

La notion de variable dans le modèle praxéologique

HAMID CHAACHOUA¹

ANNIE BESSOT²

Abstract. The introduction of the notion of variable in the praxeological model is connected, in part, to the reasons of its introduction in the theory of didactical situations. At a first step, we are going to recall these reasons and then we will show why we are interested in introducing the notion of variable in the anthropological theory of the didactic.

Résumé. L'introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique rejoint en partie les raisons de son introduction dans la théorie des situations didactiques. Nous allons dans un premier temps rappeler ces raisons puis présenter l'intérêt d'introduire la notion de variable dans la théorie anthropologique du didactique.

1. Pourquoi la notion de variable dans la théorie des situations didactiques ?

Un fondement de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997a) est la modélisation d'une connaissance par une situation :

Le principe méthodologique fondamental de la théorie des situations [...] consiste [...] à définir une connaissance par une « situation », c'est-à-dire par un automate qui modélise les problèmes que cette connaissance seule permet de résoudre de façon optimale. (Brousseau, 1994).

Les situations sont des modèles *minimaux* pour étudier comment une connaissance intervient dans les rapports particuliers qu'une personne établit avec un *milieu* pour y exercer une action déterminée. La notion de variable apparaît comme intimement liée à cette modélisation.

Ces modèles doivent présenter des variantes et des variables. On peut alors chercher par des moyens mathématiques et expérimentaux, quelles valeurs de ces variables peuvent déterminer les conditions optimales de diffusion de connaissances déterminées, ou expliquer celles qui apparaissent comme réponse (théoriquement) optimale aux conditions proposées à l'élève. Pour des valeurs données de ces variables il existe au moins une stratégie optimale (du point de vue de son coût de mise en œuvre, de sa fiabilité, de son coût d'apprentissage...) et une ou des connaissances qui lui correspondent. Nous appelons *variable cognitive*, une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale. Les *variables didactiques* seront parmi les variables cognitives celles qui peuvent être fixées par l'enseignant. (Brousseau, 1997b, pp.3-4)

L'introduction des variables a clairement pour objectif de *structurer* un ensemble de situations spécifiques d'une connaissance ou d'un savoir et de rendre *calculable* cette modélisation *via* la théorie des automates.

¹ Laboratoire Informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes, France – Hamid.Chaachoua@imag.fr

² Laboratoire Informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes, France – annie.bessot@imag.fr

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza

Eje 1. *La TAD ante otros enfoques en didáctica*

De ce point de vue, un ensemble de situations spécifiques d'une connaissance ou d'un savoir sera caractérisé par un ensemble *restreint* de variables pertinentes.

La notion de variable apparaît avant tout comme un outil méthodologique dans un processus de modélisation, associée à l'analyse *a priori* d'une situation particulière ou fondamentale. Elle permet d'envisager un univers calculable de possibles comme variation d'une situation attachée à un savoir ou à une connaissance pour :

- générer un champ de problèmes mathématiques et de pratiques spécifiques du savoir visé ;
- distinguer des significations différentes d'un même savoir en générant des situations différentes du point de vue didactique mais équivalentes du point de vue du savoir (aspect épistémologique incluant les raisons d'être d'un savoir) :

Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. Seules, les différences de situations qui affectent le concept, sont dans le champ de la didactique, elles sont le fait de variables à déterminer dans chaque cas. (Brousseau, 1981, p. 109)

- produire des genèses expérimentales d'une connaissance (Ingénierie didactique) ;
- étudier les conditions d'existence d'une connaissance dans une certaine réalité scolaire et les raisons des difficultés observées. (Lire à ce propos l'article de Guy Brousseau 1995 à propos du théorème de Thalès).

2. Origine de l'introduction de la notion de variable dans la Théorie anthropologique du didactique

Les recherches de l'équipe MeTAH s'inscrivent dans le cadre théorique de la TAD mais aussi dans le domaine des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH). Il en découle nécessairement un travail de modélisation informatique des objets de savoir à enseigner, des connaissances d'un sujet, et des propositions pour doter les environnements informatiques d'outils de calcul afin de produire des diagnostics, des rétroactions vers l'élève ou le professeur... Cette nécessité, nous a conduit à développer un cadre de référence T4TEL³ (Chaachoua, Ferraton, Desmoulins, 2013 ; Chaachoua, 2015).

Le développement de T4TEL s'est fait en s'assujettissant à la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999) et plus particulièrement à l'approche praxéologique (Bosch & Chevallard, 1999) : ce modèle calculable du point de vue informatique (et non du point de vue de la théorie des automates), représente une formalisation du modèle praxéologique répondant à la double exigence, celle de calculabilité d'une part et celle de production de différents services EIAH d'autre part.

Ce travail de modélisation nous a conduit à introduire la notion de variable pour formaliser et structurer des types de tâches, objet premier de T4TEL comme nous le montrerons plus loin.

