Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'*Os Elementos* a partir de algumas escolas filosóficas

Euclid's Echoes: brief remarks on the influence of *The Elements* based on some philosophical schools

RAFAEL MONTOITO[1]
ANTONIO VICENTE MARAFIOTI GARNICA[2]

Resumo

A partir do estudo de algumas escolas filosóficas – nomeadamente o Racionalismo de Descartes, o Empirismo de Hume e o Criticismo de Kant – e de breves considerações sobre o mundo e a matemática gregas, este artigo pretende argumentar sobre a permanência de Euclides como modelo de geometrização e apreensão da Matemática.
Palavras-chave: *Euclides. Os Elementos. Descartes. Hume. Kant. Matemática grega.*

Abstract
Based on the study of some philosophical schools – such as the Cartesian Racionalism, the Empiricism of Hume and Kant's Criticism – and of some brief remarks on Mathematics in ancient world – particularly the greek Mathematics – this paper intends to understand how the euclidean ideas have been taken for a long time as a model of how to geometrize and of what Mathematics is.
Keywords: *Euclid. The Elements. Descartes. Hume. Kant. Greek Mathematics.*

Breve introdução

O percurso que resultou neste artigo iniciou-se com um projeto de pesquisa cujo objetivo central era a tradução do texto *Euclid and His Modern Rivals*, de Charles L. Dodgson (Lewis Carroll), publicado pela MacMillan em 1879, da qual decorreria um exame hermenêutico desta obra, pautado principalmente nos trabalhos de John Thompson e Gérard Genette[3]. Em síntese, o livro de Carroll defende a permanência, nas escolas inglesas, d'*Os Elementos* de Euclides como a única obra de referência para o ensino de Geometria, numa época em que, atendendo a uma conjuntura bastante

[1] Doutor em Ensino de Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência, da UNESP de Bauru, e docente do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Campus de Pelotas (RS). xmontoito@ig.com.br
[2] Doutor em Educação Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro. Livredocente pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru e docente dos Programas de Pós Graduação em Educação Matemática (UNESP-Rio Claro) e Educação para a Ciência (UNESP-Bauru). vgarnica@fc.unesp.br
[3] Trata-se dos pressupostos que fundamentam o que conhecemos hoje por Hermenêutica de Profundidade (HP), radicados principalmente nos trabalhos de John Thompson, sociólogo inglês assumidamente influenciado por Paul Ricoeur, em sua obra *Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa* (THOMPSON, 1995) e por alguns (ainda poucos) pesquisadores brasileiros na área de Educação Matemática. De Gérard Genette (GENETTE, 2009) vem o conceito de paratexto, que apóia significativamente a HP quando o objeto de análise é um texto escrito.

complexa, várias iniciativas de alteração nos currículos e programas escolares, defendiam a necessidade de haver outros materiais para o ensino. Como decorrência desse estado de coisas da época vitoriana, vários manuais para o ensino de Geometria começaram a ser elaborados e publicados e uma miríade de discussões entre autores, associações e matemáticos passou a ocupar os eventos e as páginas dos jornais. Defendendo o livro de Euclides dos ataques, Carroll elabora o *Euclides e Seus Rivais Modernos* como uma peça de teatro na qual um professor, cansado do trabalho árduo de corrigir exames, recebe, em sonho, a visita de um Euclides fantasmagórico com a proposta de, em dupla, procederem a uma análise minuciosa de boa parte dos manuais então recentemente produzidos visando a avaliar se há, dentre esses livros, algum mais adequado que *Os Elementos*. Defensor de Euclides, Carroll alinhava a trama de modo a concluir que todos os livros trazem, em algum momento ou de algum modo, paradoxos, lacunas, incorreções ou atualizações inúteis.

Certamente, todo um viés historiográfico acompanha esse projeto de tradução e exame hermenêutico do livro de Carroll, e se a História é uma prática problematizadora que, a partir do presente, volta-se ao passado cuidando de compreender a duração, os processos de alteração e manutenção que ocorrem no tempo, é natural que atentemos para a permanência da influência da obra de Euclides para compreender mais apuradamente o momento em que essa influência – no que diz respeito específico ao uso d'*Os Elementos* no cotidiano escolar – começa a dissipar-se. Este é, particularmente, o tema deste artigo, que se inscreve como um dos elementos de um conjunto de textos que pretende abordar faces da pesquisa que se inicia com a tradução de Carroll.

É necessário, entretanto, reiterar que neste artigo não está a íntegra nem da hermenêutica à obra de Carroll que deu origem a este texto, menos ainda uma hermenêutica d´*Os Elementos* de Euclides. O que se procura é realçar, tendo como ponto de apoio algumas obras e autores, uma certa disposição, que atravessa os tempos, em conceber a Matemática e, em particular a Geometria ou o Espaço a partir das elaborações euclideanas. Pode-se questionar, então, que este é um artigo que nem apresenta uma hermenêutica, nem se aprofunda filosoficamente nas correntes e autores que traz à cena. Este artigo fica num "entre". Ele é, em resumo, um exercício, uma tentativa de compreender como – considerando a inexistência de outras abordagens distintas da de Euclides, em até determinada época; ou a discordância de alguns autores em relação a concepções não-Euclideanas; ou mesmo supondo que alguns autores pudessem desconhecer ideias complementares ou rivais às de Euclides – uma concepção

Euclideana em relação à Matemática permanece e, na Inglaterra Vitoriana, será mote para um livro de Carroll, obra que, também, aliás, não participa deste texto, mas cuja hermenêutica este artigo apóia de forma significativa.

