

Grafos de Peirce ad absurdum

Peirce's graphs ad absurdum

Frank Thomas Sautter

Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – Brasil
ftsautter@ufsm.br

Hércules de Araújo Feitosa

Departamento de Matemática/FC/UNESP – Brasil
haf@fc.unesp.br

Resumo: O método diagramático de Peirce para a *lógica proposicional clássica* utiliza seis regras de derivação. Modificamos esse método ao utilizar, *ab initio*, a negação da conclusão, e exigirmos, para a prova de validade, a obtenção de uma contradição. Isso nos permite a eliminação de duas regras de derivação.

Palavras-chave: Informação. Lógica proposicional clássica. Método diagramático. Método de resolução. Peirce.

Abstract: *Peirce's diagrammatic method for classical propositional logic uses six derivation rules. We modify this method by using ab initio, the denial of the conclusion, and, for proof of validity, we demand a contradiction. This allows us to eliminate two derivation rules.*

Keywords: *Information. Classical propositional logic. Diagrammatic method. Resolution method. Peirce.*

Ich würde mich darüber mit dem Bewusstsein trösten,
dass auch eine Weiterbildung der Methode die Wissenschaft fördert.

Gottlob Frege, em *Begriffsschrift* (1879).

Introdução

Charles Sanders Peirce desenvolveu duas classes de métodos de prova diagramáticos. Os métodos diagramáticos da primeira classe – os Grafos Entitativos – utilizam, como conetivos primitivos, a negação e a disjunção inclusiva. Essa classe foi abandonada em prol de uma segunda classe – os Grafos Existenciais – cujos métodos diagramáticos utilizam como conetivos primitivos a negação e a conjunção. Tanto em uma classe, como na outra, a negação é representada por uma figura fechada – denominada “corte” –, em cujo interior está a fórmula negada. Tanto em uma classe, como na outra, o conetivo binário primitivo é representado pela justaposição

na mesma região dos diagramas das duas fórmulas afetadas pelo conetivo. Porém, por razões de ordem psicológica, parece ser mais natural interpretar a justaposição como conjunção do que como disjunção inclusiva; daí o abandono por Peirce dos Grafos Entitativos em prol dos Grafos Existenciais. Contudo, sob uma perspectiva estritamente lógica, uma classe é dual da outra, não havendo relevantes diferenças lógicas entre elas.¹

Os métodos diagramáticos para a *lógica proposicional clássica* (LPC) – Sistemas Alfa – utilizam, nas duas classes, seis regras de transformação de diagramas. Uma prova da validade de um argumento consiste em representar diagramaticamente as premissas do argumento e, mediante as seis regras de transformação, obter a representação diagramática da conclusão. Contudo, a prática na utilização de tais métodos diagramáticos sugere que, como heurística, é útil ter em conta, desde o início, a representação diagramática da conclusão.

Neste trabalho levaremos a sério a heurística acima sugerida. Propomos uma modificação dos Sistemas Alfa de tal modo que o primeiro passo na verificação da validade de um argumento consiste em representar diagramaticamente as premissas e a *negação* da conclusão (no caso dos Grafos Existenciais), e o segundo passo consiste em aplicar regras de transformação para obter a representação diagramática de uma contradição. Esse método recorre a somente quatro das seis regras originais de Peirce. O método modificado é uma versão diagramática do método de resolução introduzido por Robinson (1965), e amplamente utilizado na Ciência da Computação.

Tanto na correção (*soundness*) como na completude forte (*strong completeness*) desse método modificado, utilizaremos, para nos auxiliar nas provas, um sistema axiomático correto e fortemente completo para a LPC desenvolvido por Rosser (1953).

Na primeira seção, faremos uma apresentação sucinta dos Sistemas Alfa de Peirce, expondo somente os elementos necessários à compreensão do novo método diagramático aqui proposto. Uma apresentação mais completa do Sistema Alfa de Grafos Existenciais pode ser encontrada em Moraes e Queiroz (2001). O fio condutor da exposição será, justamente, o Sistema Alfa dos Grafos Existenciais; os correspondentes elementos do Sistema Alfa dos Grafos Entitativos são obtidos por dualidade e são, aqui, apenas brevemente mencionados.

Na segunda seção, iniciaremos com ilustrações dos elementos e fases do novo método diagramático, seguida de uma defesa da sua completude forte, a partir de um argumento informacional. Depois, utilizaremos o método original de Peirce e o sistema axiomático de Rosser para provar correção e completude forte do método modificado.

White (1976) realiza uma investigação assemelhada à nossa, mas o faz sob a perspectiva da *teoria da prova*.

1 Grafos de Peirce originais

A Figura 1 contém os elementos representacionais fundamentais do Sistema Alfa dos Grafos Existenciais. O retângulo representa a folha de asserção e denota a constante

1 Peirce afirma o seguinte: “One system seems to be about as good as the other, except that unnaturalness and aniconicity haunt every part of the system of entitative graphs, which is a curious example of how late a development simplicity is” (CP 4.434).

lógica “Verdadeiro”.² As outras figuras fechadas (elipses na Figura 1) – denominadas “cortes” – denotam a negação do que se encontra no interior da figura fechada.³ Desse modo, por exemplo, o corte mais interno representa $\neg q$, isto é, a negação de q . Um corte determina um novo nível. Desse modo, se atribuirmos o nível 0 à folha de asserção, a fórmula p mais à esquerda, na Figura 1, se encontra no nível 0, a fórmula p mais à direita se encontra no nível 1, assim como a fórmula $\neg q$, e a fórmula q no nível 2. A justaposição de representações denota a conjunção.⁴ Desse modo, no nível 1, ou seja, no interior do corte mais externo temos $p \wedge \neg q$, a conjunção de p e de $\neg q$; no nível 0, ou seja, no nível da folha de asserção temos $p \wedge \neg(p \wedge \neg q)$, conjunção de p e de $\neg(p \wedge \neg q)$. A Figura 1 pode ser lida de dois diferentes modos: (1) representando uma única fórmula $p \wedge \neg(p \wedge \neg q)$ ou (2) representando as duas fórmulas p e $\neg(p \wedge \neg q)$, ou seja, p e $p \rightarrow q$.