Cependant, cette introduction trouve son plein intérêt pour l'étude du didactique en dehors de toute problématique EIAH et donc pour la TAD : en cela on retrouve des proximités avec l'introduction de la notion de variable dans la TSD.

³ T4TEL : *T4* renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et *TEL* pour Technology Enhanced Learning.

3. Formalisation de la praxis dans le modèle praxéologique T4TEL

Dans la TAD on définit la notion de praxéologie ponctuelle comme suit :

Autour d'un type de tâches T , on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d'une *technique* (au moins), τ , d'une technologie de τ , θ , et d'une théorie de θ , Θ . Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie *ponctuelle*, ce dernier qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T . (Chevallard, 1999, p. 228)

Il ressort de cette citation qu'une praxéologie ponctuelle peut regrouper plusieurs techniques τ_i pour un même type de tâches T . Une praxéologie ponctuelle peut donc donner lieu à plusieurs praxis $[T, \tau_i]$. Dans T4TEL, pour des raisons de calculabilité, nous définissons pour chaque technique accomplissant un même type de tâches T une *praxéologie ponctuelle élémentaire* : il y a autant de *praxéologies ponctuelles élémentaires* que de techniques accomplissant un unique type de tâches T .

Les praxéologies ponctuelles élémentaires permettent de « remonter » par regroupement autour de T aux praxéologies ponctuelles au sens de la TAD.

D'une manière générale, une institution d'enseignement I organise pour un type de tâches T donné l'étude de ses techniques tout au long de la scolarité. Mais, comme le précise Yves Chevallard (1989), à un niveau scolaire donné, le nombre de ces techniques est limité :

... en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en d'autres institutions. (Chevallard, 1989, p. 93).

Quelles conditions et quelles contraintes réduisent l'éventail des techniques dans une institution donnée ? Ou, dans le cadre de T4TEL, quelles conditions et quelles contraintes réduisent l'éventail des praxéologies ponctuelles élémentaires dans une institution donnée ?

3.1. Définition de type de tâches et de sous-types de tâches dans T4TEL

Comme dans la TAD, un objet premier est la notion de type de tâches : dans T4TEL nous irons jusqu'à définir une technique comme une suite de type de tâches (cf. paragraphe 3.2).

Ce qu'observe un chercheur dans une institution donnée ce sont des tâches : comment peut-il définir un type de tâches ? Ou encore comment rattacher et organiser les tâches autour d'un même type de tâches ? Dans un premier temps il est possible de les regrouper par genre de tâches comme « calculer », « démontrer » etc., puis, dans un deuxième temps, les discriminer par rapport aux objets communs sur lesquels porte l'action et par rapport aux moyens communs d'accomplir les tâches.

Remarquons que pour une institution d'enseignement donnée, on ne considèrera que les types de tâches mis à l'étude possédant au moins une technique.

Nous pouvons maintenant définir dans T4TEL type de tâches et sous-type de tâches.

Un *type de tâches* T est un ensemble de tâches tels que :

- (1) toute tâche est décrite par un verbe d'action donné et des compléments fixés, pris dans les objets d'une discipline ;
- (2) il existe une technique τ qui accomplit au moins une tâche de T ;

(3) si τ est une technique qui accomplit une tâche t de T alors, soit la portée⁴ de la technique τ notée $P(\tau)$ est un sous-ensemble de T , soit T est un sous-ensemble de $P(\tau)$.

La condition (3) permet d'introduire la relation suivante entre certains types de tâches T et T' : « T est plus générique que T' » ou réciproquement « T' est plus spécifique que T ». Nous définirons cette relation dans le paragraphe 4.

On dit que T' est un *sous-type de tâches* du type de tâches T si

- T' est un sous-ensemble de T
- T' est un type de tâches.

Exemple. Considérons le type de tâches Tra_eq2 : « Résoudre une équation de second degré ». Il existe une technique qui accomplit toutes les tâches de Tra_eq2 : celle du discriminant. Il existe d'autres techniques comme la technique basée sur l'utilisation de la racine carrée qui permet d'accomplir les tâches « résoudre des équations de la forme $[P_1(x)]^2 = k$ ($k > 0$) »⁵. On peut alors considérer l'ensemble de ces tâches comme un sous-type de tâches T' de Tra_eq2.

3.2. Description des techniques dans T4TEL

Le problème de la description des techniques a été soulevé dans (Bosch & Chevallard, 1999) : « ... de quoi est faite une technique donnée ? De quels 'ingrédients' se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la 'mise en œuvre' d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces derniers en proposent néanmoins des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décomposent en sous-types de tâches. Par exemple, Gisèle Cirade et Yves Matheron (1998) décrivent la technique utilisée pour le type de tâches « résoudre une équation du premier degré », par les sous-types de tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme $ax = b$. Ces auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit en fait d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. Ce découpage nous paraît d'un réel intérêt : il renvoie en effet à des types de tâches reconnus institutionnellement et, pour lesquelles une praxéologie mathématique a été mise en place en amont. De ce fait, il permet de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des « sous-types de tâches » qui la composent.