Assim, como ocorre com qualquer texto, o que se apresenta aqui é uma leitura a partir de alguns autores e a partir de algumas obras que nos ajudaram a criar um panorama sobre a importância da concepção euclideana para algumas escolas filosóficas. Fossem outros autores, seriam outras as leituras.

Um clássico

A obra *Os Elementos,* de Euclides, é, reconhecidamente, um clássico, seja na acepção mais usual, seja na acepção que Calvino no dá: “os clássicos são aqueles livros dos quais, em geral, se ouve dizer ‘Estou relendo...’ e nunca ‘Estou lendo...’ ” (CALVINO, 2007, p. 9). Historicamente, o livro de Euclides ocupa um lugar importante na História da Matemática, nas pesquisas acadêmicas e nos comentários e referências de muitos autores. Não é possível falar de *Euclides e Seus Rivais Modernos* sem falar de *Os Elementos*, e não é possível tratar d’*Os elementos* negligenciando sua posição de “clássico” e os motivos que o perpetuam como referência.

> Os clássicos são aqueles livros que chegam até nós trazendo consigo as marcas das leituras que precederam a nossa e atrás de si os traços que deixaram na cultura ou nas culturas que atravessaram (ou simplesmente na linguagem ou nos costumes).
> Isso vale tanto para os clássicos antigos quanto para os modernos. Se leio a *Odisseia,* leio o texto de Homero, mas não posso esquecer tudo aquilo que as aventuras de Ulisses passaram a significar durante os séculos e não posso deixar de perguntar-me se tais significados estavam implícitos no texto ou se não são incrustações, deformações ou dilatações. Lendo Kafka, não posso deixar de comprovar ou de rechaçar a legitimidade do adjetivo *kafkiano,* que costumamos ouvir a cada quinze minutos, aplicado dentro e fora de contexto. Se leio *Pais e filhos* de Turguêniev ou *Os possuídos* de Dolstoiévski não posso deixar de pensar em como essas personagens continuaram a reencarnar-se até nossos dias (CALVINO, 2007, p. 11-12).

Se lemos *Os Elementos*, ou se ao menos o folheamos, presentificam-se os esforços de sistematização e compilação das verdades geométricas “que constituem a composição científica mais antiga e extensa que nos foi legada em uma integridade quase perfeita e [que], sorte singular, trata-se da composição de uma ciência que não mudou desde então seus fundamentos” (LEVI, 2008, p. 22). Apesar dos diversos ataques que sofreu ao longo dos séculos, sua importância como verdade prática e como um dos fundamentos teóricos da matemática permanece inalterada.

> A crítica histórica se pergunta como pôde se formar tal acervo de conhecimentos e se ordenar em uma sólida construção tão pouco comum. Descobre então, por notícias fragmentadas geralmente sem documentos precisos, que três ou quatro séculos antes de Euclides, quiçá mais, os gregos já praticavam a geometria – talvez uma geometria puramente utilitária herdada de outros povos, mais antigos; talvez uma geometria entre mística e física – e descobre também que até o titulo "Elementos" não é nada novo e original − ao contrário, é algo tradicional como para nós seria "tratado" ou "curso". Assim, seriam *Os Elementos* de Euclides uma compilação mais ou menos boa, mais ou menos adulterada, que um modesto professor redigiu na forma de apontamentos úteis para seus alunos e que tiveram a sorte de parecer úteis também a muitas pessoas cultas e a muitos alunos de gerações posteriores? Ou seria tão irracional empreender uma vez a leitura imaginando que o filósofo-matemático, que tem fé no valor moral da capacidade de raciocínio do homem e que prova suas forças na construção de um *inútil monumento dedutivo*, não tem outro fim senão o de se alegrar ao olhar como a realidade parece curvar-se para se tornar espelho da invenção abstrata? (LEVI, 2008, p. 22).

Levi deixa estas indagações sem resposta. Não há como precisar seguramente quem foi Euclides[4], quando viveu e em que circunstâncias organizou seu livro mas, para Levi, o que importa é a *obra*[5]: concluída em meados do século IV a.C., *Os Elementos* é considerado pela história doxográfica e tradicional como uma compilação da lenta elaboração de várias pequenas descobertas, aperfeiçoamentos e melhorias, incluindo os estudos precedentes de Tales de Mileto e de Pitágoras. O resultado é uma obra que mostra "um mundo independente, criado com base em inteligência pura" (WORDSWORTH apud BICUDO, 2009, p. 93).

A edição original de Euclides há muito não mais existe. As cópias mais antigas sobreviventes são um exemplar (datado de 888 d.C.) da biblioteca do bispo Aretas de Cesareia (na Capadócia), baseado numa edição com comentários e acréscimos de Théon de Alexandria (um grego do século IV), e um exemplar da Biblioteca do Vaticano encontrado e divulgado por Peyrard em 1808, datado do século IX ou X, mas, ao que tudo indica, baseado numa versão anterior à de Théon[6]. Uma outra cópia do texto grego está na Biblioteca Bodleiana, em Oxford. No Brasil, apenas em 2009 foi publicada a primeira tradução para língua portuguesa, direta do grego, com um riquíssimo prefácio do qual se destaca o trecho a seguir:

> se com Homero a língua grega alcançou a *perfeição*, atinge com Euclides a *precisão*. E o *método formular*, que consiste em usar um conjunto de frases fixas que cobrem muitas ideias e situações comuns,

---

[4] As referências concordam que Euclides viveu entre 360 a.C. e 265 a.C, em Alexandria.
[5] Nas palavras de Levi: "Euclides é a obra" (2008, p. 82).
[6] A edição encontrada e divulgada por Peyrard deu novo fôlego aos estudos sobre a obra de Euclides e tem sido avaliada, depois do século XIX, como versão mais confiável que a de Théon.

