações às formas particulares de pertencimento à instituição, o que não significa dizer que tal pertencimento implique necessariamente na compreensão da atividade institucional.

Refletindo sobre os referidos treinamentos, pensemos sobre o *reconhecimento de conhecimentos práticos e teóricos* ensinados nas instituições, tal qual fora discutido por Castela (2011) em sua investigação. Essa pesquisadora reescreveu o modelo praxeológico, explicitando-o, subdividindo a componente tecnologia¹⁶ e ressaltando a necessidade de olharmos para duas dimensões da tecnologia (discurso que justifica as técnicas), sendo uma prática e outra teórica.

O modelo praxeológico estendido, tal como proposto por Castela, é extremamente útil, por trazer à baila outro fenômeno que sinaliza a existência de uma incompletude: *teoria x prática*.

Possivelmente, em determinados momentos diante de uma tarefa, o sujeito pode estar consciente das ferramentas tecnológicas que justificam as técnicas comumente utilizadas no âmbito prático, e, neste caso, a incompletude da atividade institucional seria relativa. Mas porventura esse mesmo sujeito pode não estar consciente da componente teórica (sua praxeologia integraria tecnologias práticas e não teóricas). Descrever e interpretar esses fatos e seus efeitos necessita muitos estudos empíricos.

O modelo estendido conduz a outra modalidade de incompletude embasada em Chevallard (1999) no que tange ao conceito de *praxeologia* enquanto *ação humana*. Ele comparou, naquela oportunidade, a interrupção da praxeologias (final da escala de sua vida institucional) com uma espécie de incompletude, caracterizada, por exemplo, por

¹⁶ O modelo praxeológico estendido se insere na Teoria Antropológica do Didático, a qual oferece um modelo para o estudo da atividade humana. Chevallard reconhece a praxeologia como uma unidade mínima da atividade humana, com quatro componentes: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Sinteticamente, a tarefa é o que se faz, a técnica é a maneira de fazer, a tecnologia, um discurso que produz, justifica e explicita a técnica. A teoria, por sua vez, produz, justifica e explica a tecnologia. O modelo praxeológico estendido considera, diferentemente do clássico, que a tecnologia tem dois componentes: teoria e prática.

tarefas incorretas, técnicas mal esboçadas, tecnologias incertas, teorias inexistentes ou inconsistentes.

Essa perspectiva complementa a ideia de que a atividade matemática institucional se completa quando coexistem dois momentos didáticos nas práticas institucionais: o momento do *trabalho da técnica* e o momento *tecnológico-teórico*, como forma de manter viva a atividade matemática numa instituição.

No campo das investigações em Didática da Matemática, outro indício de incompletude do trabalho institucional é a dificuldade que os pesquisadores possuem de realizar análises praxeológicas, o que representaria um grau de profundidade da suposta análise e um domínio do saber em estudo como objeto de investigação.

Se por um lado a atividade de um sujeito numa instituição é relativamente incompleta (pelo fato deste não possuir domínio do discurso racional - tecnológico teórico), seria também incompleta a atividade daquele que investiga e analisa as praxeologias destes sujeitos (pesquisador)? Existem ferramentas capazes de identificar o que determina as restrições institucionais à atividade deste sujeito como mediador dos objetos matemáticos?

Essas hipóteses são alvos de objetos de investigação do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias, integrante dos grupos de pesquisas da Universidade Federal da Bahia. A referida dificuldade dos pesquisadores em realizarem a contento análises praxeológicas dando conta das suas diferentes dimensões, tem sido estudada imbricada com o fenômeno do vazio didático.

Quanto ao modelo praxeológico apresentado por Castela, em dois projetos de tese (que possuem objeto matemático no aprofundamento dos fenômenos didáticos relacionados aos conceitos de funções) o olhar volta-se para aspectos tecnológicos práticos e teóricos, nas relações pessoais dos estudantes, futuros professores, com os objetos do saber.