Dans T4TEL, une technique τ est décrite par un ensemble de types de tâches $\{(Ti)_i\}$ qui peuvent être de deux sortes :

- d'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches, appelés *types de tâches intrinsèques* ;
- d'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrits institutionnellement aux élèves, qualifiés de *types de tâches extrinsèques*.

Exemple. Dans la technique de l'addition « posée » de deux entiers en France à la fin de l'école primaire interviennent au moins deux types de tâches : « Disposer en colonne l'addition des deux nombres » et « Additionner deux entiers de taille 1 ».

⁴ La portée d'une technique τ est l'ensemble des tâches que l'on peut accomplir par τ , notée $P(\tau)$.

⁵ Nous désignons par $P_i(x)$ un polynôme de degré i au sens où la forme canonique est de degré i . Par exemple $P_1(x) = (x+1)^2 - x^2$ puisque sa forme canonique, $P_1(x) = 2x+1$, est de degré 1.

Le premier type de tâches « Disposer en colonne l'addition des deux nombres » est intrinsèque : il n'est pas prescrit par l'institution tout en ayant une praxéologie, en particulier une technique et une technologie.

Le second type de tâches « Additionner deux entiers de taille 1 » est extrinsèque car il est prescrit au début de l'école primaire.

4. Pourquoi la notion de variable dans T4TEL ?

Nous avons vu précédemment que, dans T4TEL, un type de tâches est défini par un verbe d'action et un complément. Le verbe d'action caractérise le genre de tâches comme « Calculer » ou « Dénombrer ». Le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique. Par exemple, « Calculer la somme de deux nombres » est plus générique que le type de tâches « Calculer la somme de deux entiers à 1 chiffre ».

Comment appréhender les relations entre le spécifique et le générique dans l'organisation des types de tâches ? Plus généralement, comment structurer un ensemble de types de tâches relatifs à un objet de savoir à enseigner et rendre calculable cette structuration ?⁶

Nous proposons de nous appuyer sur *la portée des techniques* pour organiser et structurer les praxéologies d'une discipline ou d'un domaine d'une discipline.

Soit T un type de tâches et τ une technique de T dont la portée est $P(\tau)$. Une analyse du savoir permet de situer $P(\tau)$ par rapport à T :

- Si T est inclus dans $P(\tau)$ alors il peut exister un type de tâches T' plus générique que T dont τ est une technique.
- Si $P(\tau)$ est inclus dans T alors il peut exister un type de tâches T'' plus spécifique que T dont τ est une technique.

Exemple. Au début du collège on rencontre le type de tâches institutionnel « Résoudre une équation de degré 1 à coefficient entiers » qui est plus spécifique que le type de tâches « Résoudre une équation de degré 1 à coefficient réels » qui peuvent partager la même technique.

Afin de prendre en compte ces relations et de les rendre calculables nous introduisons les notions de variables et de générateur de type de tâches.

5. Notions de générateur de type de tâches et système de variables

Un *générateur* de type de tâches est défini par un type de tâches et un *système de variables*. Nous parlons de système de variables pour désigner une liste de variables avec des valeurs qu'elles peuvent prendre. Par exemple, le type de tâches T « Calculer la somme de deux nombres » définit un générateur de type de tâche GT : [Calculer la somme de deux nombres ; $V1, V2, V3$] où $V1$: nature des nombres (entiers naturels, entiers relatifs, décimaux) ; $V2$: taille du premier nombre si entier (nombre de chiffres) et $V3$: taille du second nombre si entier (nombre de chiffres).

Les variables d'un générateur de type de tâches prennent des valeurs dans un domaine d'une discipline. Ces valeurs engendrent des types de tâches plus spécifiques que le type de tâches T .

Une première fonction d'une variable est donc de générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable : par exemple T_1 « calculer la somme de deux entiers » ou T_2

⁶ Ce questionnement rejoint celui qui a conduit à l'introduction de la notion de variable dans la TSD.

« calculer la somme d'un entier de taille 1 et d'un entier de taille 3 ». T_1 et T_2 sont des sous-types de tâches de T , T_2 étant lui-même un sous-type de tâches de T_1 . Ces sous-types de tâches peuvent avoir des techniques spécifiques : par exemple, une technique économique de T_2 consiste à permuter les deux nombres et à faire un surcomptage, technique peu pertinente pour deux nombres de taille 2 et 3.

Ainsi, une *deuxième fonction* de la notion de variable est de permettre de caractériser les portées des techniques.