> poderoso auxílio à memória em um tempo de cultura e de ensino eminentemente orais, serve para aproximar o geômetra do poeta e então mostrar que perfeição e precisão podem ser faces da mesma medalha (BICUDO, 2009, p. 13).

Embora o *corpus* do livro, suas definições ou demonstrações, tenham sobrevivido ilesas quanto à sua acuidade e verdade matemáticas, Euclides não atravessou os séculos sozinho. Na linha do tempo que une a Grécia antiga à Inglaterra vitoriana vários foram os filósofos que, de um modo ou de outro, contribuíram para que *Os Elementos* ganhasse a alcunha de "clássico". Refazer este percurso histórico (melhor dizer: *tentar* refazê-lo, refazê-lo em partes, esboçar alguns caminhos para conhecer essa trajetória) pode nos ajudar a entender por que Carroll depositava toda sua fé no uso de *Os Elementos* como manual para o ensino de geometria – e, consequentemente, entender suas motivações para escrever *Euclides e Seus Rivais Modernos*.

Os Elementos, a Matemática e o Mundo Gregos

Desde antes de Euclides, a geometria dividia opiniões e tinha suas próprias histórias e mitos. Para os egípcios, a matemática era concebida a partir de suas aplicações práticas. A agrimensura e a necessidade de estocagem, bem como o interesse financeiro, parecem ter sido o estopim para o estudo das figuras geométricas e suas propriedades, uma vez que, para alguns autores, a cobrança de imposto foi provavelmente o primeiro imperativo para o desenvolvimento da geometria. No Egito e na Mesopotâmia o domínio dos desígnios da natureza, a necessidade do controle técnico e as artesanias implicaram a busca sistemática de dar uma "forma" à matemática – mas também à teologia, à medicina etc – que impeliram os povos a um pensamento mais racional que transcendesse (mas dialogasse com) o pensamento mítico com que estavam acostumados: a terraplanagem, o preparo e medição de terrenos para plantio, a construção de templos e locais sagrados, as ofertas, a estruturação dos calendários etc representam bem as intersecções destes tipos de pensamento das civilizações antigas. O mesmo pode-se observar na civilização assírio-babilônica, para a qual o templo era o verdadeiro centro social, onde se condensava a tradição, se acumulava o saber e se organizavam as competências técnicas – sobretudo as mais altas e complexas como escrever, contar, medir – que davam vida à literatura, à matemática, à geometria e à astronomia. (CAMBI, 1999).

Na Grécia, a visão sobre a matemática era bem distinta: a geometria "tem em vista o conhecimento do que existe sempre, e não do que a certa altura se gera ou se destrói" (PLATÃO, 2011, p. 224), afirmava Platão baseado na crença de que as figuras reais existiam apenas no mundo das ideias. As almas, que já haviam escolhido suas vidas antes de nascerem, bebiam do rio Ameles, cuja água fazia esquecer na mesma proporção da quantidade bebida, restando-lhes apenas um resquício de lembranças. Apesar de a realidade não estar nas coisas sensíveis, cabia "à experiência sensível o papel de despertar na alma a recordação da essência das coisas, contemplada 'da eternidade'" (JAEGER, 2010, p. 711). "Platão interpreta a existência potencial do conhecimento matemático na alma como uma visão comunicada a esta numa vida anterior" (JAEGER, 2010. p. 709). A geometria era, assim, uma representação da verdade, e aqueles que se ocupavam dela serviam-se de figuras visíveis para estabelecer argumentações – ao pensar sobre um quadrado ou sua diagonal, por exemplo, pensavam nas relações que *qualquer* figura expressa por *aquela* desenhada permitia concluir (PLATÃO, 2011); do mesmo modo, a ideia de triângulo como uma figura retilínea formada por três lados é independente dos múltiplos triângulos diferentes que se possa desenhar e das coisas que podem ser vistas, naturais ou artificiais, com forma triangular (GASCA, 2007). Para o filósofo, "a matemática era concebida como um conhecimento importante não pelo seu valor prático, mas por sua capacidade de despertar o pensamento do Homem" (MIORIM, 1998, p.18). Não se podia negar, obviamente, o caráter prático da matemática, mas seu papel ia muito além: na educação da *Paideia*[7] grega, a matemática sobrepunha-se à ginástica (que dizia do mundo que nasce e morre,