Nesse contexto, apresentamos a seguir um dispositivo didático e de investigação (FARIAS, CARVALHO, 2016), como possível alternativa ao enfrentamento das incompletudes identificadas, sejam elas mais amplas, contidas no trabalho institucional, ou mais restritas, contidas na atividade.

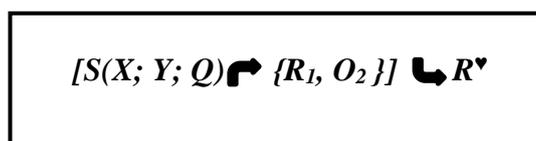
Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP): um caminho para compreensão e enfrentamento das incompletudes

Nas investigações do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisas, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias - NIPEDICMT, os pesquisadores experimentam a Engenharia Didática de primeira geração (ARTIGUE, 1988) e de desenvolvimento (PERRAN-GLORIAN, 1992) enquanto abordagem metodológica, no seio do programa de investigação “*Incompletude do trabalho institucional e não exploração dos conceitos*”. Mas, especialmente investem esforços na utilização do *Parcours d'étude et de recherche* - PER (CHEVALLARD, 2009), traduzido para a língua portuguesa como *Percurso de Estudo e Pesquisa* – PEP.

O PEP é um dispositivo didático que conduz ao método de nossas investigações. Chevallard (2009) propôs um trabalho com questões abertas e que pode desenvolver a atividade matemática na instituição, trazendo consigo uma dimensão interdisciplinar.

A proposição do PEP, feita inicialmente por Chevallard (2009), é aqui enunciada como um esforço, fruto da comunidade de pesquisadores em Didática da Matemática, no intuito de suprir uma lacuna referente ao trabalho do sujeito numa instituição. Segundo Chevallard (2009), em um estado bruto de desenvolvimento didático numa classe, denotada por $[X, Y]$, onde $Y = \{y\} = \mathbf{professor}$, quando uma questão Q é estudada, o professor traz a sua resposta, R_y , para supostamente tornar esta a resposta R^\vee da instituição. Esse sistema, denominado por Chevallard (2009) de *sistema herbartiano*, pode ser representado da seguinte forma:

Figura 1: sistema herbartiano



Fonte: Chevallard (2009)

em que $R_1 = R_y$, $O_2 = \wp$ e $R^\vee = R_y$

Por sua vez, a praxeologia \wp aparece como aquela que permite preparar a resposta R_y que X enfim tomará como sua.

Para a existência de um PEP, razoavelmente considerado, é necessário que a organização didática concebida ou observada manifeste um número de condições que afetem simultaneamente a *mesogênese*, a *topogênese* e a *cronogênese* (CHEVALLARD, 2009). Fator este fundamental para proposição de um PEP.

Em síntese, segundo esse autor, a *mesogênese*, ou a "fabricação" do *milieu M*, é a primeira condição a ser satisfeita, visto que M não está "pronto", o que só ocorrerá a partir de várias produções *externas e internas* à classe. Nesse sentido, a resposta dos alunos traz um selo

da instituição, como uma espécie de carimbo institucional, e por vezes praxeologias coerentes com a instituição, mas inconsistentes do ponto de vista epistemológico.

Falamos aqui de um modelo em que as respostas produzidas pelos alunos, ou quaisquer organizações discretamente usadas por eles, não possuem espaço, pois há um forte apelo pelas respostas com tal selo institucional. O trabalho institucional é restrito às marcas passadas aos estudantes por manuais didáticos e, especialmente, pelas escolhas didáticas dos docentes de acordo com uma cultura institucional consolidada.

A proposta de Chevallard (2009) é que o *topos*¹⁷ deve receber uma importante extensão no que se refere às práticas institucionais. Um estudante pode não só elaborar uma resposta pessoal R_x que deve ser analisada quanto à sua validade frente à epistemologia da matemática, mas também propor a introdução de uma obra/trabalho nesse *milieu* M. Dessa forma, a resposta R_y não tem hierarquicamente um *status* maior do que as respostas R_x , praxeologias pessoais dos estudantes coerentes com a resposta com selo institucional. Mas, o elemento que, para Chevallard (2009), deve distinguir o PEP de outros episódios didáticos usuais em uma escola e também das engenharias didáticas empreendidas em algumas investigações, é a *cronogênese*. Uma questão pertinente nessa discussão, diz respeito ao fato de que as obras dos sujeitos (num processo de dilatação do tempo didático) são usadas para desconstrução de respostas com carimbos institucionais, o que caracteriza um percurso aberto.