Ces deux fonctions apparaissent comme particulièrement intéressantes pour conduire des analyses *a priori* (point de vue épistémologique et didactique) et calculer des parcours d'apprentissage à partir d'un jeu sur ces variables et leurs valeurs. En particulier, la construction d'un modèle praxéologique de référence pour un domaine mathématique (au sens de l'échelle de codétermination) inclut de fait pour nous l'explicitation de variables et de ses valeurs possibles.

Nous portons une attention particulière aux valeurs des variables d'un générateur de type de tâches pour distinguer un triple point de vue sur les variables : épistémologique, institutionnel et didactique.

- *Point de vue épistémologique*

Dans T4TEL, nous définissons des variables d'un type de tâches au niveau même du modèle praxéologique de référence (MPR) : le découpage des valeurs d'une variable est tel que le changement d'une valeur modifie l'éventail des techniques possibles (donc le rapport à un objet de savoir) d'un type de tâches. Nous parlerons de variable épistémologique.

- *Point de vue institutionnel*

En se plaçant dans une institution, les contraintes et les conditions définies par celle-ci vont restreindre non seulement le type de tâches, mais aussi des valeurs possibles d'une variable d'un type de tâches institutionnel. Par exemple, au cycle 1 du primaire, pour le type de tâches T « Calculer la somme de deux nombres », les nombres sont entiers (V1) et la taille des deux nombres est limité à 30 (V2 et V3).

Une variable et ses valeurs institutionnelles modélisent des conditions et des contraintes explicites ou implicites (relevant des niveaux de l'échelle de codétermination) sous lesquelles une praxéologie existe ou peut exister institutionnellement. Le découpage institutionnel en valeurs d'une variable peut ne pas avoir de pertinence épistémologique.

- *Point de vue didactique*

Une variable *didactique* est une variable au sein d'une institution, *potentiellement* à la disposition du professeur. Une variable didactique dans une institution peut ne plus l'être dans une autre.

Nous enrichissons *a posteriori* les valeurs des variables didactiques de valeurs supplémentaires pour rendre compte des praxéologies personnelles des élèves (Croset & Chaachoua, 2010) qu'elles soient valides ou non (Voir paragraphe 7). Ceci est une *troisième fonction* de la notion de variable, particulièrement importante pour le diagnostic et la prise en compte des praxéologies personnelles des élèves d'une institution donnée. Les valeurs supplémentaires attribuées à une variable peuvent renvoyer à la notion de contrat didactique dans la dimension technologique.

6. Un exemple de générateur de type de tâches

Dans cet exemple, nous présentons une structuration de praxéologies ponctuelles attachées au type de tâches générateur T « Résoudre une équation » intégré à une même organisation mathématique *locale*.

La multiplicité des techniques et des formes des équations nous amène à associer au complément « équation » un ensemble de variables. Ce travail nécessite la construction d'un Modèle Epistémologique de Référence (MER) autour de ce type de tâches.

La construction de ce modèle de référence s'appuie sur les travaux de Marie-Caroline Croset (2009), Hamid Chaachoua (2010) Geneviève Ferraton (2011) et Julia Pilet (2012) issus de l'étude didactique de l'enseignement secondaire en France et principalement du collège et de la classe de seconde (élèves 11-16 ans).

Dans ce MPR, nous distinguons une OM globale (OMG) du domaine algébrique à partir de trois OM régionales : OMR1 « Expressions algébriques », OMR2 « Formules » et OMR3 « Équations ». Cette dernière est elle-même structurée en plusieurs OM locales dont OML « Résolution des équations ». Le type de tâches « Résoudre une équation » fait partie de cette organisation mathématique locale qui regroupe plusieurs organisations ponctuelles.

Au type de tâches (Résoudre une équation) on peut associer un générateur de type de tâches par la considération du système de variables $\{V1, V2, V3, V4\}$.

V1 : Degré de l'équation

Dans le cas de l'institution étudiée, enseignement secondaire en France, nous considérons 3 valeurs pertinentes qui relèvent d'une *première limitation institutionnelle* : 0 ; 1 ; 2.

V2 : Nombre de solution de l'équation

Elle peut prendre 4 valeurs : 0, 1, 2, infinité

V3 : Forme algébrique du membre gauche

- 0
- constante
- constante non nulle
- constante non nulle positive
- constante non nulle négative
- polynôme de degré 1
- carré d'un polynôme de degré 1
- produit de deux polynômes de degré 1
- polynôme de degré 2
- polynôme de degré inférieur ou égale à 2

V4 : Forme algébrique du membre droit

Elle prend les mêmes valeurs que la variable V3.

Nous notons le générateur de type de tâches : $GT = [Résoudre\ une\ équation ; V1, V2, V3, V4]$

L'instanciation de valeurs d'une ou plusieurs variables de GT génère un ensemble structuré de sous-types de tâches. Par exemple, le sous-type de tâches « résoudre une équation produit nul du type $P_1(x) Q_1(x) = 0$ » est représenté formellement par $T_2 = (Résoudre\ une\ équation ; V1 = 2, V3 = \text{produit de deux polynômes de degré 1}, V4 = 0)$. Cette formalisation indique que le type de tâche T_2 est généré par le générateur de type de tâches GT. L'absence de V2 indique que toutes ses valeurs sont possibles.

