

Duas Abordagens para a Solução de Problemas: Software e História de Ciência

Paulo de F. Borges
Ricardo Lopes Coelho

Resumo

Nosso objetivo é fornecer aos estudantes de física e engenharia dois caminhos - formal e conceitual - para resolução de problemas, e aos estudantes de cursos de outras áreas uma estratégia mais intuitiva e mais fácil de memorizar no longo prazo. Para atingir este objetivo o mesmo problema - a máquina de Atwood composta com quatro corpos - é abordado de duas formas diferentes. A abordagem formal enfoca a obtenção das equações de movimento usando a segunda lei de Newton, as restrições geométricas ou vínculos e um software de computação algébrica. A abordagem conceitual consiste em uma transferência de conhecimento da máquina de Atwood convencional. Neste caso, o raciocínio desenvolvido para resolver o problema é o mesmo que o usado para a máquina simples, só que aplicado mais de uma vez. O mesmo vale para o uso do princípio de Gauss, tal como era compreendido durante o século XIX. Um exemplo numérico mostrará que todas as abordagens levam ao mesmo resultado.

Palavras-chave: máquina de Atwood; Newton; Gauss; física conceitual; habilidades formais.

Abstract

The aim of the present study is to provide Physics and Engineering students with two paths regarding problem solving and non-physics students with a more intuitive solving strategy and easier to memorize in the long term. To achieve this goal, the same problem is approached in two different ways: one, formal and the other, conceptual. The problem is the compound Atwood machine with four bodies. The formal approach focuses on obtaining the equations of motion using Newton's second law, stresses the role of geometric constraints and uses an algebraic computation software. The conceptual approach consists of a knowledge transfer from the simple Atwood machine problem. In this case, the thinking process for solving the compound machine problem is the same as for the simple one but it is applied more than once. The same goes for the use made of the Gauss principle, as it was understood in the 19th century. A numerical example will show that all approaches lead to the same result.

Keywords: Atwood machine; Newton; Gauss; conceptual Physics; formal skills

Introdução

No decurso dos últimos três séculos, a física se tornou mais e mais matemática. Idéias simples e intuitivas, usadas na resolução de problemas dos séculos XVIII e XIX, foram substituídas por equações em livros de texto contemporâneos^{1,2,3}. A confiança no conhecimento sobre os fenômenos foi, pelo menos parcialmente, transferida para equações. Consequentemente, usar as equações adequadamente tornou-se suficiente para resolver os problemas corretamente. Como uma implicação educacional, aprender física hoje é acima de tudo aprender a usar as equações. De acordo com Ha, Lee & Kalman, a maioria do ensino de nível superior de ciência consiste em transmitir conhecimento abstrato, descontextualizado, acompanhado por um modelo (unicamente numérico) e um procedimento para resolução de problemas⁴. Essa ênfase no formalismo causa dificuldades para novatos e não físicos, já que a abordagem natural dos fenômenos é por meio de conceitos e não de equações^{5,6}. Além disso, é exigido de estudantes de pós-graduação nos países europeus (Acordo de Bolonha) que eles sejam capazes de comunicar com especialistas e não especialistas. A comunicação com audiências de não especialistas requer um domínio conceitual das ferramentas matemáticas e físicas usadas pelo estudante. Esse objetivo pode ser alcançado, se os estudantes receberem meios e treinamento numa fase prévia. Consequentemente, se a Declaração de Bolonha deve ser tomada a sério, uma abordagem conceitual é necessária até mesmo para estudantes de física e engenharia. Por outro lado, os estudantes de física e engenharia precisam desenvolver suas habilidades matemáticas, o que justifica a abordagem formal dos problemas. Além disso, no século XXI, cursos pós-secundários e carreiras variadas exigem uma base sólida em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM). O domínio da matemática, ciência e tecnologia não é mais apenas para futuros cientistas e engenheiros, mas é essencial para todos os estudantes. Para satisfazer tanto necessidades formais como conceituais, abordaremos o mesmo problema tanto de forma conceitual quanto formal. Esta abordagem por dois caminhos também pode nos ajudar a medir habilidades analíticas aplicadas à resolução de problemas⁷.

¹ Elizabeth Garber, *The Language of Physics: The Calculus and the Development of Theoretical Physics in Europe*, (Boston, Birkhauser, 1999)

² Ricardo L. Coelho, "Could HPS improve problem solving?" *Sci. & Edu.* 22 (2012) 1043-1068.