No esquema herbartiano, questionado por Chevallard (2009), o professor representante do sistema de ensino, gerencia o que pode ser chamado *economia praxeológica do estudo*, decidindo sobre a inclusão ou não de um trabalho e do seu estudo particular, além do grau de profundidade desse estudo. Nesse caso, as restrições institucionais impostas nessa classe, impulsionam o professor a subestimar o lugar dado aos trabalhos não abrangidos por essa disciplina, conduzindo ao risco de proposição de uma resposta R_v relativamente incompleta.

Como já foi dito anteriormente, o PEP confronta esse esquema, e, por consequência, não só podemos conduzir a ação do sujeito na instituição classe [Y, X], a respostas relativamente completas às questões Q (considerando que os estudantes podem incluir obras nesse novo sistema) como será possível reconhecer e controlar a incompletude do

¹⁷ Caracteriza o papel dos sujeitos atores do sistema didático no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

trabalho institucional, à medida que se torna clara a razão de ser do saber imbricado na questão Q, quando analisadas as praxeologias dos sujeitos dessa instituição.

Este é um trabalho que foge ao modelo de ensino de respostas prontas, embasado na memorização, podendo tornar atingível e possível o trabalho de investigação matemática, compatível com a proposta de enfrentamento das incompletudes do trabalho institucional no âmbito da atividade matemática.

A compreensão do conceito de função: uma incompletude da atividade institucional mapeada na passagem de dois níveis de escolaridade

A multiplicidade de conceitos de alguns saberes tem imposto barreiras para a compreensão destes conceitos. Por exemplo, *o conceito de função*, um dos mais importantes da matemática escolar, por toda sua carga e razão de ser social tem se tornado, com o passar dos dias, o calcanhar de Aquiles nos processos de ensino e da aprendizagem (principalmente na aprendizagem).

Interessa-nos compreender as dificuldades imbricadas no ensino de funções, seus conceitos e suas representações. Nessa jornada de reflexão, a *não compreensão conceitual desse saber*, enquanto objeto cultural numa instituição, tem sido o problema didático central das pesquisas do núcleo.

Afirmamos anteriormente que a atividade matemática institucional é relativamente incompleta em decorrência da separação dos momentos didáticos do trabalho da técnica e tecnológico teórico. Além disso, não há a compreensão da razão de ser dos objetos e da existência de uma relação direta com as necessidades dos sujeitos¹⁸ que a desenvolvem, isto é, não há compreensão da razão de ser social das práticas desenvolvidas.

Assim, consideramos que elementos do próprio objeto matemático, como por exemplo, o duplo estatuto da parábola (no caso de sua relação com a função quadrática) ou os múltiplos conceitos associados (função quadrática enquanto máquina, a própria definição, relação de variabilidade entre grandezas, etc.), que ocasionam obstáculos didáticos, ainda são resultados de uma inconsistência praxeológica (como técnicas mal esboçadas, por exemplo) representada pela fragilidade de um (ou alguns) dos elementos do conjunto que compõe a praxeologia [T, τ , Θ , Θ].

¹⁸ As necessidades são de diversas ordens (sociais, por exemplo). Imaginemos que, para resolver problemas de otimização, o sujeito se engaje num processo de aquisição de conhecimentos que o permita resolver o problema posto. Mas salientamos que não acreditamos serem estas as únicas formas de materializar as necessidades dos sujeitos.