Notons que certaines combinaisons de valeurs de variables ne sont pas possibles comme (Résoudre une équation ; $V1 = 1$, $V2 = 2$, $V3 =$ produit de deux polynômes de degré 1, $V4 = 0$). Ainsi, les valeurs que peuvent prendre certaines variables peuvent dépendre des valeurs des autres.

Les valeurs des variables peuvent être à leur tour hiérarchisées. Par exemple, pour la variable $V3$ les valeurs 0, constante, constante non nulle, constante non nulle positive et constante non nulle négative sont structurées comme suit :

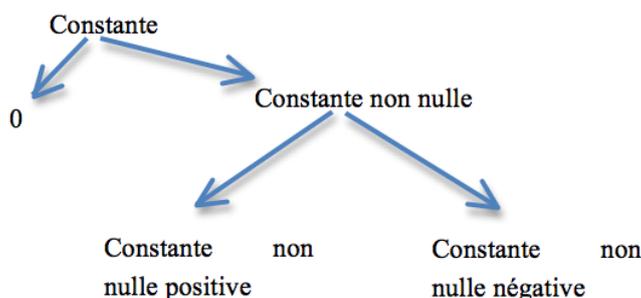


Figure 1. Exemple d'un arbre hiérarchique pour une sous partie des valeurs d'une variable.

Si on fixe les valeurs des autres variables, la hiérarchie ci-dessus induit de fait une hiérarchie des types de tâches associés. Par exemple, le type de tâches $T_1 =$ (Résoudre une équation ; $V1 = 2$, $V3 =$ polynôme de degré 2, $V4 =$ Constante) est plus général que le type de tâches $T_3 =$ (Résoudre une équation ; $V1 = 2$, $V3 =$ polynôme de degré 2, $V4 =$ Constante non nulle positive). Ainsi, T_3 est un sous-type de tâches de T_1 et si une technique accomplit les tâches de T_1 alors elle accomplit les tâches de T_3 .

De la même façon, on peut considérer la constante comme un polynôme de degré 0 et on obtient cette hiérarchisation :

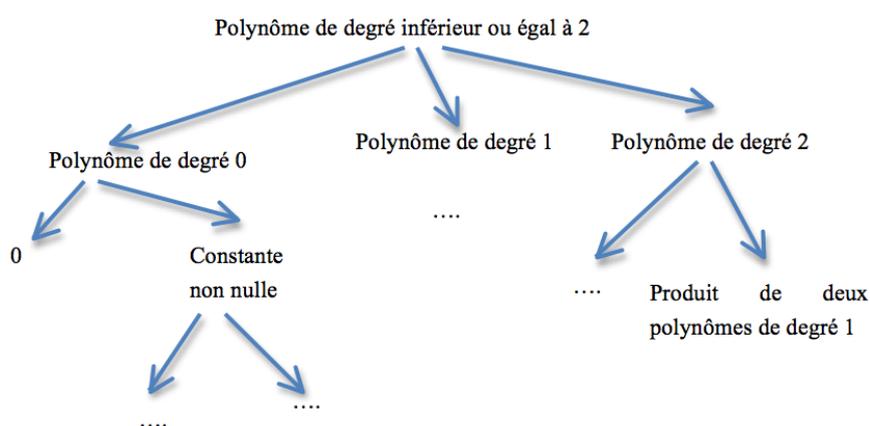


Figure 2. Exemple d'un arbre hiérarchique pour l'ensemble des valeurs d'une variable.

Certains des sous types de tâches générés peuvent ne pas exister dans une institution donnée, du fait de la restriction institutionnelle des valeurs des variables. Par exemple, le sous type de tâches $P_1(x)Q_1(x) = k$, $k \neq 0$ n'apparaît jamais au niveau de l'enseignement du collège en France.

Ceci peut avoir des conséquences sur les praxéologie personnelles d'un élève comme nous allons le montrer dans le prochain paragraphe.

7. Praxéologies personnelles

L'organisation praxéologique institutionnelle correspond rarement à la praxéologie apprise. « Lorsque les programmes sont fabriqués, signés, et prennent force de loi, un autre travail commence : celui de la *transposition interne*. » (Chevallard 1985, p. 37) En particulier, il existe des types de tâches personnels distincts des types de tâches institutionnels et par conséquent des praxéologies personnelles distinctes des praxéologies institutionnelles.

Dans ce paragraphe nous présentons comment la notion de praxéologie personnelle est formalisée dans T4TEL sans chercher à expliquer les raisons de l'existence de ces praxéologies⁷.