[7]Inicialmente, a palavra "Paideia" significava simplesmente "criação de meninos", mas adquiriu um significado bem mais amplo com o passar dos anos, relacionado à educação grega. Originalmente, o conceito que melhor exprimia o ideal educativo grego era o de "Arete", entendido como um atributo próprio da nobreza, um conjunto de qualidades físicas, espirituais e morais, incluindo também a eloquência e a capacidade de persuasão (que estão bem representados, por exemplo, nos poemas de Homero). Sobre o "alargamento" do conceito de "Arete" sabe-se que a palavra "Kaloskagathia" engloba, além da heroicidade, a excelência física (atingida na busca pela beleza) e a moral (atingida na busca pela bondade). Para alcançar este ideal, foi proposto um programa educativo que implicava dois elementos fundamentais: a ginástica e a música (aliadas à leitura e ao canto): a primeira para o desenvolvimento do corpo, a segunda para o desenvolvimento da alma; este programa educativo foi, posteriormente, completado com a gramática. A partir do século V a.C. exigiu-se algo mais da educação grega: além de formar o homem, ela deveria também formar o cidadão, e este novo olhar fez com que a educação baseada na ginástica, na música e na gramática fosse insuficiente. Surge, então, o conceito de "Paideia": "a essência de toda a verdadeira educação ou Paideia é a que dá ao homem o desejo e a ânsia de se tornar um cidadão perfeito e o ensina a mandar e a obedecer, tendo a justiça como fundamento" (PLATÃO apud JAEGER, 2010, p 147). As palavras "civilização", "cultura", "tradição", "literatura" ou "educação", às vezes tomadas como elementos suficientes para compreender a Paideia grega, não servem, segundo Jaeger (2010), para bem defini-la como os gregos a entendiam, pois todos estes conceitos estão encerrados no de "Paideia".

que floresce e é perene), à música (que se limitava a produzir na alma um ritmo e uma harmonia, mas sem lhe infundir saber) e às artes profissionais, pois todas estas faziam maior ou menor uso da primeira. Além disso,

> segundo Platão, a eficácia da matemática reside em o seu estudo facilitar, àqueles que para ela têm talento, a capacidade para compreenderem toda a classe de ciências; quanto aos preguiçosos, ao serem nela iniciados e treinados, ainda que lhes não traga outra utilidade, ao menos estimula neles a agudeza de compreensão. É a máxima dificuldade que as matemáticas oferecem a quem as estuda que as qualifica como meio de cultura apto para a seleção espiritual (JAEGER, 2010, p. 899).

É utilizando matemática – mais especificamente o que hoje concebemos como a geometria – que Sócrates explica a Mênon a existência de uma fonte puramente espiritual de certeza científica, distinta da experiência sensível, quando, através de uma intervenção dialogada com um seu escravo, consegue fazê-lo descobrir, por si próprio, tendo como base somente uma figura mal desenhada, a regra do quadrado da hipotenusa[8]. Antes de descobri-la, no entanto, o escravo incorre em erros, as armadilhas para uma inteligência simplista dominada pelos sentidos. Ao escrever este diálogo, Platão deseja mostrar que

> a certeza que o jovem tem de que as coisas são assim, e não de outro modo, brota por fim unicamente da fonte da sua visão interior e, uma vez captada claramente a natureza das relações matemáticas que lhe servem de base, esta visão irradia uma força de convicção absoluta, que não deixa lugar à mais leve dúvida. Não é do ensino que recebeu, mas do próprio espírito e da consciência da necessidade da coisa, que brota esta força de convicção do conhecimento adquirido (JAEGER, 2010, p. 709).

Cambi (1999) defende que o Mundo Clássico teve seu pluralismo de povos, culturas, religiões e conhecimentos técnicos unificado pelo Mediterrâneo e, deste “Mediterrâneo-encruzilhada” emergiu a Grécia. Apesar dos feitos dos egípcios e da engenhosidade dos babilônios, a contribuição deles para a matemática limitou-se a fornecer aos gregos posteriores um arcabouço de conhecimentos concretos e regras práticas que, ao longo dos anos, seriam estudados e aperfeiçoados. Tales – um desses “aperfeiçoadores” –, tendo viajado para o Egito e conhecido as pirâmides, buscou explicações teóricas para

[8]“Mênon” é um dos diálogos de Platão. Nele, Sócrates dialoga com Mênon, que pretende que o mestre lhe explique o que é a virtude e se ela pode ser ensinada. O Teorema de Pitágoras ocorre, neste diálogo, como exemplo de como as verdades absolutas estão, de algum modo, disponíveis no espírito.

calcular suas alturas (algo que não sabemos *se* ou *como* os egípcios dominavam). Com a compreensão dos dados descobertos empiricamente pelos egípcios, Tales *deduziu* técnicas geométricas, extraindo o princípio abstrato da aplicação particular – este é o embrião da matemática grega: deduzir dos casos conhecidos, dos exemplos e das aplicações herdadas de outros povos, relações universais e aplicáveis.

Este método dedutivo surge também como tendência anti-ilustrativa, uma vez que era hábito traçar modelos de resolução e armar contas na areia, embora "o traçado na areia [tenha continuado] a ser, por séculos e séculos, o único resolutivo dos problemas geométricos" (BRITO, 1995, p.27), pois as mudanças de costumes não são imediatas.

> De acordo com a concepção da antiga sociedade escravagista grega, as atividades práticas não eram dignas dos homens livres, os quais deviam engajar-se somente na contemplação teórica. O trabalho manual era desprezado pelas classes dominantes, a única exceção era a arquitetura que se elevava ao nível de uma profissão para cidadãos[9]. Tal exceção pode ser explicada se lembrarmos que a arquitetura depende fundamentalmente da geometria (BRITO, 1995, p. 26)

Uma vez que as edificações permaneciam inalteradas no tempo e no espaço, essa arquitetura corroborava a ideia de uma matemática imutável e eterna.