Um exemplo deste problema surge ao utilizarmos a equação da parábola $y = x^2 + 1$, para representar uma função. Neste caso, a equação é compreendida porque ensinada desta forma (como uma função), e tal fato pode ser notado tanto na educação básica como no ensino superior. Esta é uma inconsistência na bagagem praxeológica dos sujeitos decorrente do fato de não haver compreensão do conceito global de função? Podemos dizer o mesmo a respeito da representação gráfica de uma função, que em muitas situações é entendida como a própria função, o que denota uma necessidade de olharmos para a representação da linguagem natural e sua relação com a linguagem matemática? Tais questionamentos despertam nosso interesse em analisar praxeologias matemáticas e relações pessoais de estudantes de um curso de licenciatura em Matemática, além de outras investigações em curso referentes a estudantes da educação básica em diferentes saberes da matemática (ou de qualquer outra disciplina).

Empiricamente, por meio do desenvolvimento de um Percorso de Estudo e Pesquisa, vislumbramos a possibilidade de mitigar alguns dos pontos que tornam a atividade do sujeito incompleta numa instituição (aula da componente curricular Pré-Cálculo). Para isso, no desenho do PEP, consideramos o uso de tecnologias informáticas como meio para aproximar as necessidades dos sujeitos de sua atividade. Tal utilização deve contribuir com o desenvolvimento da atividade matemática institucional, mas não garantirá a completude do trabalho, já que outros aspectos não de ser considerados bem como a validade de certas conjecturas, reveladas no transcurso das investigações.

No intuito de tornar o mais acessível o quanto aqui tratado, trazemos um recorte de uma das investigações envolvendo esta problemática: *conceito de funções e representações*. Nas análises preliminares deste estudo, presumimos dois fenômenos didáticos que caracterizam a referida incompletude do trabalho institucional, tratada aqui mais restritamente à atividade matemática: *a perda da razão de ser e o vazio didático referentes ao ensino/estudo do saber supracitado*.

Diante de tipos de tarefas específicas como “Analisar a translação da parábola no sistema de coordenadas cartesianas”, ou “Analisar a translação vertical da parábola de acordo com um dos coeficientes da expressão algébrica” (equação da parábola), vislumbramos um primeiro elemento de entrave da atividade matemática institucional representando pela seguinte questão: *porque estudar essa noção ao tratar da ideia de função?* Compreender o porquê já é um caminho para desvendar os mistérios da atividade tornando-a relativamente completa (já que, ressaltamos, não temos a pretensão de apontar como seria a totalidade da sua completude).

No contexto investigado, qual seja, a aula numa componente curricular de um curso de formação de professores de matemática, tal tarefa não fora realizada com plena compreensão do que fora solicitado. Nem mesmo houve uma reflexão sobre esse objeto da cultura daquela instituição ou o questionamento para qual necessidade ele estaria completando a atividade dos sujeitos nas mediações com o objeto.

O que chamaremos aqui de tarefa T1¹⁹, solicitava: *Consideremos uma função quadrática dada pela expressão $y = f_1(x) = ax^2 + k$ onde a é uma constante real, com $a \neq 0$. Observemos que, se $a = 0$ a função obtida não será do segundo grau, pois será a função constante nula. Qual a ação do coeficiente k quando comparamos o gráfico de f_1 ao da função $y = f_0(x) = x^2$?*

Primeiramente, deve-se considerar um elemento presente nessa tarefa que deve contribuir para a mitigação do fenômeno da incompletude da atividade institucional, qual seja, *a relação entre a linguagem natural e a linguagem utilizada na estrutura interna da matemática*. Quando nos referimos à equação $y = ax^2 + k$ como uma função, tratamos do objeto em sua totalidade? Ou elucidamos aspectos que revelam a fragilidade nas praxeologias pessoais dos estudantes e dos professores? Essa questão é secundária à primeira que trata da necessidade primordial de estudarmos esse objeto matemático. A atual forma do ensino por meio de tarefas que pretendem conduzir o aluno a situações de reflexão sobre a prática, mas que não revelam sua razão de ser, tem sido apontada por Matheron (2002) como motivo de desencanto dos estudantes pela matemática.