Face à un type de tâches T , l'institution attend d'un élève la mise en place d'une technique qui relève d'une organisation mathématique institutionnelle associée au type de tâches T . La non-conformité du rapport personnel à T (du point de vue de l'institution) se traduit par la mise en œuvre d'une technique soit, scientifiquement valide mais non adéquate institutionnellement soit, scientifiquement non valide (Nguyen, Chaachoua & Comiti, 2007). Ces techniques se distinguent des techniques institutionnelles et, dans certains cas, le décalage entre la technique τ de l'élève et la technique attendue par l'institution peut être modélisé de la manière suivante : face à une tâche t , l'élève la perçoit comme relevant d'un type de tâches différent de celui de l'institution, pouvant même ne pas exister dans cette institution.

Nous appelons *praxéologie personnelle* le quadruplet d'organisation praxéologique apprise constitué de quatre composantes (Croset, Chaachoua, 2016).

– Un type de tâches personnel est l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, un observable de cette similarité étant la technique utilisée pour l'accomplir. Deux types de tâches personnels sont distincts, si leurs techniques personnelles respectives sont distinctes. Le découpage en types de tâches personnels ne correspond donc pas nécessairement à celui de l'institution : nous caractérisons ce découpage par des valeurs de variable qui peuvent ne pas être pertinentes du point de vue institutionnel.

– Une technique personnelle permet de résoudre un seul type de tâches personnel : elle peut être correcte – attendue ou non dans l'institution, erronée. Elle doit présenter une certaine stabilité pour accomplir un type de tâche personnel dans le temps. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique personnelle des erreurs erratiques.

– Nous faisons l'hypothèse qu'il existe une technologie personnelle qui peut être explicite ou non. Il est important du point de vue de la recherche d'expliquer l'origine des technologies personnelles non seulement dans les conditions et contraintes institutionnelles mais aussi dans le processus d'étude vécu par les élèves.

Soulignons qu'une technologie, qu'elle soit personnelle ou institutionnelle, ne se réduit pas à un ensemble de théorèmes ou de règles mathématiques. C'est un discours qui permet de justifier, de produire, de rendre intelligible, de contrôler et d'adapter une technique. Elle est constituée de plusieurs ingrédients qui peuvent relever des mathématiques, de théorèmes en acte, de définitions en acte, de règles du contrat didactique ou institutionnel ...

– Une théorie personnelle qui, à son tour, à l'instar du modèle praxéologique institutionnel, justifie la technologie personnelle.

⁷ Pour plus de développement voir (Croset, 2009) et (Croset et Chaachoua, 2016)

Prenons un exemple en relation avec le générateur de type de tâches GT = [Résoudre une équation ; V1, V2, V3, V4].

Soit la tâche « résoudre l'équation $x^2 + 4x = -4$ ».

Le professeur attendait la résolution suivante :

$$x^2 + 4x = -4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

Cette réponse est la mise en œuvre de la technique attendue suivante composée de trois types de tâches : Regrouper tous les termes dans le membre de gauche ; Factoriser $P_2(x)$ par la technique « Identité remarquable » ; Résoudre une équation de degré 1 du type $Q_1(x) = 0$.

Voici la résolution d'un élève de Seconde :

$$x^2 + 4x = -4$$

$$x(x + 4) = -4$$

$$x = -4 \text{ ou } x + 4 = -4$$

$$x = -4 \text{ ou } x = -8$$

Cette résolution de l'élève peut être interprétée comme la mise en œuvre de la technique suivante : Factoriser le membre de gauche par « factorisation simple » ; résoudre une équation du type $P_1(x)Q_1(x) = k$, $k \neq 0$; résoudre une équation de degré 1 du type $P_1(x) = k$; résoudre une équation de degré 1 du type $Q_1(x) = k$.

À l'étape 2 de sa résolution, l'élève se trouve devant la tâche non institutionnelle « résoudre l'équation $x(x + 4) = -4$ » mais qu'il a le devoir de résoudre (contrat didactique de la résolution des équations). Il adapte la technique apprise pour le type de tâches institutionnel « Résoudre une équation de degré 1 du type $R_1(x) = 0$ » à ce type de tâches non institutionnel « Résoudre une équation du type $P_1(x)R_1(x) = k$, $k \neq 0$ » dont il prend *personnellement* la responsabilité⁸. La combinaison des valeurs « produit de deux polynômes de degré 1 » de la variable V3 et « constante non nulle » de la variable V4 permet de rendre compte de la praxéologie personnelle du type de tâches (Résoudre l'équation $P_1(x)Q_1(x) = k$, $k \neq 0$). Ce type de tâches peut être considéré comme généré par GT et donc être modélisé par : $T'_2 = (\text{Résoudre une équation ; } V1 = 2, V2 = 2, V3 = \text{ produit de deux polynômes de degré 1, } V4 = \text{ constante non nulle})$. D'où l'introduction de la valeur « constante non nulle » pour la variable V4.