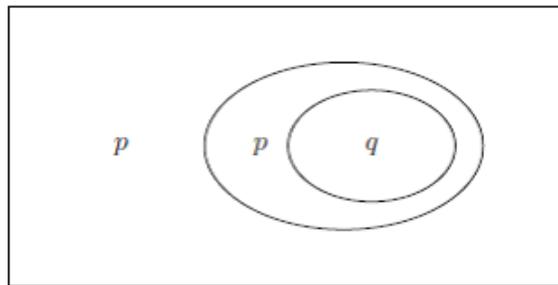


Figura 1. Representação de p e de $p \rightarrow q$ no Sistema Alfa dos Grafos Existenciais.

O teste de validade de um argumento, no Sistema Alfa dos Grafos Existenciais, consiste em representar as premissas do argumento diagramaticamente na folha de asserção e, com o auxílio de seis regras de transformação, obter a representação diagramática da conclusão.

A Figura 2 exemplifica duas regras de transformação: de (a) para (b) temos a introdução da dupla negação e de (b) para (a) temos a eliminação da dupla negação.⁵ É importante observar que, para a correta aplicação dessas regras, os cortes precisam ser concêntricos, ou seja, não pode haver nenhuma representação

- 2 No Sistema Alfa dos Grafos Entitativos, a “folha” denota, por dualidade, a constante lógica “Falso”. A esse respeito diz Peirce: “[...] in my first invented system of graphs, which I call entitative graphs, propositions written on the sheet together were not understood to be independently asserted but to be alternatively asserted. The consequence was that a blank sheet instead of expressing only what was taken for granted had to be interpreted as an absurdity” (CP 4.434).
- 3 O corte pode não ter algo em seu interior. Nesse caso, nos Grafos Existenciais, ele representará a constante lógica “Falso”; por dualidade, nos Grafos Entitativos, ele representará a constante lógica “Verdadeiro”.
- 4 No Sistema Alfa dos Grafos Entitativos, a justaposição denota, por dualidade, a disjunção inclusiva.
- 5 No Sistema Alfa dos Grafos Entitativos essas regras de transformação também são corretas, porque dependem apenas da negação e a negação é o seu próprio dual.

entre eles. Uma observação de suma importância para o argumento da próxima seção é a seguinte: por serem operações reversíveis, ou seja, pode-se introduzir a dupla negação e a seguir eliminá-la ou se pode eliminar a dupla negação e a seguir reintroduzi-la, estas são regras em que não há perda de informação: α e $\neg\neg\alpha$ veiculam exatamente a mesma informação, qualquer que seja a fórmula α .

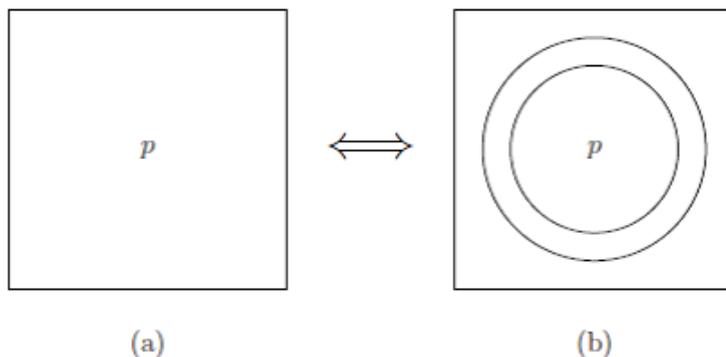


Figura 2. Regra de introdução de cortes concêntricos (de (a) para (b)) e regra de eliminação de cortes concêntricos (de (b) para (a)).

Para as próximas regras de transformação, introduziremos a noção de “caminho”. Ao invés de darmos uma definição formal, forneceremos um exemplo elucidativo. Na Figura 3, há dois “caminhos” a partir da folha de asserção: um caminho é dado pela fórmula $(p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$ e o outro pela fórmula $[p \wedge \neg(p \wedge \neg q)] \wedge \neg q$. Nesse caso, ambos os caminhos podem ser simbolizados por $C_1 \wedge \neg C_2$, em que C_1 e C_2 são conjunções (ou formas degeneradas delas⁶). Um “caminho” é toda fórmula que pode ser simbolizada por $C_1 \wedge \neg(C_2 \wedge \neg(\dots \neg(C_{n-1} \wedge \neg C_n)\dots))$, para algum número natural n , em que para todo $1 \leq i \leq n$, C_i é uma conjunção (ou forma degenerada dela). Em um “caminho” aumentamos o nível na medida em que avançamos para fórmulas mais internas.

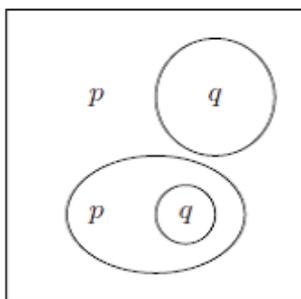


Figura 3. Dois “caminhos” a partir da folha de asserção.

6 Uma forma degenerada de uma conjunção é uma fórmula atômica ou a negação de uma fórmula atômica ou, simplesmente, a ausência de fórmula.