Isso revela muito mais que uma incompletude relativa de determinada instituição. Mostra que existe uma *crise* no ensino de matemática com consequências importantes na aprendizagem, reflexo de instituições em que as situações fundamentais não possuem ecologias. Longe de dizermos que este é o único problema, ou única forma de olhar para a suposta crise no ensino de alguns saberes matemáticos na educação básica e superior, ressaltamos que o que fora apresentado aqui, até o momento, é uma forma de olhar para o fenômeno com a lupa da *Teoria Antropológica do Didático*.

Para a tarefa T1, conforme requerimento da instituição, pautados nos parâmetros do modelo epistemológico dominante - MED, era necessário em primeiro lugar, considerar alguns valores para k (por exemplo: $k = 1$, $k = 2$, $k = \frac{1}{2}$ e $k = -1$), o que poderia ser feito para qualquer outro valor real, verificando-se o que acontece com a função representada pela equação $y = ax^2 + k$ em comparação ao gráfico da função representada por $y = f_0(x) = x^2$.

¹⁹ Tarefa extraída de <http://ecalculo.if.usp.br/>.

Essa análise *a priori*, tão necessária nos estudos dos fenômenos didáticos pelo papel de antever possíveis comportamentos dos sujeitos diante das situações propostas para o ensino dos saberes matemáticos, tem sido utilizada como fator de limitação, em decorrência da cristalização de praxeologias desses sujeitos. Assim como apontamos anteriormente, no contexto de uma investigação ainda não concluída, o Percorso de Estudo e Pesquisa é apontado como possível caminho para minimização dos efeitos dos fenômenos didáticos relacionados à incompletude da atividade matemática institucional. Retomando o requerimento institucional das praxeologias dos sujeitos daquela instituição, observamos que para $k = 1$ cada ponto do gráfico de $y = x^2 + 1$ tem ordenada igual a uma unidade a mais do que a ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x^2$. O gráfico de $y = x^2 + 1$ é o resultado de uma translação vertical de uma unidade da parábola que é o gráfico de $y = x^2$.

Por meio da análise das respostas dos estudantes para a tarefa T₁ proposta, inferimos mais um elemento ausente na atividade matemática do sujeito na instituição aula de matemática. Quando falamos da razão de ser do objeto nas praxeologias de professores e estudantes, não estamos tratando da sua ausência, mas da falta de sua compreensão, oculta nas práticas dessas instituições.

Dentre os doze estudantes que integraram a experimentação da atividade, uma estudante não apresentou resposta para a tarefa, justificando sua ação pelas dificuldades em compreender o enunciado proposto. Ora, estamos tratando de uma situação não caracterizada como fundamental, incorrendo no risco do desencanto destes estudantes com a atividade matemática. Seis alunos apresentaram solução equivocada, o que significa que tendo como parâmetro aqueles que evocavam a instituição, as praxeologias dos sujeitos participantes eram de certo modo inconsistentes, pois lhes faltava, naquilo registrado, o discurso que justificasse suas técnicas (técnicas errôneas que foram apresentadas).

Fizemos referência à incompletude no aspecto mais restrito da atividade matemática, a indissociabilidade dos momentos didáticos de *trabalho da técnica* (bem desenvolvido nas práticas da maior parte dos estudantes participantes da experimentação), e o *tecnológico-teórico* (de revelar a compreensão do porquê se desenvolve tal atividade; porque utilizam-se as técnicas que foram ensinadas, se existem outras, como desenvolver outras ferramentas matemáticas; etc).

Ainda nesse sentido, Castela (2011) propõe que olhemos para duas vertentes do discurso tecnológico, sem as quais acreditamos estar revelando uma lacuna na atividade matemática, a tecnologia prática e tecnologia teórica, para diversos saberes.