Os pitagóricos, dando ênfase à retórica e à oratória, importaram dos filósofos eleáticos do sul da Itália a demonstração indireta, a "prova por absurdo". "Foram Parmênides e os eleáticos[10] que, claramente, fizeram da ausência de contradição o critério de verdade de uma afirmação" (BRITO, 1995, p. 28). Os pitagóricos, acreditando que a purificação só poderia ser alcançada pelo conhecimento puro, não apenas estudaram e apresentaram novos resultados a respeito dos números e da geometria, mas são também responsáveis "pela introdução da concepção, existente até hoje, de que os homens que trabalham com os conceitos matemáticos são superiores aos demais" (MIORIM, 1998, p. 15).

Quando os gregos da Antiguidade isolaram o ponto, a linha e o ângulo, tomando-os como elementos imutáveis que geravam os demais entes geométricos, lançaram a ideia de uma geometria que se desenvolvia inequivocamente a partir destes elementos e que

[9] Até os dias atuais é possível percebermos resquícios desta visão preconceituosa que separa o trabalho "intelectual" do trabalho "braçal". No Brasil, nas décadas de 1950 e 1960, surgiram muitas escolas técnicas cujo objetivo declarado era aprimorar a formação de profissionais para um país que vivia em expansão e industrialização. Os estudos sobre o cotidiano das escolas técnicas do interior paulista mostram que a formação em nível secundário regular, visando os estudos superiores, era destinada às elites, enquanto que a formação técnica era destinada às classes dos trabalhadores com o objetivo de qualificar a mão-de-obra.

[10] São chamados eleáticos os filósofos da escola eleática, cuja formação deu-se na cidade de Eleia, ao sul do que hoje é a Itália. Suas reflexões defendiam como único conhecimento válido aquele gerado pela razão.

possibilitava o conhecimento racional do universo; devido a isso, esta geometria identificava-se com ele, com sua verdade e com sua unicidade.

> A racionalidade grega, de fato, tem este duplo aspecto mais alto do homem: é regra universal na reconstrução da experiência, pela sua interpretação; e é um valor em si, um fim a desejar por si mesmo, que realiza o aspecto mais alto do homem: sua vocação à "vida contemplativa". São estes aspectos – comuns à racionalidade – que diferenciam nitidamente o mundo grego, não porque outras civilizações ignorem tais aspectos, mas porque não os afirmam na sua plenitude e como fim único de toda ação humana. Nesse sentido, podemos dizer que a Razão (o *Logos*) é uma descoberta dos gregos (CAMBI, 1999, p. 72).

Por volta de 430 a.C., Hipócrates de Chios desenvolveu o primeiro – ou um dos primeiros, nunca se sabe – sistema axiomático para a geometria. Pouco se pode afirmar com certeza também sobre Hipócrates: viveu em Atenas, ganhou a vida ensinando geometria e seu trabalho mais notável foi o estudo da quadratura das lúnulas, figuras geométricas planas limitadas por dois arcos circulares de raios distintos. Na primeira metade do século IV a.C., tem-se notícia do trabalho de Leon e, na segunda metade desse mesmo século, do trabalho de Theudius de Magnésia. Todos esses autores escreveram *Elementos*, título comumente dado aos tratados gregos de matemática (GASCA, 2007). Somente depois destas "vidas" e destas "ideias", que carregam a efervescência e as trocas do Mediterrâneo-encruzilhada, é que nos deparamos com Euclides. Isso pode servir para nos mostrar que nada ocorre "despregado" do fluxo do mundo: há ideias criativas, há sistematizações potentes, grandes criações, mas tudo isso surge por haver – de alguma forma – um caminho pavimentado anteriormente que nos permite essas criações, essas criatividades, essas sistematizações. Nunca nada é puramente a origem, é sempre continuidade.

Euclides é da fase helenística ou alexandrina da cultura grega e viveu numa Alexandria[11] que experienciava o seu ápice. A cidade, que reunia diferentes tradições, criou um espaço – algo como o que hoje chamaríamos de museu[12] – cujo objetivo era

---

[11] Várias foram as Alexandrias da Antiguidade, fundadas por Alexandre, o Grande. A Alexandria de Euclides é a da costa do mediterrâneo, no centro norte do Egito, fundada em 331 a.C.

[12] Os "museus" da Antiguidade eram santuários construídos para cultivar e adorar as Musas, centro de uma sociedade literária que neles fazia reuniões para adorá-las e promover competições literárias. O culto das Musas teve, segundo Cambi (1999), influência decisiva para a fundação do Museu de Alexandria, uma vez que as famosas escolas filosóficas de Platão e Aristóteles associavam-nas à filosofia, no século IV a.C., e, por isso, o interesse pessoal de Aristóteles e seus sucessores pelas ciências naturais certamente levou a uma predominância das atividades científicas sobre as puramente literárias nestes espaços. Entende-se, hoje, que os museus desta época eram algo entre uma universidade e uma academia, unindo ensino e pesquisa.

organizar todo o conhecimento científico existente. Os museus eram "uma comunidade colegiada de intelectuais livres para empreender seus estudos" (SCHUBRING, 2003, p. 31), caracterizando um caso antigo e raro de uma instituição de pesquisa.

A língua grega desempenhou função significativa na produção de saberes do mundo antigo:

> A escrita alfabética grega reproduzia o som das palavras, diferentemente do que ocorria com a escrita de outras civilizações, como por exemplo os hieróglifos egípcios, e se aproximava bem mais da oralidade do que outras formas de escrita, como o hebreu antigo, em que o mesmo conjunto de símbolos podia corresponder a palavras distintas, pois se anotavam somente os sons das consoantes (GASCA, 2007, p. 21).