A Figura 4 exemplifica duas regras de transformação: de (a) para (b) temos a iteração e de (b) para (a) temos a deiteração.⁷ A regra de iteração, como o próprio nome sugere, permite a iteração de uma fórmula no mesmo nível ou em um nível maior de qualquer caminho em que ela ocupe o nível mais baixo. Por exemplo, na Figura 4, a regra de iteração nos permite inferir $p \wedge \neg(p \wedge \neg q)$ (Figura 4b) a partir de $p \wedge \neg \neg q$ (Figura 4a), ou, em termos da simbolização anteriormente sugerida, ela nos permite inferir $C_1 \wedge p \wedge \neg(C_2 \wedge p)$ de $C_1 \wedge p \wedge \neg C_2$. A regra de deiteração, como o próprio nome sugere, permite a deiteração de uma fórmula que *poderia ter sido* obtida por iteração. Por exemplo, na Figura 4b a fórmula p mais interna poderia ter sido (como, de fato, foi) obtida por iteração; logo, ela pode ser eliminada. Como no par anterior de regras, essas duas novas operações são reversíveis e, portanto, não há perda de informação na aplicação delas.

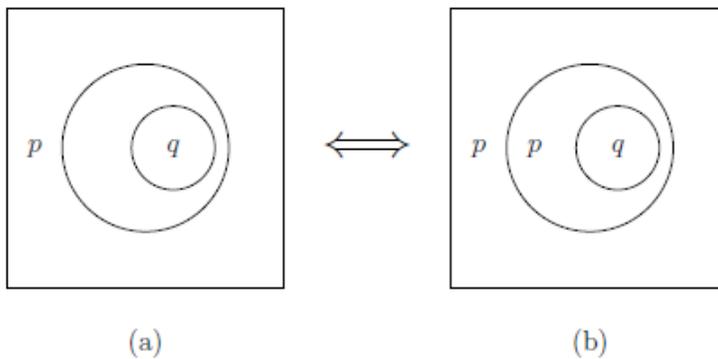


Figura 4. Regra de iteração (de (a) para (b)) e regra de deiteração (de (b) para (a)).

A correção das regras de iteração e deiteração para os Grafos Existenciais é dada conjuntamente pelas seguintes proposições, nas quais “ C_n ”, para todo número natural n , é uma conjunção qualquer, como já indicado anteriormente, e “ C_n^α ” abrevia “ $C_n \wedge \alpha$ ”, para todo número natural n e para toda fórmula α .

Proposição 1. $C_1^\alpha \leftrightarrow (C_1 \wedge \alpha)$

Comentário: Esta proposição estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre no mesmo nível de ocorrência da fórmula iterada (deiterada).

Proposição 2. $(C_1 \wedge \neg C_2) \leftrightarrow (C_1^\alpha \wedge \neg C_2^\alpha)$

Comentário: Esta proposição estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre no nível seguinte ao nível de ocorrência da fórmula iterada (deiterada).

7 No Sistema Alfa dos Grafos Entitativos, essas regras de transformação também são corretas, apesar da substituição da conjunção pela disjunção. As provas de correção virão, em seguida, por intermédio de uma série de proposições (ver Proposições 5 a 8).

Proposição 3. $[C_1^\alpha \wedge \neg(C_2^\alpha \wedge \neg C_3)] \leftrightarrow [C_1^\alpha \wedge \neg(C_2 \wedge \neg C_3^\alpha)]$

Comentário: Esta proposição, com auxílio da proposição anterior, estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre “pulando” um único nível em relação ao nível de ocorrência da fórmula iterada (deiterada): de $C_1^\alpha \wedge \neg(C_2 \wedge \neg C_3)$ obtém-se, pela Proposição 2, $C_1^\alpha \wedge \neg(C_2^\alpha \wedge \neg C_3)$ e desta, pela Proposição 3, $C_1^\alpha \wedge \neg(C_2 \wedge \neg C_3^\alpha)$; para a deiteração basta utilizar primeiro a Proposição 3 e, depois, a Proposição 2.

Proposição 4.

$\{C_1^\alpha \wedge \neg[C_2 \wedge \dots \wedge \neg(C_n^\alpha \wedge \neg C_{n+1}) \dots]\} \leftrightarrow \{C_1^\alpha \wedge \neg[C_2 \wedge \dots \wedge \neg(C_n \wedge \neg C_{n+1}^\alpha) \dots]\}$.

Comentário: Esta proposição, com o auxílio da proposição anterior, estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre “pulando” mais de um nível em relação ao nível de ocorrência da fórmula iterada (deiterada).

Comentário Geral: A aplicação das proposições acima para a iteração (deiteração) em grafos existenciais depende, também, da aplicação do Teorema da Substituição (*Replacement*).

De modo similar, para os Grafos Entitativos, a correção das regras de iteração e deiteração é dada, conjuntamente, pelas seguintes proposições, nas quais “ D_n ” é uma disjunção qualquer, para todo número natural n , e “ D_n^α ” abrevia “ $D_n \vee \alpha$ ”, para todo número natural n e para toda fórmula α :

Proposição 5. $D_1^\alpha \leftrightarrow (D_1^\alpha \vee \alpha)$

Comentário: Esta proposição estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre no mesmo nível de ocorrência da fórmula iterada (deiterada).

Proposição 6. $(D_1^\alpha \vee \neg D_2) \leftrightarrow (D_1^\alpha \vee \neg D_2^\alpha)$

Comentário: Esta proposição estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre no nível seguinte em relação ao nível de ocorrência da fórmula iterada (deiterada).