³ Michael R. Mathews, C. F. Gauld, & A. Stinner, ED. *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives*. (Netherlands: Springer, 2005).

⁴ Sangwoo Ha, Gyoungho Lee & Calvin Kalman, "Workshop on friction: Understanding and addressing students' difficulties in learning science through a hermeneutical perspective." *Science & Education* 22(2012):1424.

⁵ Catherine H. Crouch & Kenneth Heller, "Introductory Physics in biological context: An approach to improve introductory Physics for life science students." *Am. J. Phys.* 82, nº5 (2014):378-386.

⁶ Mel Sabella & Matthew Lang, "Research and education at the crossroads of Biology and Physics." *Am. J. Phys.* 82, nº 5 (2014): 365-366.

⁷ U.S. Department of Education. *A Blueprint for Reform: The Re-authorization of the Elementary and Secondary Education Act, March 2010*, To read the full text visit <www2.ed.gov/policy/elsec/leg/blueprint> (accessed on October 20th, 2017).

A relação da nossa abordagem com o presente congresso – História da Ciência e Ensino - é mais profunda do que possa parecer. Da História da Ciência vamos trazer um princípio que caiu em desuso, pelo menos na sua forma original. Trata-se do princípio de Gauss. O problema que vamos tratar é a máquina de Atwood composta com 4 corpos.^{8,9,10,11,12,13,14} O estudante conhece a máquina de Atwood simples. Então vamos aproveitar o que ele sabe e transferir este conhecimento para a máquina composta. Esta transferência despertará determinados aspectos do problema da máquina simples, consolidando este conhecimento. Assim satisfazemos a exigência 'História da Ciência e Ensino' ao usar o que vem de ambas para tratar um problema novo para o estudante. Acontece que, o ensino, mesmo quando trata problemas conhecidos há séculos, não pode ficar indiferente aos meios tecnológicos. Por isso, incluímos a abordagem do mesmo problema através de um software.

O artigo tem a seguinte estrutura. Na próxima seção, abordaremos o problema de forma mais conceitual. Esta abordagem inclui a transferência de conhecimento mencionado: da máquina simples, que é ensinado no liceu e na universidade, para a máquina composta. Esta abordagem inclui também o recurso ao princípio de Gauss. Não como o princípio é hoje apresentado nos manuais universitários com mecânica mais avançada, mas na sua formulação original. Isto é seguido por um caso numérico, que serve de exemplo, mostrando também que todas as abordagens chegam ao mesmo resultado. Finalmente, o problema é tratado formalmente. Aqui se usa a segunda lei de Newton na sua forma habitual e recorre-se a um software para se concluir o problema.

Abordagem Conceitual

⁸ Existem várias propostas não padrão de resolução deste problema.

⁹ Frank S. Crawford, "Diagonalization of a compound Atwood machine." *Am. J. Phys.* 55(1987): 514-516.

¹⁰ Raúl W. Gómez González, "podemos aprender algo nuevo con la máquina de Atwood?" *Rev. Mex. Fis.* 44(1998): 179-182.

¹¹ Ronald Newburgh, Joseph Peidle & Wolfgang Rueckner, "When equal masses don't balance." *Phys Edu* 39(2004):289-93.

¹² Mehdi Jafari Matehkolaee, "Introduction of Atwood's machines as Series and Parallel networks." *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 5(2011): 338-343.

¹³ Ricardo L. Coelho, Paulo A. S. Silva, & Paulo F. Borges, "On the Poggendorff Experiment." *Phys. Edu.* 50, nº6 (2015): 667-672.

¹⁴ Ricardo L. Coelho, Paulo F. Borges & Ricardo Karam, "Atwood and Poggendorff: an insightful analogy." *Eur. J. Phys.* 37(2016): 065003. doi:10.1088/0143-0807/37/6/065003.

A abordagem conceitual pode ser apresentada como uma transferência de conhecimento da máquina Atwood para a máquina composta de Atwood. Assim, começamos com a estratégia de solução mais comum para o problema da máquina Atwood para destacar os aspectos que serão utilizados.

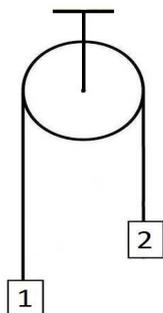


Figura 1: Polia ideal.