O resultado disso, a longo prazo, foi que os debates e exibições gregos começaram a ser registrados em textos escritos e o hábito de transmitir as próprias ideias permitiu aprofundar e precisar melhor os conceitos abstratos de filosofia, política e ciência. Os textos escritos colaboravam para um crescimento na educação – acessíveis a mais pessoas e podendo ser revisitados, reestudados, consultados outra vez em caso de dúvida ou esquecimento – e estimulavam tanto uma reflexão sobre a natureza do conhecimento quanto a relação entre as distintas artes e disciplinas. Os "museus" armazenavam estes conhecimentos. A ciência grega, que à época vivia seu ápice, viu-se impelida a criar "obras de síntese que expusessem ordenadamente as diversas matérias desde seus primeiros princípios para facilitar assim a transmissão e a conservação dos conhecimentos adquiridos" (GASCA, 2007, p. 38) aos novos estudiosos.

Ao trabalhar no Museu de Alexandria, neste cenário e com estes propósitos citados anteriormente, Euclides escreveu *Os Elementos*, que "foram de suma importância para o desenvolvimento posterior da matemática, uma vez que neles está organizado todo o conhecimento matemático de uma época, com exceção dos estudos sobre seções cônicas e da geometria esférica" (BRITO, 1995, p. 34). Quase toda a obra de Euclides é composta de compilações de trabalhos de outros estudiosos que tinham, ao longo de muitos anos, recolhido, sistematizado, ampliado e aperfeiçoado a matemática prática dos egípcios, dos babilônios etc, dando-lhe a roupagem mais dedutiva e generalizante dos gregos.

Euclides, com seu método dedutivo, oferece ao leitor os elementos que alicerçarão toda a construção do conhecimento matemático em axiomas (suposições comuns a todas as ciências) e postulados (suposições particulares da ciência em estudo). O objetivo de

Euclides era que o seu sistema fosse livre de suposições não reconhecidas, baseadas na intuição, em conjecturas e na inexatidão e, para isso, *demonstra* todos os resultados que não são postulados utilizando-se da palavra escrita que, se para Sócrates era inferior à discussão oral, a partir de então passou a ser essencial, promovendo um raciocínio encadeado e inequívoco que levava apoditicamente[13] a uma solução incontestável – a palavra *demonstração*, em grego, é *apódeixis*, significando que o resultado alcançado é apodítico (GASCA, 2007).

Mas, ao que parece, Euclides não somente "juntou" tudo o que já existia, mas fez também importantes intervenções, tentando organizar o que tinha à sua disposição: ele descartou conhecimentos que considerava avançados (como as cônicas ou o estudo das lúnulas) na busca do que formaria o conhecimento *elementar*, organizando aquilo que seria a base para investigações atuais e futuras. A elaboração de Euclides é didática: ele "apresenta a matemática como um edifício que se apoia em bases muito rígidas e se constrói progressivamente seguindo um método que garante sua solidez" (GASCA, 2007, p. 53), o método dedutivo.

Os Elementos de Euclides abrem as portas para uma geometria logicamente organizada, construída passo a passo – ou melhor, *enunciado a enunciado* – e demonstrada de modo que o *logos* não conclui outra coisa senão o que ali lhe é apresentado. É uma geometria praticamente inquestionável, limítrofe, a linha divisória entre o humano e o divino, entre o perene e o eterno, entre a verdade e aquilo que se manifesta pelos sentidos.

Lloyd (1998) questiona esta aura que a obra de Euclides desfrutou ao longo de tantos séculos em seus estudos sobre a sociedade grega. Segundo ele, não é por terem sobrevivido que *Os Elementos* podem ser julgados como a melhor obra científica de qualquer período da Antiguidade pois, muitas vezes, um importante tratado de síntese eclipsava obras de grande originalidade e conteúdos, originando um tipo de regra da sobrevivência dos mais aptos: o "mais apto", porém, "muito amiúde não significava o mais adiantado, mas sim o mais fácil de compreender, a obra popular e não a especializada" (LLOYD, 1998, p. 289). De certo temos, porém, que a obra de Euclides serviu para os matemáticos de todas as épocas como exemplo de proceder quanto ao desenvolvimento de uma teoria e como modelo de como raciocinar e demonstrar matematicamente, além de apresentar um compêndio de resultados e verdades matemáticas aceitas que ajudariam no desenvolvimento da matemática (GASCA, 2007).

[13] Apodítico, na Filosofia, diz de uma modalidade de juízo que exprime uma decorrência lógica, não um simples fato. Um juízo apodítico caracteriza-se pela universalidade e pela necessidade.

Das mãos e do trabalho hercúleo de Euclides, *Os Elementos* rasgaram o tempo: na Antiguidade clássica, foram estudados por vários sábios que teceram comentários sobre eles (como Proclo e Eudoxo, por exemplo) e sua transmissão é atribuída à cultura islâmica, que os tornou conhecidos na Europa: numerosos sábios árabes estudaram *Os Elementos* e aprofundaram alguns de seus problemas, em especial os de álgebra e aritmética. Os bizantinos, por sua vez, quase esquecidos nesta grande ampulheta do tempo, parecem não ter desempenhado papel significativo nisso, além do de terem preservado os textos originais de Euclides cujas versões antigas e completas constituíram a base para as edições críticas “modernas” (SCHUBRING, 2003).