Proposição 7. $[D_1^\alpha \vee \neg(D_2^\alpha \vee \neg D_3)] \leftrightarrow [D_1^\alpha \vee \neg(D_2 \vee \neg D_3^\alpha)]$

Comentário: Esta proposição, com auxílio da proposição anterior, estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre “pulando” um único nível em relação ao nível de ocorrência da fórmula iterada (deiterada): de $D_1^\alpha \vee \neg(D_2 \vee \neg D_3)$ obtém-se, pela Proposição 6, $D_1^\alpha \vee \neg(D_2^\alpha \vee \neg D_3)$ e desta, pela Proposição 7, $D_1^\alpha \vee \neg(D_2 \vee \neg D_3^\alpha)$; para a deiteração basta utilizar primeiro a Proposição 7 e, depois, a Proposição 6.

Proposição 8.

$\{D_1^\alpha \vee \neg[D_2 \vee \dots \vee \neg(D_n^\alpha \vee \neg D_{n+1}) \dots]\} \leftrightarrow \{D_1^\alpha \vee \neg[D_2 \vee \dots \vee \neg(D_n \vee \neg D_{n+1}^\alpha) \dots]\}$

Comentário: Esta proposição, com o auxílio da proposição anterior, estabelece a correção da iteração (deiteração) quando ela ocorre “pulando” mais de um nível em relação ao corte de ocorrência da fórmula iterada (deiterada).

Comentário Geral: A aplicação das proposições acima à iteração (deiteração) em grafos entitativos depende, também, da aplicação do Teorema da Substituição (*Replacement*).

As duas últimas regras do Sistema Alfa dos Grafos Existenciais não serão utilizadas no novo método, porque elas não são operações reversíveis – uma não é a reversa da outra – e, portanto, há perda de informação na aplicação das mesmas. Contudo, antes de prosseguirmos, apresentaremos uma curiosidade sobre o número necessário de níveis para representar toda e qualquer fórmula nos Sistemas Alfas dos Grafos de Peirce.

Embora o Sistema Alfa dos Grafos Existenciais de Peirce permitam um número finito qualquer de cortes (e de níveis) aninhados, rigorosamente não necessitamos mais do que dois cortes aninhados, ou seja, não necessitamos mais do que três níveis. Essa afirmação é justificada mediante o recurso à forma normal conjuntiva:

- 1) Toda fórmula é equivalente a uma fórmula em forma normal conjuntiva (FNC), ou seja, a uma fórmula do tipo $C_1 \wedge \dots \wedge C_n$, para algum número natural n . Cada cláusula C_i , para $0 \leq i \leq n$, encontra-se no nível 0, o nível da folha de asserção.
- 2) Uma cláusula C_i , para $0 \leq i \leq 0$, é da forma $D_{i1} \vee \dots \vee D_{im}$, para algum número natural m , ou seja, $\neg(\neg D_{i1} \wedge \dots \wedge \neg D_{im})$ na linguagem dos Grafos Existenciais. Cada negação de literal $\neg D_{ij}$ encontra-se no nível 1, o nível de um corte na folha de asserção.
- 3) Se o literal D_{ij} é afirmativo, ou seja, se ele é uma fórmula atômica, então ele se encontra no nível 2, o nível de um corte em um corte da folha de asserção. Se o literal D_{ij} é negativo, ou seja, se ele é a negação de uma fórmula atômica, então podemos utilizar a regra da eliminação da dupla negação para eliminar cortes concêntricos e essa fórmula atômica, equivalente a $\neg D_{ij}$, encontra-se no nível 1, o nível de um corte na folha de asserção.

Similarmente, não necessitamos mais do que dois cortes aninhados para os Grafos Entitativos, ou seja, não necessitamos mais do que três níveis. Essa afirmação é justificada mediante o recurso à forma normal disjuntiva:

- 1) Toda fórmula é equivalente a uma fórmula em forma normal disjuntiva, ou seja, a uma fórmula da forma $D_1 \vee \dots \vee D_n$, para algum número natural n . Cada cláusula D_i , para $0 \leq i \leq n$, encontra-se no nível 0, o nível da folha de asserção.
- 2) Uma cláusula D_i , para $0 \leq i \leq 0$, é da forma $C_{i1} \wedge \dots \wedge C_{im}$, para algum número natural m , ou seja, $\neg(\neg C_{i1} \vee \dots \vee \neg C_{im})$ na linguagem dos Grafos Entitativos. Cada negação de literal $\neg C_{ij}$ encontra-se no nível 1, o nível de um corte na folha de asserção.
- 3) Se o literal C_{ij} é afirmativo, ou seja, se ele é uma fórmula atômica, então ele se encontra no nível 2, o nível de um corte em um corte da folha de asserção. Se o literal C_{ij} é negativo, ou seja, se ele é a negação de uma fórmula atômica, podemos utilizar a regra da eliminação da dupla negação

para eliminar cortes concêntricos e essa fórmula atômica, equivalente a $\neg C_{ij}$, encontra-se no nível 1, o nível de um corte na folha de asserção.

A Figura 3 em conjunto com a Figura 5 exemplifica a regra de apagamento em par. Como o próprio nome sugere, essa regra permite o apagamento de uma fórmula qualquer que se encontre em um nível par.⁸ Na Figura 3 poderíamos apagar as fórmulas p e $\neg q$, que estão no nível 0, o nível da folha de asserção, e obtermos o diagrama da Figura 5. Não provaremos a correção desta regra, porque ela não será utilizada no novo método.

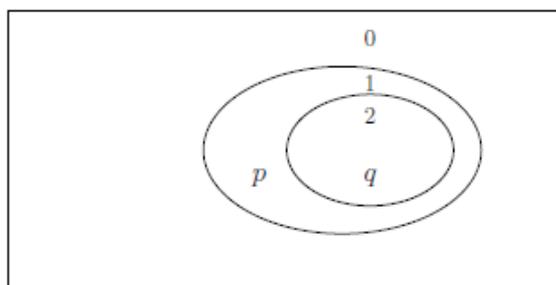


Figura 5. Regra de apagamento em par.