O observador inercial aplica a segunda lei de Newton aos corpos m_1 e m_2 (Fig.1):

$$T_1 - P_1 = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$T_2 - p_2 = m_2 a_2 \quad (2)$$

Devido às condições ideais do sistema em relação à polia e rosca, $T_1 = T_2 = T$ e $-a_1 = a_2 = a$. Equações (1, 2) tomam então a forma:

$$T - P_1 = -m_1 a \quad (3)$$

$$T - P_2 = m_2 a \quad (4)$$

com solução,

$$a = \frac{P_1 - P_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

e

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (6)$$

Isto é o que o estudante aprende no liceu e repete na universidade. Vamos usar isto para passar à máquina composta.

Se em vez desses corpos (m_1 e m_2), temos máquinas de Atwood (Fig. 2), também precisamos determinar os pesos dessas máquinas. (Mais simples: se temos corpos determinamos o peso dos corpos; se temos máquinas no lugar dos corpos, determinamos o peso das máquinas.)

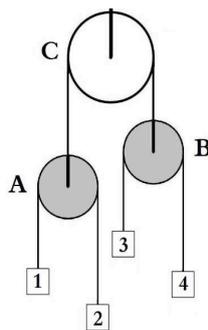


Figura 2: Máquinas de Atwood ideais.

Esses pesos são as tensões totais das máquinas¹⁵. (Se pusermos as máquinas num sensor, verificamos que o peso é igual à tensão do fio. Uns segundos de reflexão permitem-nos perceber que não poderia ser outro. A tensão do fio é a força que a máquina “pode passar” ao sensor, porque não tem outra.) Assim, obtemos:

$$P_A = T_{12} = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g \quad (7)$$

$$P_B = T_{34} = \frac{4m_3m_4}{m_3 + m_4}g \quad (8)$$

onde P_A e P_B representam o peso total das polias **A** e **B** após o início do movimento. Uma vez que temos os pesos e a aceleração local, podemos prever a aceleração de ambas as máquinas quando conectadas com a polia **C**:

$$a_* = \frac{P_A - P_B}{\frac{P_A}{g} + \frac{P_B}{g}} = \frac{P_A - P_B}{m_{12} + m_{34}} \quad (9)$$

onde $m_{12} = T_{12}/g$ e $m_{34} = T_{34}/g$. Assim, no referencial não inercial, que se move solidariamente com as polias **A** e **B**, a aceleração local é $g - a_*$ ou $g + a_*$. As acelerações das máquinas nestes sistemas de referência são como na situação normal, com a diferença que a aceleração local não é g , mas $g \mp a_*$ ou seja:

$$a^{*12} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(g - a_*) \quad (10)$$

$$a^{*34} = \frac{m_4 - m_3}{m_3 + m_4}(g + a_*) \quad (11)$$

¹⁵ Ibid.

onde a^{*ij} representa as acelerações dos corpos i e j em seus referenciais não-inerciais. Se quisermos saber quais as acelerações dos corpos no referencial inercial, temos apenas para adicionar ou subtrair a_* às acelerações anteriores.

Esta estratégia consiste numa transferência de conhecimento, que pode ser rerepresentada como se segue:

- sabemos como um observador inercial trata a máquina de Atwood;
- pegamos neste observador e o colocamos no referencial da polia móvel;
- para aí fazer o mesmo: usar a mesma equação.

O leitor podia perguntar-se, qual a legitimidade de usar o observador inercial num ambiente não inercial?

A justificação do procedimento vem de Newton, corolário VI dos *Principia*. O corolário diz o seguinte:

Se os corpos se moverem entre si, seja de que maneira for, e forem impelidos por forças aceleratrizes iguais segundo linhas paralelas; todos continuarão a ser movidos entre si do mesmo modo que se não estivessem impelidos por aquelas forças.¹⁶

O referencial solidário com a polia móvel está nestas condições. Logo, vale para ambos o resultado que se obtém com $F=ma$.

O esquema conceptual usado – colocar o observador inercial num ambiente não inercial – será usado no procedimento que se segue. A equação que ele dispõe, porém é outra. Ela provém de outro princípio.