Le quadruplet de la praxéologie personnelle de cet élève peut être décrit selon le modèle T4TEL comme suit :

- $T = (\text{Résoudre une équation et } V1 = 2, V2 = 2, V3 = \text{ produit de deux polynômes de degré 1, } V4 = \text{ constante non nulle})$
- $\tau = \{(\text{Écrire « } P_1(x) = k \text{ ou } Q_1(x) = k \text{ »}) ; (\text{Résoudre une équation du premier degré})\}$
- $\theta = (R : \text{ « Si } P_1(x)Q_1(x) = k, \text{ alors } P_1(x) = k \text{ ou } Q_1(x) = k \text{ » ; éléments technologiques de la technique de résolution des équations du premier degré})$.

Nous interprétons de manière classique l'action de l'élève d'écrire « $P_1(x) = k$ ou $Q_1(x) = k$ » comme l'application d'une règle R hors de son domaine de validité qui correspond au cas $k = 0$. C'est pourquoi dans le modèle T4TEL nous intégrons cette interprétation par la formulation

⁸ Phénomène qui peut s'expliquer par l'incomplétude des praxéologies enseignées.

« Appliquer la règle R », ce qui donne comme description de la praxéologie personnelle dans le modèle T4TEL :

- $T = (\text{Résoudre une équation et } V1 = 2, V2 = 2, V3 = \text{produit de deux polynômes de degré 1, } V4 = \text{constante non nulle})$
- $\tau = \{(\text{Appliquer la règle R}) ; (\text{Résoudre une équation et } V1 = 1)\}$.
- $\theta = (\mathbf{R} : \ll \text{Si } P_1(x)Q_1(x) = k, \text{ alors } P_1(x) = k \text{ ou } Q_1(x) = k \gg ; \text{ éléments technologiques de la technique de résolution des équations du premier degré}).$

8. Conclusion

Nous espérons avoir montré dans ce texte la pertinence et la richesse de l'introduction de la notion de variable couplée de façon intime à celle de générateur de type de tâches pour formaliser le modèle praxéologique en un modèle calculable T4TEL. L'une des forces de cette formalisation vient de la structuration des valeurs des variables qui induisent une structuration des praxéologies fondant la calculabilité du modèle.

Dans T4TEL, les valeurs d'une même variable peuvent aider à caractériser pour le chercheur :

- les conditions et les contraintes d'une institution
- les choix possibles de types de tâches par l'enseignant pour diriger l'étude (variables didactiques)
- des praxéologies personnelles qui relèvent de valeurs non nécessairement institutionnelles.

Les exigences de cette formalisation nous ont déjà permis de conduire des études didactiques « classiques », en particulier sur les praxéologies personnelles d'élèves en algèbre (Croset, 2009) et sur les praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace (Tang, 2014).

Notre travail actuel au sein de l'équipe MeTAH développe le modèle T4TEL rendu calculable grâce en particulier à la notion de variable pour :

- Produire différents services EIAH (diagnostic des connaissances de l'apprenant, aides aux décisions didactiques de l'enseignant, rétroactions vers un sujet d'une institution) en rupture avec des services centrés exclusivement sur l'apprenant sans tenir compte de l'institution dans laquelle ces services s'inscrivent.
- Décrire les organisations d'étude existantes dans une institution donnée d'un secteur, d'un thème ou d'un sujet selon le niveau de l'échelle de codétermination (Chevallard, 2002). Un objectif est de décrire un modèle épistémologique dominant de l'institution (MED). On trouvera en annexe un exemple d'un réseau praxéologique image d'un MED de la fin de l'école primaire en France (10 - 12 ans).
- Concevoir et réaliser des parcours d'étude et de recherche fondés épistémologiquement sur un modèle épistémologique de référence (MER).

Remarquons avec Michèle Artaud (2018) que la prise en compte de la dynamique praxéologique de l'organisation de l'étude d'un savoir fait rencontrer nécessairement des types de tâches provisoires qui disparaîtront avec la chronogenèse de l'étude d'un sujet, d'un thème ou d'un secteur. Il y a nécessité pour le modèle T4TEL :

- de distinguer ces types de tâches didactiques des types de tâches mathématiques enjeu du parcours d'une étude.

- de rendre compte de la dynamique basée sur l'articulation entre ces différents types de tâches (didactiques et mathématiques).