A Figura 5 em conjunto com a Figura 6 exemplifica a regra de inserção em ímpar. Como o próprio nome sugere, essa regra permite a inserção de uma fórmula qualquer em um nível ímpar.⁹ O diagrama da Figura 6 resulta do diagrama da Figura 5 pela inserção no nível 1 da fórmula r . Do mesmo modo que no caso anterior, não provaremos a correção desta regra, porque ela também não será utilizada no novo método.

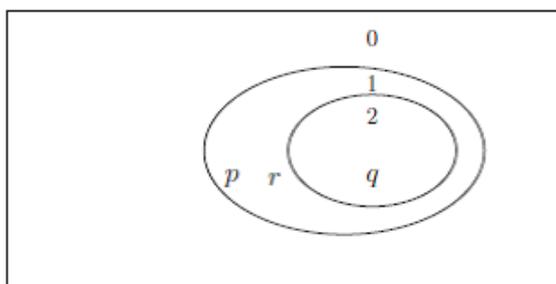


Figura 6. Regra de inserção em ímpar.

A título de ilustração e como um meio de comparação com o novo método aqui proposto, a prova da validade de *Modus Ponendo Ponens* se dá em quatro passos:

8 No Sistema Alfa dos Grafos Entitativos a correspondente regra é o apagamento em ímpar.

9 No Sistema Alfa dos Grafos Entitativos a correspondente regra é a inserção em par.

no primeiro passo, representamos diagramaticamente as premissas (Figura 1), no segundo passo aplicamos a deiteração para obtermos o diagrama da Figura 4a, no terceiro passo aplicamos a eliminação da dupla negação para obtermos o diagrama da Figura 7a, e, finalmente, no quarto passo, aplicamos o apagamento em par para obtermos o diagrama da Figura 7b. Até o terceiro passo não houve perda de informação, essa perda ocorreu somente no último passo.

Na próxima seção, apresentaremos ilustrações do novo método, seguida de um argumento informacional para a sua completude forte com respeito a LPC e, na sequência, uma prova de correção e completude fortes do Sistema Alfa dos Grafos Existenciais em relação a LPC.

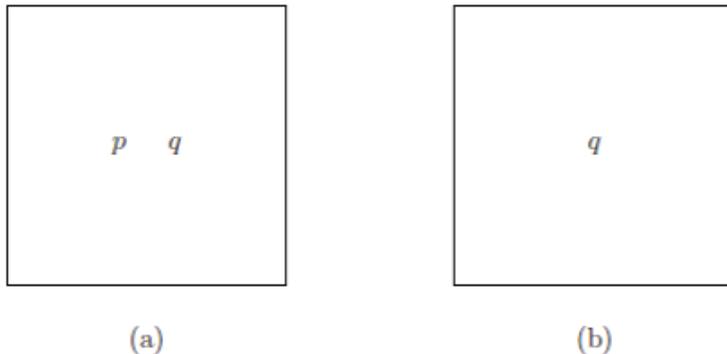


Figura 7. Passos finais na derivação da conclusão de *Modus Ponendo Ponens* pelo Método Tradicional.

2 Grafos de Peirce *ad absurdum*

Primeiro, apresentaremos uma série de ilustrações de aplicação do novo método. Os exemplos das figuras 8 a 11 não são meramente ilustrações, mas serão utilizados, no final da seção, para a prova de completude forte do método modificado.

A Figura 8 apresenta a prova de validade de *Modus Ponendo Ponens* no Sistema Alfa dos Grafos Existenciais *Ad Absurdum*. O primeiro passo consiste em representar diagramaticamente as premissas e a *negação* da conclusão (Figura 8a); o segundo passo consiste em aplicar a deiteração (Figura 8b); e o terceiro passo consiste em aplicar eliminação da dupla negação (Figura 8c), obtendo uma contradição (q e $\neg q$)¹⁰ e, com isso, provar a validade de *Modus Ponendo Ponens*.

10 Caso dispuséssemos da regra de apagamento em par, poderíamos transformar o diagrama da Figura 8c no diagrama da Figura 8d, destacando a contradição. Poderíamos, inclusive, aplicar a deiteração ao diagrama da Figura 8d e, novamente, apagamento em par para obtermos a folha de asserção contendo um único corte sem nada em seu interior, que é a expressão mais simples da contradição nos Grafos Existenciais de Peirce. Porém, nada disso é estritamente necessário.