Pelo princípio de Gauss

Em um curto artigo de 1829, na ‘Revista de Matemática pura e aplicada’, Gauss apresentou o seu princípio do menor constrangimento (*Princip des kleinsten Zwangs*) (usamos esta formulação porque a versão hodierna do princípio perdeu a ideia original de Gauss^{17,18,19,20}):

O movimento de um sistema de pontos materiais [...] ocorre, em cada momento, em concordância máxima com o movimento livre ou sob o menor constrangimento, sendo a

¹⁶ Sigo a tradução de: Raquel Balola, “Princípios matemáticos da filosofia natural: a lei de inércia” (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2011), 39.

¹⁷ Edmund T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. 4th ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 1960).

¹⁸ Max Paesler, *Prinzip der Mechanik*. (Berlin: De Gruyter, 1968).

¹⁹ David. J. Evans and Gary Morriss, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Liquids*. 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 2008).

²⁰ Alberto Rojo and Anthony Bloch, *The principle of least action: History and Physics*. (Cambridge: Cambridge University Press, 2017).

medida do constrangimento, que o sistema sofre em cada intervalo de tempo, dada pela soma dos produtos da massa e do quadrado do desvio ao movimento livre.²¹

O 'desvio' consiste na distância entre:

- (1) o ponto alcançado pelo corpo, num intervalo de tempo Δt , e
- (2) o ponto que esse corpo alcançaria, no mesmo intervalo de tempo, se não houvesse constrangimento. Logo,

$$\text{constrangimento} = \sum m_i d_i^2 \quad (12)$$

onde m_i representa a massa dum ponto material e d_i a distância que expressa o desvio ao movimento livre.

Na aplicação do princípio à máquina de Atwood (Fig. 1), o raciocínio no século XIX foi o seguinte: se os corpos não estivessem constrangidos pelo fio que os liga, mover-se-iam com velocidade g num segundo; no movimento real, a velocidade num segundo será x . O desvio em relação ao movimento livre é, portanto $(g-x)$ para um dos corpos e $(g+x)$ para o outro. A soma dos produtos das massas pelo quadrado dos desvios é:

$$m_1(g-x)^2 + m_2(g+x)^2 = \text{Min.}(x). \quad (13)$$

Calculando o mínimo, como indica o princípio, obtém-se

$$m_1(g-x) = m_2(g+x). \quad (14)$$

Este foi o resultado obtido no século XIX.²²

Nesta equação temos, em cada membro, o produto da massa do corpo pela aceleração no sistema de referência do corpo. Como este produto expressa o peso no referencial do corpo, a equação diz-nos que os corpos pesam o mesmo enquanto em movimento.

Vamos sintetizar os passos da resolução do problema para os aplicarmos à máquina de Atwood composta. Os passos são:

- sem constrangimento, a aceleração dos corpos seria g ;
- por causa do constrangimento, as acelerações são $\pm a$;
- nos sistemas de referência dos corpos, as acelerações são $g-a$ e $g+a$;
- os pesos dos corpos são iguais (Eq. 14).

Usando o mesmo raciocínio em relação a uma máquina de Atwood que funcione no sistema de referência $g-a$, temos:

²¹ Carl F. Gauss Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. In: *Carl Friederich Gauss Werke*, V, 26. (Leipzig: Teubner, 1867).

²² Esta foi a resolução do problema exposta numa tese de doutoramento de realizada em Göttingen, onde Gauss tinha ensinado: August Buckendahl, *Ueber das Princip des kleinsten Zwanges von Gauss*. Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, Dissertation. Göttingen, 1873).

- sem constrangimento (Fig. 3), a aceleração dos corpos seria $g-a$;
- por causa do constrangimento, as acelerações são $\pm a_2$;
- nos sistemas de referência dos corpos, as acelerações são:

$$e \quad g - a - a_2 \quad (15)$$

$$g - a + a_2 \quad (16)$$

os pesos dos corpos são iguais,

$$m_1(g - a - a_2) = m_2(g - a + a_2) \quad (17)$$

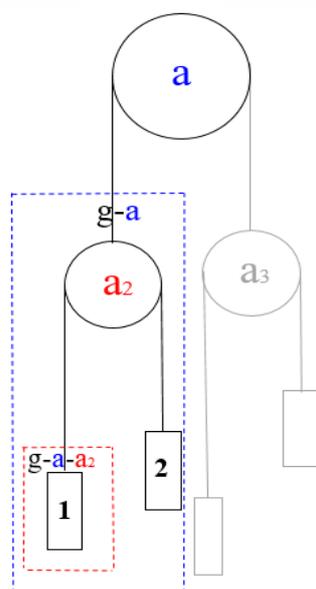


Figura 3: Para um observador que se mova solidariamente com a polia, a máquina de Atwood que observa funciona normalmente.