Références

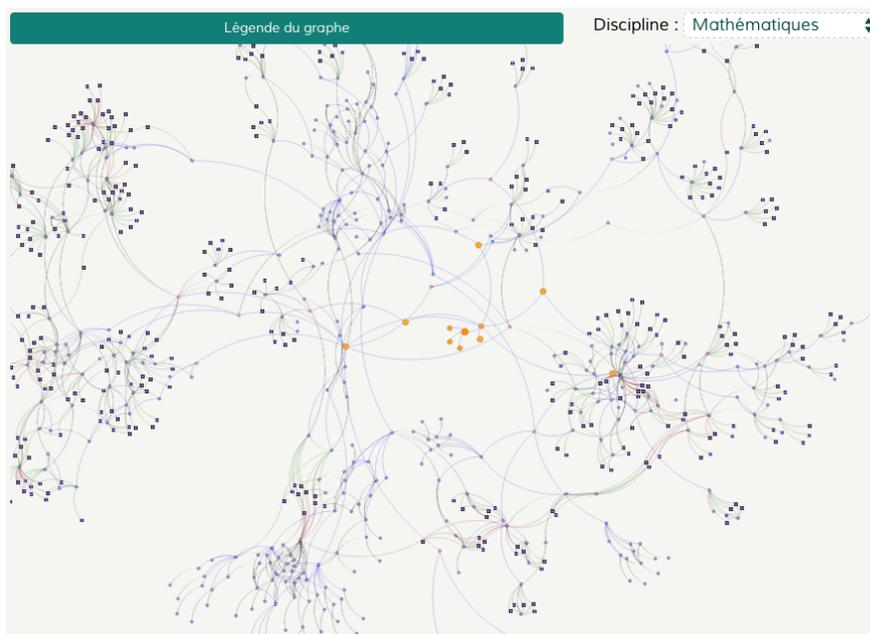
- Artaud, M. (2018). Des liens entre les organisations praxéologiques et l'organisation de l'étude dans l'analyse des praxéologies, Actes du 5^e congrès international sur la TAD.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol. 19(1), 77-124.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1). 37-127.
- Brousseau, G. (1997a). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Didactique des Mathématiques, 1970–1990, Springer Netherlands.
- Brousseau, G. (1997b) La théorie des situations didactiques : le cours de Montréal, disponible à l'adresse :
<http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>
- Brousseau, G. (1994). *Problèmes et résultats de didactique des mathématiques*. Washington : ICMI Study 94.
- Brousseau, G. (1995). Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université, in *Commission Inter-Irem Premier cycle, Autour de Thalès*. 87-124.
<http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2015/05/TOTHALES.pdf>
- Brousseau, G. (2000). Educacion y Didactica de las matemáticas. *Educacion matematica*, 12(1), 5-39.
- Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas : la modélisation des connaissances des élèves* (Note de synthèse HDR). Grenoble : Université Joseph Fourier.
- Chaachoua, H. (2015). Un cadre de référence didactique basé sur l'approche praxéologique pour représenter les connaissances dans un EIAH. *Communication au 3^e Colloque International Franco-Vietnamien en didactique des mathématiques*. Hué.
- Chaachoua, H., Ferraton, G. & Desmoulins, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. Dans G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage & T. A. Sierra, (Éds). (2017). *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 301-324).
<https://citad4.sciencesconf.org>
- Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, Rapport personnel, rapport institutionnel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 108* Grenoble.
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage éditions : Grenoble.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, 19(2), 221-265.

- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. Dans Dorier, J. L. et al. (Éds.), *Actes de la 11^e école de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Cirade, G. & Matheron, Y. (1998). Équation du premier degré et modélisation algébrique. Dans R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'École d'été de la Rochelle* (pp. 199-250). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.
- Croset, M. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Étude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte* (Thèse de doctorat). Grenoble : Université Joseph Fourier.
- Croset, M-C. & Chaachoua, H. (2011). Modélisation des connaissances des élèves en termes de praxis en actes. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 627-646). Barcelone, Espagne : CRM.
- Croset, M-C. & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 36(2).
- Ferraton, G. (2011). *Rapport institutionnel à l'objet calcul littéral au collège : construction et utilisation d'un modèle praxéologique de référence*. (Mémoire Master 2). Grenoble : Université Joseph Fourier.
- Nguyen, A.Q., Chaachoua H. & Comiti, C. (2007). De l'usage de la TAD pour l'analyse des erreurs. Dans L. Ruiz-Higueras, A.Estepa & F.J.García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 621-639). Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot – Paris 7.
- Tang, M.D. (2014). *Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt Nam*. (Thèse de doctorat). Grenoble : Université Joseph Fourier.

ANNEXE

Exemple d'un réseau praxéologique image d'un MED sur le secteur de la numération en fin de l'école primaire en France (10 - 12 ans).

Le modèle T4TEL, a été utilisé dans le cadre du projet « Cartographie des savoirs »⁹. Ses applications ont permis de développer des outils pour les enseignants du primaire : production de profils des élèves, production de tests de diagnostic en s'appuyant sur les variables.



Commentaire : ce réseau est constitué de 884 nœuds reliant 413 types de tâches obtenus à partir des générateurs de types de tâches.

⁹ Projet « Cartographie des savoirs » (2012-2014) (<http://intranet.cartodessavoirs.fr>).