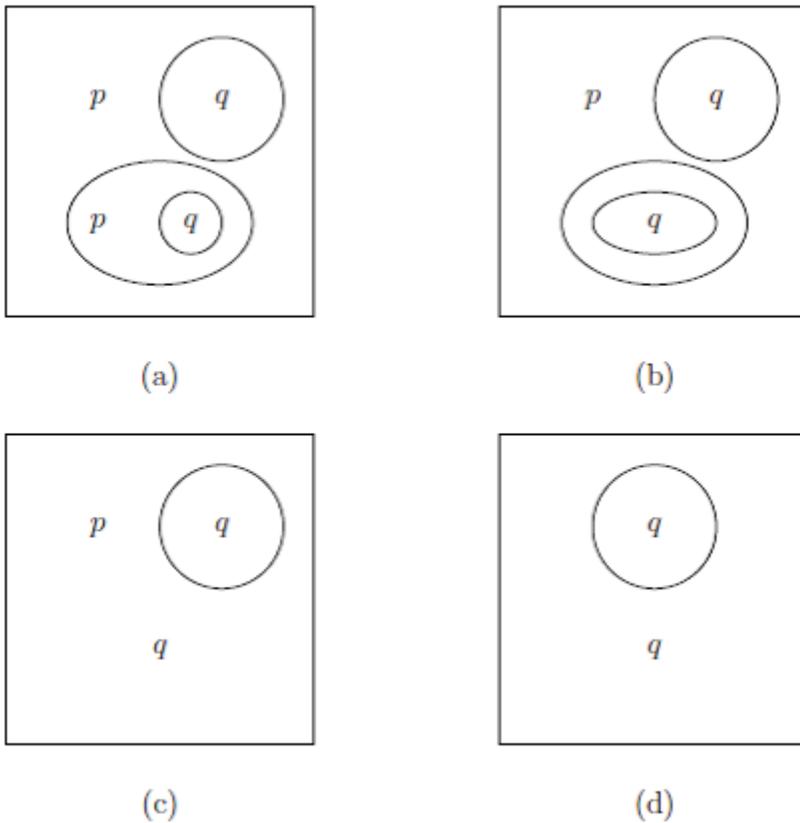


Figura 8. Validade de Modus Ponendo Ponens pelo Método Modificado.

A Figura 9 apresenta a demonstração da fórmula $\neg[p \wedge \neg(p \wedge p)]$, ou seja, do Axioma 1 de Rosser (1953), conforme apresentamos a seguir. O primeiro passo consiste em representar diagramaticamente a negação deste axioma (Figura 9a); o segundo passo consiste em aplicar eliminação da dupla negação (Figura 9b); e o terceiro passo consiste em aplicar a deiteração (Figura 9c), obtendo uma contradição (p e $\neg p$) e, com isso, provar a validade do Axioma 1 de Rosser (1953).

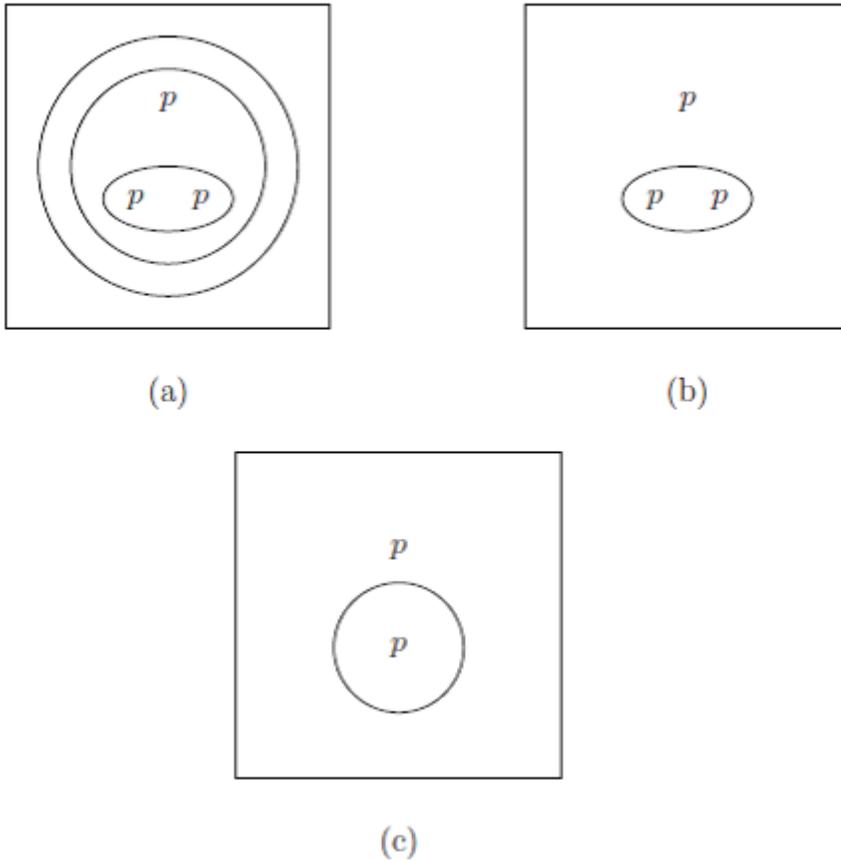


Figura 9. Demonstração do Axioma 1 de Rosser (1953).

A Figura 10 apresenta a demonstração do Axioma 2 de Rosser (1953), ou seja, da fórmula $(p \wedge q) \rightarrow p$. O primeiro passo consiste em representar diagramaticamente a negação deste axioma (Figura 10a); o segundo passo consiste em aplicar a eliminação da dupla negação (Figura 10b); e o terceiro passo consiste em aplicar iteração (Figura 10c), obtendo uma contradição $(p \wedge q)$ e $\neg(p \wedge q)$ e, com isso, provarmos a validade do Axioma 2 de Rosser (1953).