Fazendo o mesmo para o outro lado, da polia principal (Fig. 4), obtém-se um resultado análogo,

$$m_3(g + a - a_3) = m_4(g + a + a_3). \quad (18)$$

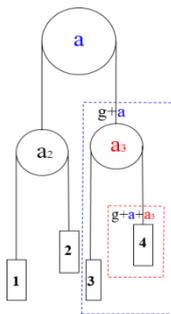


Figura 4: Supõe-se que o sistema funciona em condições ideais, com é usual supor na máquina de Atwood no manuais.

Agora sabemos que os pesos de cada lado da polia principal são:

$$2m_2(g - a + a_2) \text{ e } 2m_3(g + a - a_3) \quad (19)$$

Como pelo princípio de Gauss os pesos de cada lado da polia são iguais, segue-se que,

$$m_2(g - a + a_2) = m_3(g + a - a_3) \quad (20)$$

Reunindo as equações 17, 18 e 20, ficamos com um sistema linear de 3 equações para as 3 incógnitas, pelo que o problema fica resolvido.

Exemplo numérico

Os corpos na polia **A** (Fig. 2) têm as massas 0.2 kg e 0.3 kg e na polia **B**, 0.1 kg e 0.4 kg. Os pesos das máquinas **A** e **B**, antes de serem conectados com a polia fixa, são:

$$P_A = T_{12} = 4.704N \text{ e } P_B = T_{34} = 3.136N \quad (21)$$

Portanto, a aceleração devido à polia principal é (Eq. 9)

$$a_A = \frac{4.704 - 3.136}{0.48 + 0.32} = 1.96ms^{-2} = -a_B \quad (22)$$

Devido a este movimento, as acelerações de queda livre nos referenciais **A** e **B** são $g - a_A = 7.84ms^{-2}$ e $g + a_A = 11.76ms^{-2}$, respectivamente. As acelerações das máquinas de Atwood simples são então $a^{*12} = (0.1/0.5).7.84 = 1.568ms^{-2}$ e $a^{*34} = (0.3/0.5).11.76 = 7.056ms^{-2}$. Dum ponto de vista inercial, temos:

Tabela 1 – Acelerações medidas em um referencial inercial.		
a_1	$-1.568+1.96=$	$0.392ms^{-2}$
a_2	$1.568+1.96=$	$3.528ms^{-2}$
a_3	$-7.056-1.96=$	$-9.016ms^{-2}$
a_4	$7.056-1.96=$	$5.096ms^{-2}$

As tensões podem ser calculadas usando essas acelerações na segunda lei de Newton aplicada a cada corpo:

Tensão	Valor
T_1	1.8816N
T_2	1.8816N
T_3	1.8816N
T_4	1.8816N
T_A	3.7632N
T_B	3.7632N
T	7.5264N

A soma dessas acelerações é zero e todas as cordas são submetidas à mesma tensão; as polias móveis ao dobro desta tensão e a polia fixa ao quádruplo desta tensão.

Abordagem Formal

Vamos aplicar a segunda lei de Newton para calcular forças e acelerações em nosso sistema (Fig. 5). Não há necessidade de mencionar nenhum referencial não inercial, no entanto, os cálculos são longos e tediosos, motivando-nos a recorrer a ferramentas de computação algébrica. Primeiramente, nós estabelecemos as restrições (vínculos, Fig. 6) devido à geometria das cordas usadas para sustentar polias e massas. Usando as leis de movimento de translação e de rotação, temos um conjunto de dez equações e dezesseis incógnitas. Outro conjunto de equações pode ser obtido usando relações simples construídas a partir das restrições geométricas e das definições de aceleração rotacional e momento de inércia. Nossos cálculos foram realizados com o Pacote *LinearAlgebra* em ambiente MAPLE.

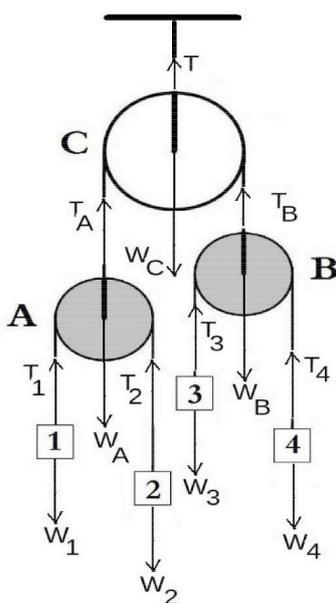


Figura 5: Forças na máquina composta.