Houve, não podemos deixar de relatar, um contrafluxo. O quinto postulado de Euclides, conhecido hoje como o Postulado das Paralelas[14], gerou incertezas em muitos estudiosos sobre se podia ou não ser demonstrado como um axioma e, desde o século I d.C., com Ptolomeu, até o século XIX, quando em 1826 o matemático russo Nicolai Lobachevsky expôs os resultados de seus estudos sobre uma nova geometria – que ficaria conhecida como Geometria Hiperbólica –, várias tentativas de demonstrá-lo foram abandonadas, pois aqueles que se dedicavam a tal intento caíam em contradições, faziam erros que posteriormente viriam a invalidar suas demonstrações ou, até mesmo, descobriam resultados válidos que, por serem desconhecidos e bem diferentes daqueles da geometria euclidiana, eram desprezados. Cada “derrota” destas era um ganho para a geometria euclidiana e para a obra de Euclides, que permanecia inabalável, intocável, representante absoluta do mundo real (capaz de resolver seus problemas) e via de acesso à plenitude do espírito.

O livro de Euclides levou, então, a todos os povos que o estudaram, não somente os conteúdos da geometria, mas também a visão platônica sobre ela: o consenso sobre as verdades que somente o espírito alcançava, as formas geométricas como representações das ideias reais e a matemática como ciência que desenvolvia o espírito ficaram, mesmo que implicitamente, associadas àquelas páginas – ideias que seriam retomadas e defendidas por muitos filósofos, por ainda muitos anos; filósofos que reforçariam a geometria euclidiana e, consequentemente, a manutenção do livro de Euclides.

[14] E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 108).

Na Europa da Idade Média, *Os Elementos* eram referência para quem queria estudar matemática; eram lidos na Sorbonne desde seus primeiros anos, e em Oxford, a partir do século XV. A Companhia de Jesus, fundada em 1534, adotou em 1552 a obra de Euclides para o ensino de matemática em todos os seus *collèges* (SCHUBRING, 2003). O Seiscentos, que viria a seguir, foi o século da "nova ciência", mostrando o amadurecimento de uma nova visão do mundo e uma nova concepção do saber, frutos oriundos do Humanismo europeu e do Renascimento.

> O século XVI foi uma época de importância capital na história da humanidade, uma época de um enriquecimento prodigioso do pensamento e de uma transformação profunda da atitude espiritual do homem; uma época possuída por uma verdadeira paixão da descoberta: descoberta no espaço e descoberta no tempo; paixão pelo novo e paixão pelo antigo. Os seus eruditos desenterraram todos os textos enterrados nas velhas bibliotecas monásticas. Leram tudo, estudaram tudo, editaram tudo. Fizeram reviver todas as doutrinas esquecidas dos velhos filósofos da Grécia e do Oriente: Platão e Plotino, o estoicismo e o epicurismo, o cepticismo e o pitagorismo, o hermetismo e a cabala. Os seus sábios tentaram fundar uma ciência nova, uma física nova e uma nova astronomia; os seus viajantes e aventureiros sulcaram os continentes e os mares, e os relatos das suas viagens levaram à concepção de uma geografia nova, de uma nova etnografia. Alargamento sem igual da imagem histórica, geográfica, científica do homem e do mundo.
>
> Fervilhamento confuso e fecundo de ideias novas e de ideias renovadas. Renascimento de um mundo esquecido e nascimento de um mundo novo. Mas também: crítica, abalo, e enfim dissolução e mesmo destruição e morte progressiva das antigas crenças, das antigas concepções, das antigas verdades tradicionais que davam ao homem a certeza do saber e a segurança da ação. De resto, uma coisa supõe a outra: o pensamento humano é, na maior parte dos casos, polêmico. E as verdades novas estabelecem-se, quase sempre, sobre o túmulo das antigas. Seja qual for, de resto, a validade desta tese geral ela é verdadeira para o século XVI que tudo abalou, tudo destruiu: a unidade política, religiosa, espiritual da Europa; a certeza da ciência e a da fé; a autoridade da Bíblia e a de Aristóteles; o prestígio da Igreja e o do Estado (KOYRÉ, 1963, p. 23-24).

Dentre as transformações da época, uma das maiores foi a infringida pelo novo sistema solar de Copérnico, posteriormente aperfeiçoado por Kepler; seguiram-se a esta as mudanças na Física, com a mecânica de Galileu e a gravitação de Newton, e também as nas ciências não mecânicas, como a Biologia, a Química, a Fisiologia, a Geologia etc, que foram ganhando importância. Neste período de transformações, o cenário era "de riquezas e [de] um amontoado de escombros: tal é o resultado desta atividade fecunda e confusa, que tudo demoliu e nada soube construir, ou, pelo menos, acabar" (KOYRÉ, 1963, p. 24). O homem sentiu-se perdido num mundo que se lhe apresentava como incerto, onde nada era seguro e tudo parecia ser possível. A dúvida instalou-se e era preciso descobrir como separar o errado do certo, o verdadeiro do falso. Da busca a estas respostas nasceu o método científico, “a grande inovação da ciência moderna, aquela que terá consequências mais profundas e duradouras” (CAMBI, 1999, p. 301).