A título de exemplo das inconsistências nas praxeologias pessoais dos estudantes, destacamos a resposta de um dos alunos, cujas estratégias apresentamos a seguir. O referido aluno afirmou em parte de sua resposta que o gráfico se desloca k unidades para cima. Essa afirmação indica que o mesmo considera apenas a translação vertical para cima, ou seja, implicitamente assume para k valores reais positivos. Em outras palavras, qualquer que seja o valor de k a translação vertical ocorrerá apenas para valores positivos sobre o eixo das ordenadas. Ele não utilizou parâmetro visível para apresentar uma generalização, entretanto, considerou o gráfico da função representada pela equação $y = x^2$ que é esboçada em sua resposta. Talvez o estudante tenha feito de forma implícita, num processo puramente mental, esboçando o gráfico de $y = x^2 + k$.

Este fato sinaliza que não está bem definido para este estudante o que a constante k representa na função se comparada com a $f_0(x)$. Outro ponto ausente nas soluções dos doze estudantes, lacuna provida pela instituição ao compartimentar o estudo dos variados saberes matemáticos em espécies de caixas, analisando o duplo status da parábola, enquanto gráfico de uma função e objeto da geometria analítica.

Esses compartimentos que mencionamos, podem deixar de serem essenciais em trabalhos em que parte-se da necessidade de revelar a razão de ser dos saberes ensinados/estudados, necessitando que o estudo epistemológico-histórico deixe de ser um trabalho do pesquisador e integre as práticas de professores e estudantes, podendo ocorrer antes da proposição de uma questão aberta que integra o PEP (para professores) e no decorrer do desenvolvimento deste por meio de um conjunto de atividades de estudo e pesquisa – AEP (para professores e alunos).

Os dados desse experimento indicam que o trabalho dos estudantes está alicerçado na técnica, ou seja, revelam a prevalência da técnica sobre o significado do saber estudado. A afirmação de que a parábola é deslocada para cima ou para baixo k unidades surge nas estratégias desses estudantes como observação direta a partir dos gráficos construídos com diferentes valores para k , mas que pode ser facilmente generalizado. Surgindo daí a resposta de forma quase automática, sem reflexão sobre o porquê desse deslocamento ocorrer verticalmente, ou desconhecendo noções que auxiliam na compreensão do conceito desse tipo de função.

Uma abordagem mais elementar da representação gráfica de uma função é o fato do trabalho não ser pautado na exploração da relação entre as diferentes representações da tarefa de conceituação, devendo ser um dos fatores que ocasionam o problema da dificuldade na análise da relação entre as variáveis ou grandezas envolvidas numa tarefa. É provável que o trabalho no campo numérico, levado das praxeologias matemáticas da Educação Básica ao Ensino Superior, seja uma restrição significativa, implicando na dificuldade de apresentar soluções que evocam conhecimento na relação dos quadros da análise, álgebra e geometria. Além disso, a noção de função não é estabelecida no contexto da *variabilidade* (REZENDE, PESCO, BORTOLOSSI, 2012), mas, em termos de uma *correspondência estática entre os valores das variáveis “x” e “y”*, conseqüentemente, a representação gráfica da função é normalmente esboçada a partir da construção de uma tabela de valores *notáveis*, numa analogia a uma máquina de entrada x e saída y. Isso implica dizer que é em termos da correspondência ($x, y = f(x)$) que se estabelece a noção de função em alguns manuais didáticos utilizados na Educação Básica. Como já dissemos, a tarefa T₁ não tem características de situação fundamental, nem é aberta no sentido de permitir caminhos diferentes no que se refere às estratégias que seriam adotadas, mas de qualquer modo, permitiu reconhecer na instituição certas restrições no desenvolvimento da atividade matemática para delinear o modelo epistemológico de referência que se apresentará na forma de um PEP.

Considerações finais

Apresentamos nesse estudo ainda embrionário, alguns elementos que destacam a incompletude do trabalho institucional, enquanto trabalho com saberes das variadas ciências numa instituição que se debruça sobre a tarefa de difusão do conhecimento. Associamos a proposição de um conceito, ainda aberto, a outros fenômenos didáticos, tais como a *razão de ser* dos objetos das ciências, aqui delimitados aos matemáticos, e o *vazio didático*, de suma relevância para compreensão da suposta incompletude.