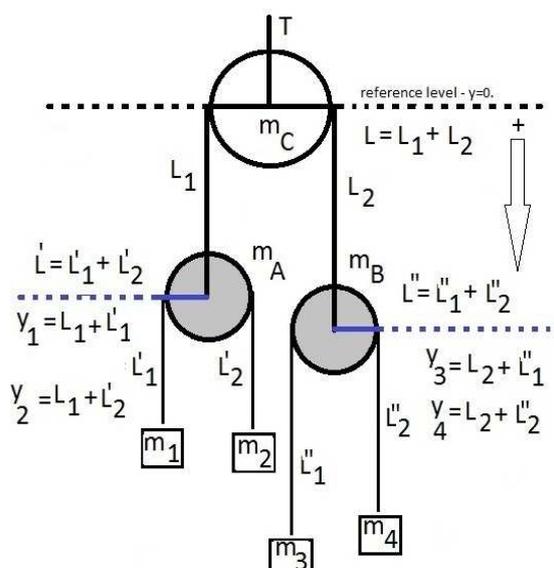


Figura 6: Vínculos geométricos.

As equações de vínculo são as seguintes:

$$y_1 + y_2 = 2L_1 + L' \quad (23)$$

$$y_A + y_B = L_1 + L_2 = L \quad (24)$$

$$y_3 + y_4 = 2L_2 + L'' \quad (25)$$

onde y_B e y_A são respectivamente as coordenadas das polias **B** e **A** (móveis), medidas em relação ao nível de referência que passa pelo centro da polia **C** (fixa). As acelerações das massas e polias podem ser calculadas através da segunda derivada em relação ao tempo destas equações. Polias maciças nos obrigaram a considerar suas acelerações tangenciais. No entanto, como no caso ideal, estas acelerações são determinadas pela aceleração dos corpos em queda na máquina de Atwood. Essas acelerações tangenciais são diferentes de zero, mesmo no caso ideal. Elas são consideradas irrelevantes se considerarmos essas massas muito menores que as massas dos corpos pendurados na máquina. Portanto,

$$a_1 = \ddot{y}_1, \quad a_2 = \ddot{y}_2, \quad a_3 = \ddot{y}_3 \quad (26)$$

$$a_4 = \ddot{y}_4, \quad a_A = \ddot{y}_A, \quad a_B = \ddot{y}_B \quad (27)$$

$$a_A^t = a_1, \quad a_B^t = a_3, \quad a_C^t = a_A \quad (28)$$

onde o sobrescrito **t** significa aceleração tangencial das polias. Além disso,

$$a_2 = 2a_A - a_1, \quad e \quad a_4 = -2a_A - a_3 \quad (29)$$

que considerando a equação (23) acima, em que $a_B = -a_A$, reduz nossas variáveis para a_A , a_3 e a_1 . O novo sistema de equações de movimento conduzem a uma equação matricial $\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}$ construída a partir dos coeficientes das equações deste sistema. Cada coluna considera uma variável na ordem definida pelo vetor das tensões e acelerações $\mathbf{A} = (T_1; T_2; T_3; T_4; T_A; T_B; T; a_3; a_1; a_A)$. O vetor de constantes \mathbf{C} tem as mesmas componentes do vetor \mathbf{L} na decomposição **PLU**:

$$\vec{L} = (0,0,0, -m_C g, -m_B g, -m_A g, -m_1 g, -m_2 g, -m_3 g, -m_4 g) \quad (30)$$

Assim, a matriz de coeficientes é:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_A}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_B}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_C}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & m_B \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_A \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & -2m_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 2m_4 \end{bmatrix}$$

As soluções deste problema, quando trabalhamos a decomposição **PLU** em MAPLE, software de computação algébrica, e consideramos as massas das polias muito menores que as outras massas no sistema, são as seguintes:

$$a_1 = \frac{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_1 - 3m_3)}{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)} g \quad (31)$$

$$a_2 = \frac{m_3 m_1 (m_2 - 3m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)}{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)} g \quad (32)$$

$$a_3 = \frac{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_3 - 3m_1)}{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)} g \quad (33)$$

$$a_4 = \frac{-m_3 m_1 (3m_2 - m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)}{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)} g \quad (34)$$

$$a_A = -a_B = \frac{m_3 m_1 (m_2 + m_4) - m_2 m_4 (m_3 + m_1)}{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)} g \quad (35)$$

$$T_0 = \frac{4m_3 m_1 m_2 m_4}{m_3 m_1 (m_2 + m_4) + m_2 m_4 (m_3 + m_1)} g \quad (36)$$