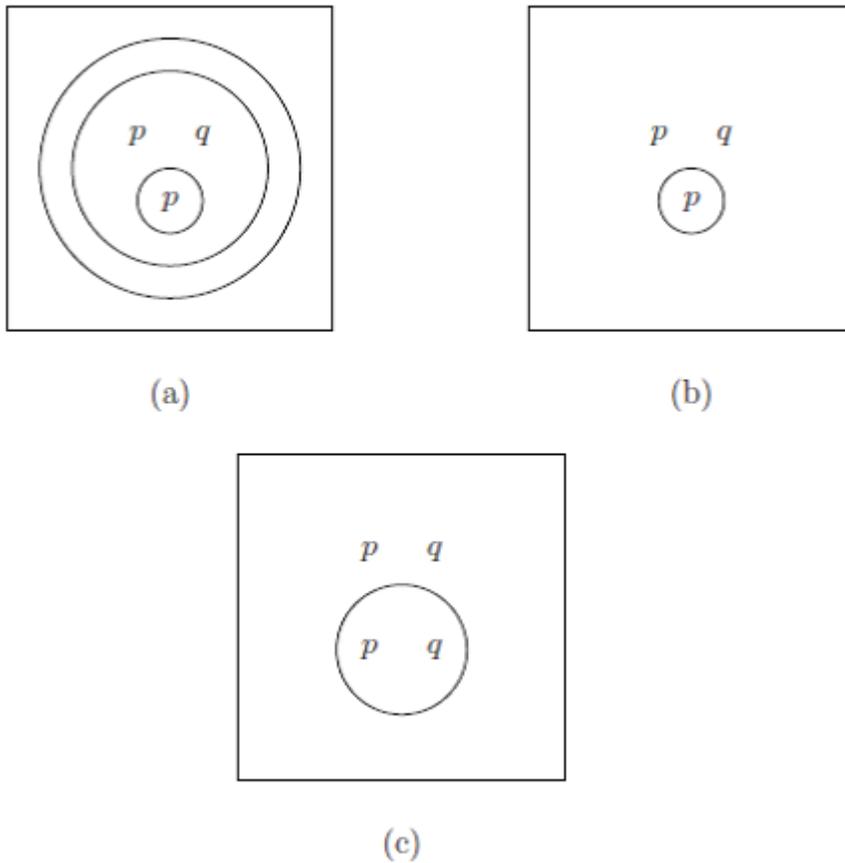


Figura 10. Demonstração do Axioma 2 de Rosser (1953).

A Figura 11 apresenta a demonstração do Axioma 3 de Rosser (1953), ou seja, da fórmula $\neg[\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg[\neg(q \wedge r) \wedge \neg(r \wedge p)]]$. O primeiro passo consiste em representar diagramaticamente a negação deste axioma (Figura 11a); o segundo passo consiste em aplicar três vezes a eliminação da dupla negação (Figura 11b); o terceiro passo consiste em aplicar duas vezes a deiteração (Figura 11c); e o quarto passo consiste em aplicar novamente a eliminação da negação (Figura 11d), obtendo uma contradição (q e $\neg q$) e, com isso, provar a validade do Axioma 3 de Rosser (1953).

Em seguida apresentaremos um argumento informal para a completude forte do método modificado e concluiremos esta seção com provas rigorosas de correção e completude forte do método modificado.

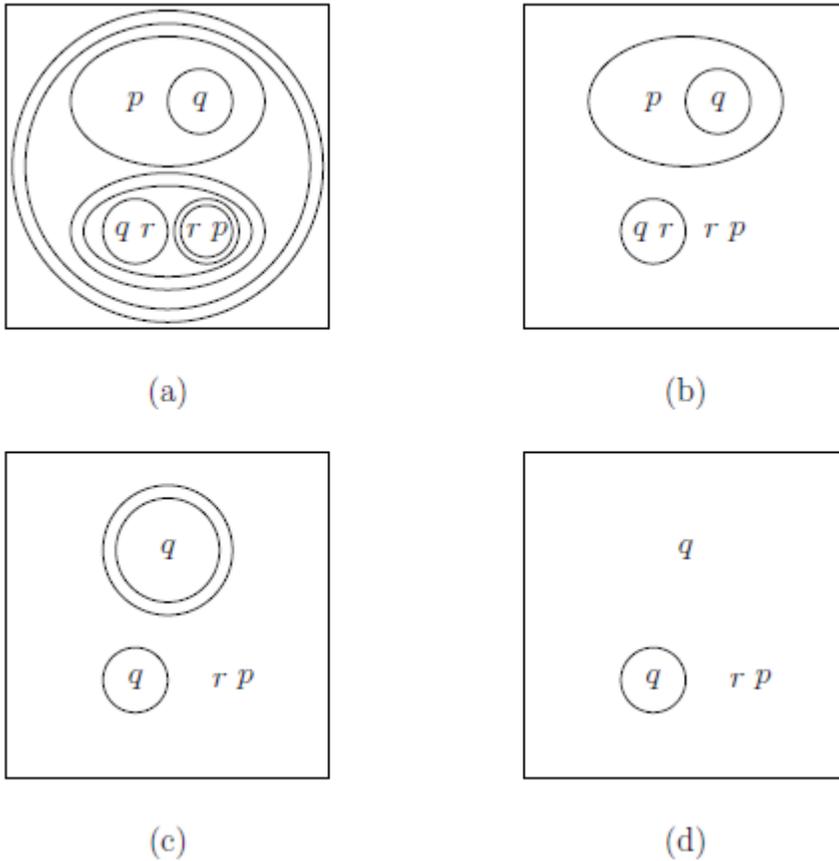


Figura 11. Demonstração do Axioma 3 de Rosser (1953).

O argumento informacional para a completude forte do método modificado depende das seguintes afirmações:

- 1) Um argumento é válido se, e somente se, o conjunto constituído pelas suas premissas e pela negação da conclusão é um conjunto inconsistente, ou seja, se dele podemos derivar uma contradição.
- 2) Uma contradição é, em termos informacionais, aquela que veicula a totalidade da informação que pode ser expressa na linguagem em uso.
- 3) Uma regra de inferência correta pode derivar menos informação do que as premissas, nunca mais.
- 4) O Sistema Alfa dos Grafos Existenciais é fortemente completo.