Vislumbramos uma relação muito íntima entre problema didático e incompletude do trabalho institucional, o que possivelmente esteja associado a diferentes problemas didáticos. Todavia, frisa-se para uma característica desse fenômeno: *a inconsistência das praxeologias dos sujeitos nas instituições*. A nosso ver, fruto da não compreensão dos conceitos estudados.

Nesse sentido, o PEP tem potencial para ser a tarefa necessária a fim de manter uma atividade institucional viva, a desconstrução e posterior reconstrução praxeológica, como forma de minorar as possíveis dificuldades decorrentes das incompletudes institucionais, especialmente aquelas que ganham corpo com a não compreensão dos conceitos.

Em suma, esse programa de investigação em curso tem como perspectiva um investimento não só na proposição de Percursos de Estudo e Pesquisa, mas também de análises das praxeologias pessoais dos professores e sobretudo dos estudantes.

Referências

ALMOULOUD, S. Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTAUD, M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), Actes de la IX^{ième} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate, 1997, pp.101-139.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: *La Pensée Sauvage-Éditions*, v. 9.3, p.281-308, 1988.

BOSCH, M. GASCÓN, J. Fundamentación antropológica e las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”, IN: Bronner, Alain et al. *Apports de la théorie anthropologique du didactique: Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. IUFM de l'académie de Montpellier 2010, p.55-90.

BRETON, R. “Institutional Completeness of Ethnic Communities and the Personal Relations of Immigrants”, **American Journal of Sociology**, Vol. 70, No. 2, Sep., 1964.

CASTELA. C. Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université 2011.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 19, nº 2, 1999.

_____. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. In: **15^e Ecole d'été de didactique des mathématiques**, août 2009, France. **Cours à l'EE...** Clermont Ferrand - IUFM, 2009, disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_1_EE_2009.pdf. Acesso em 15/06/2016.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. **Recherches en didactique des mathématiques - RDM**, Grenoble (France), vol. 19, no 1, 1999, p. 77-124.

FARIAS, Luiz Marcio Santos. **Estudo das Inter- relações entre os domínios numérico, algébrico e geométrico no ensino de matemática no secundário**: uma análise das práticas de ensino em classes de troisième e seconde. 2010. 378 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Laboratório Interdisciplinar de Pesquisa em Didática, Educação e Formação, Universidade de Montpellier 2, Montpellier, França, 2010.

FARIAS, L. M. S. et al. Uma análise do tipo clínico para compreensão do vazio didático. In: SANT'ANA, C. C. SANTANA, I. P., AMARAL, R. S. (Orgs.). **Grupo de estudos em educação matemática**: ações cooperativas e colaborativas constituídas por várias vozes. São Carlos: Pedro & João Editores, 2015, pp.137-162.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F. DA ENGENHARIA DIDÁTICA AO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA: O CASO DAS FRAÇÕES NO 6º ANO. In: Claudinei de Camargo Sant'Ana Irani Parolin Santana Rosemeire dos Santos Amaral. (Org.). **Ações colaborativas e cooperativas em educação**: entre História, Ensino e Formação de Professores. 1ed.São Carlos: Pedro & João Editores, 2016, v. 1, p. 125-152.

FARRAS, B. B., BOSCH, M. GASCÓN, J. Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática em la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. **Enseñanza de las ciencias**, v. 29(3), p. 339-352, 2011.

KLEENE, S. C. **Mathematical Logic**. Mineola, New York: Dover Publication, 2002. Originally published: New York: Wiley, 1967.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

_____. **El desarrollo psíquico del niño en la edad preescolar**. Em V. Davidov & M. Shuare (Org.). La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS: antología (pp.57-70). Moscou: Editorial Progreso, 1987.

LUCAS, C. O. et. al. Aspectos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.16, n.1, pp.1-24, 2014.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1992). **Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e**. Thèse de doctorat. Paris: université de Paris 7.

MATHERON, Y.; SALIN, M. H. Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. In: **Revue française de pédagogie**, volume 141, 2002. Vers une didactique comparée. pp. 57-66.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. **Anais da 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.** ISSN 2237-9657, pp.74- 89, 2012.