Com $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_0$, $T_A = T_B = 2T_0$, $T = 4T_0$ e $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$. Usando para as massas dos corpos os mesmos valores numéricos da seção 3 e $g = 9.8 \text{ms}^{-2}$, obtemos: $a_1 = 0.392 \text{ms}^{-2}$, $a_2 = 3.528 \text{ms}^{-2}$, $a_3 = -9.016 \text{ms}^{-2}$, $a_4 = 5.096 \text{ms}^{-2}$, $a_A = 1.96 \text{ms}^{-2}$ e $a_B = -1.96 \text{ms}^{-2}$ para as acelerações. As forças têm os seguintes valores iguais: $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_0 = 1.8816 \text{N}$, $T_A = T_B = 2T_0 = 3.7632 \text{N}$ e $T = 4T_0 = 7.5264 \text{N}$. Estes valores estão

de acordo com aqueles determinados na seção anterior. Fowles & Cassiday resolveram o problema de quatro corpos usando as Equações de Lagrange²³. Nós obtivemos os mesmos resultados.

Observações Finais

A abordagem formal nos leva a um sistema de dez equações e dezesseis incógnitas. Definições comuns de momento de inércia e aceleração angular nos permitem eliminar algumas incógnitas, mas para obter um sistema solúvel, algumas restrições geométricas devem ser levadas em conta (eqs. 23, 24 e 25). O sistema transformado reúne dez equações e dez incógnitas, mas é complicado resolver sistemas como este usando papel e lápis. Esta é a razão para usar o software MAPLE e seu Pacote *LinearAlgebra*. Os resultados numéricos obtidos estão de acordo com os obtidos na abordagem conceitual.

A abordagem conceitual representa um modo econômico de pensar, no sentido de Mach²⁴. O estudante passa de um caso bem conhecido (a máquina de Atwood) para o desconhecido (máquina de Atwood composta) mantendo o modelo da resolução do problema. No lugar dos corpos m_1 e m_2 , temos agora máquinas de Atwood **A** e **B**. Portanto, em vez dos pesos desses corpos, consideramos agora os pesos das máquinas. (Em ambos os casos, os pesos são determinados antes que os corpos e/ou máquinas sejam colocados em movimento.) A aceleração local g é substituída pela aceleração local nos sistemas não inerciais, porque agora as máquinas de Atwood movem em sistemas de referência onde a aceleração local é $g \pm a$. A abordagem via princípio de Gauss, na formulação original, leva a um resultado surpreendente para o estudante ou professor que tenha abordado a questão em termos unicamente Newtonianos, a saber, os corpos de cada lado da polia pesam o mesmo. A aplicação deste resultado à máquina composta é mais uma vez um processo de transferência de conhecimento. A abordagem dupla (formal e conceitual) do problema atual mostra sua potencialidade em responder às necessidades educacionais da ciência contemporânea^{25,26,27}, mas este tópico deixamos para outra oportunidade.

²³ Grant R. Fowles & George L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, 7th Ed. New York. (Brookes and Cole International Edition, 2004).

²⁴ Ernst Mach, *The science of mechanics: A critical and historical account of its development*. 6th ed. (Illinois: The Open Court Pub. Co. 1974).

²⁵ Jack Holbrook & Miia Rannikmae, "The Nature of Science Education for enhancing Scientific Literacy." *Int. J. Sci. Edu.* 29, nº11 (2007): 1347362.

²⁶ Qian Tang, org. *Current challenges in basic science education* (Paris: UNESCO – Education Sector, 2010).

²⁷ Liviu Matei, org. *Future of Higher Education. Bologna Process Researchers Conference – Conference report*. (Bucharest: Editorial Board:Pricopie, R. et alli, 2015).

Sobre os Autores:

Paulo de F. Borges

Universidade Federal Fluminense

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências da Natureza

pfaria@uol.com.br

Ricardo Lopes Coelho

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia

rlc@fc.ul.pt