Suponha que um dado argumento seja válido. Nesse caso, por 1), o conjunto constituído pelas suas premissas e pela negação da conclusão é um conjunto inconsistente, ou seja, deve ser possível derivar dele uma contradição, ou seja, por 2), deve ser possível derivar algo que veicula a totalidade da informação que pode ser expressa na linguagem em uso. Para derivar algo que veicula a totalidade da informação que pode ser expressa na linguagem em uso, precisamos dispor desde o início, por 3), dessa totalidade da informação que pode ser expressa na linguagem em uso, e não perdê-la no processo de inferência. Portanto, somente precisamos utilizar regras que conservam a informação. Por 4), as regras de introdução da dupla negação, eliminação da dupla negação, iteração, e deiteração – as quatro regras do Sistema Alfa dos Grafos Existenciais que conservam informação – devem ser suficientes para a derivação da contradição.

Na prova da correção e da completude forte do método modificado utilizaremos o sistema axiomático de Rosser (1953). Esse sistema, correto e fortemente completo para a LPC, é constituído pelos seguintes axiomas, além das regras *Modus Ponendo Ponens* e de substituição uniforme:

Axioma 1: $p \rightarrow (p \wedge p)$

Axioma 2: $(p \wedge q) \rightarrow p$

Axioma 3: $(p \rightarrow q) \rightarrow [\neg(q \wedge r) \rightarrow \neg(r \wedge p)]$

Expressos exclusivamente em termos de negação e de conjunção, esses axiomas são formulados do seguinte modo:

Axioma 1: $\neg[p \wedge \neg(p \wedge p)]$

Axioma 2: $\neg[(p \wedge q) \wedge \neg p]$

Axioma 3: $\neg[\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg[\neg(q \wedge r) \wedge \neg(r \wedge p)]]$

Seja \models a relação de consequência semântica da LPC, \vdash_P a relação de consequência sintática do método original de Peirce, \vdash_R a relação de consequência sintática do sistema axiomático de Rosser, e \vdash_{PM} a relação de consequência sintática do método modificado.

Sabemos que valem: [1] $\Gamma \vdash_P \alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \alpha$ e [2] $\Gamma \models \alpha \Leftrightarrow \Gamma \vdash_R \alpha$.

A prova de correção do método modificado é dada pelos seguintes passos:

- 1) Se $\Gamma \vdash_{PM} \alpha$, então $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_P \perp$, por construção.
- 2) Se $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_P \perp$, então $\Gamma \vdash_P \neg\alpha \rightarrow \perp$, pelo Teorema da Dedução, demonstrável para o método original de Peirce em razão de [1].
- 3) Se $\Gamma \vdash_P \neg\alpha \rightarrow \perp$, então $\Gamma \models \neg\alpha \rightarrow \perp$, por [1].
- 4) Se $\Gamma \models \neg\alpha \rightarrow \perp$, então $\Gamma \models \alpha$.

A prova da completude forte do método modificado é dada pelos seguintes passos:

- 1) Se $\Gamma \vDash \alpha$, então $\Gamma \vdash_R \alpha$, por [2].
- 2) Se $\Gamma \vdash_R \alpha$, então $\Gamma \vdash_{PM} \alpha$, pelas construções anteriores.

O segundo passo depende da demonstração de que a regra *Modus Ponendo Ponens* opera corretamente no método modificado, o que é dado na Figura 8, e das demonstrações dos axiomas 1 a 3 pelo método modificado. A demonstração do Axioma 1 é dada na Figura 9, a demonstração do Axioma 2 é dada na Figura 10, e a demonstração do Axioma 3 é dada na Figura 11. A regra de substituição uniforme vigora tanto no método original de Peirce como no método modificado.

3 A modo de conclusão

As intuições que levaram ao desenvolvimento do método aqui proposto tiveram sua origem em uma concepção de lógica fundamentada na noção de informação, em lugar da noção de verdade. Não alegamos que alguém com uma concepção tradicional da lógica, entendida como um *corpus* de leis e operações que visam à verdade e a sua preservação, não pudesse ser levado a formular o método aqui proposto, mas certamente esse trabalho foi facilitado ao entender, desde o princípio, a lógica como um *corpus* de leis e operações que visam à preservação da informação, ou seja, sua não-ampliação por inferência, mas a manutenção.

A principal virtude do método é a sua simplicidade e elegância; seu principal defeito, que comparte com os grafos originais de Peirce, é o fato de utilizar somente dois conectivos primitivos, o que torna o processo de simbolização da linguagem natural e de tradução para a linguagem natural um processo, por vezes, árduo. Esse defeito é destacado em Shin (2002, p. 61-62).

Possa o seguinte provérbio latino ser aplicável ao presente caso: *A puro fonte defluit aqua pura*.

Referências

MORAES, Lafayette de; QUEIROZ, João. Grafos existenciais de C. S. Peirce: uma introdução ao sistema alfa. *Cognitio: revista de filosofia*, n. 2, p. 112-133, 2001.

PEIRCE, Charles S. *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Charles Hartshorne; Paul Heiss; Arthur Burks (eds.). Cambridge: Harvard University Press, 1931-1958. [Citado como CP seguido do volume e do número do parágrafo].

ROBINSON, John A. A Machine-oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM*, v. 12, n. 1, p. 23-41, 1965.

ROSSER, J. Barkley. *Logic for mathematicians*. New York: McGraw-Hill, 1953.

SHIN, Sun-Joo. *The iconic logic of Peirce's graphs*. London: The MIT Press, 2002.

WHITE, Richard B. A cut-elimination theorem for a Peircean logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, v. 12, n. 3, p. 253-262, 1976.

Endereço/ Address

Frank Thomas Sautter
Departamento de Filosofia – CCSH/UFSM
Avenida Roraima, 1000, Cidade Universitária
97105-900 – Santa Maria – RS – Brasil

Hércules de Araújo Feitosa
Departamento de Matemática - FC/UNESP
Avenida Luiz Edmundo C. Coube, 14-01
17033-360 – Bauru – SP – Brasil

Data de envio: 09-02-15

Data de aprovação: 10-04-15