O mundo tal qual o homem o conhecia desde a Antiguidade estava mudando drasticamente, mas, e a geometria? Seguia a mesma, unindo o passado ao presente nas páginas de Euclides, estabelecendo-se quanto mais o tempo passava como algo imutável, acabado, definitivo. De todas as ciências – das criadas e das resgatadas, relidas e reestudadas nos livros antigos – a geometria euclidiana permanecia.

Euclides e a sua apreensão cartesiana

Quando, em 1637, René Descartes publicou o *Discurso do Método*, sua intenção era chegar a um método de verificação científica que validasse o resultado encontrado, dando ao pesquisador a certeza de que nenhuma escolha errada havia sido feita no decorrer de sua investigação ou observação. Era um método puramente “racional”, baseado no exercício pleno da razão humana. Descartes buscava apontar

> o caminho de uma ciência universal, feita a partir de novos fundamentos. Um novo edifício seria necessário, construído a partir de sólidos alicerces, que só seriam alcançados pela elaboração de novos princípios, primeiras proposições indubitáveis. De posse deste novo *método*, os homens poderiam, doravante, seguir os passos seguros de uma sabedoria teórica e prática. A filosofia e a ciência, mas também a moral, apresentariam, assim, ideias e orientações seguras que balizariam o pensamento e a ação (ROSENFIELD, 2005, p. 8).

Para o filósofo, o senso comum de uma época não poderia ser critério de verdade e as ideias deveriam passar por um crivo – um procedimento metodológico baseado na dúvida e na hiperbolização da dúvida – antes de serem assumidas como verdadeiras (ROSENFIELD, 2005). Poderia ter sido ele, então, o primeiro homem a minar a hegemonia euclidiana, posto que esta geometria era consenso há séculos. Mas, como veremos, o que Descartes fez foi usá-la como exemplo de seu método – pois era ela, no livro de Euclides, construída tal qual um edifício de sólidos alicerces, assim como ele via seu próprio método – e, sem duvidar da sua validade, ampliou seu estudo sugerindo uma abordagem algébrica.

O método de Descartes pautava-se por quatro regras: não aceitar como verdadeiro nada que não tivesse antes passado pelo crivo da razão (o que impediria o pensamento de ser tomado por paixões ou guiado por preconceitos); dividir tudo o que parecesse complexo em tantas quantas fossem as partes mais simples possíveis (pois a razão tem mais condições de resolver um problema perfeitamente delimitado do que de se encarregar de algo composto de várias partes); depois de feita esta decomposição, ela deveria ser ordenada (a remontagem para o composto teria que ser refeita sem desvios ou perdas de informações que viessem a prejudicar a verdade almejada); como este procedimento podia ser retomado e repetido por qualquer um, ele deveria dar lugar a tantas revisões quanto necessárias (DESCARTES, 2005).

> É esse o método e o remédio cartesiano. O método, ou seja, a via que conduz à verdade. E o remédio que nos cura da indecisão e da dúvida. Precisamos nos desfazer de todas as ideias, de todas as crenças recebidas, ou seja, libertarmo-nos de todas as tradições, de todas as autoridades, se quisermos uma vez reencontrar a pureza nativa da nossa razão, chegar à certeza da verdade (KOYRÉ, 1963, p. 48).

É possível perceber, então, por que a geometria de Euclides serviu como exemplo para a validade do método científico de Descartes: com relação à primeira regra, não se aceitava como verdadeiro nenhum resultado que não fosse demonstrado, salvo os postulados; quando o que devia ser demonstrado era uma afirmação mais complexa, tal qual na segunda regra, Euclides a dividia em partes e as demonstrava separadamente (ou considerando em alguma etapa uma das demonstrações anteriores), unindo as partes, como sugere a terceira regra, para formar o todo, isto é, para chegar ao final da demonstração; e, finalmente, a quarta regra referia-se à repetição do processo anterior por outras pessoas, com vistas a chegar ao mesmo resultado, o que de fato aconteceu por muitos anos toda vez que as demonstrações foram estudadas e refeitas.

A organização da geometria e o método racional de Descartes estão intimamente ligados:

> Os longos encadeamentos de razões, todas simples e fáceis, que os geômetras costumam utilizar para chegar a suas mais difíceis demonstrações, me haviam feito imaginar que todas as coisas passíveis de serem conhecidas pelos homens se seguem umas às outras do mesmo modo, e contanto que nos abstenhamos de aceitar alguma como verdadeira que não o seja, e que mantenhamos sempre a ordem necessária para deduzi-las umas das outras, não pode haver nenhuma tão afastada à qual enfim não se chegue, nem tão oculta que não se descubra. E não foi muito difícil buscar por quais era preciso começar, pois eu já sabia que era pelas mais simples e mais fáceis de conhecer; e considerando que, entre todos os que até agora buscaram a verdade nas ciências, apenas os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações, isto é, algumas razões certas e evidentes, não duvidei de que não fosse pelas mesmas que eles examinaram; disso eu não esperava nenhuma outra utilidade a não ser que elas acostumariam meu espírito a se alimentar de verdades e não se contentar com falsas razões (DESCARTES, 2005, p. 55-56).

Para Descartes, “a Aritmética, a Geometria e as outras ciências desta natureza, que não tratam senão de coisas muito simples e muito gerais, sem cuidarem muito em se elas existem ou não na natureza, contêm alguma coisa de certo e indubitável” (DESCARTES, 1998, p. 19) pois, quer estivesse dormindo ou acordado, dois mais três seria sempre cinco e o quadrado teria sempre quatro lados. As ciências da época buscavam seus princípios na filosofia, mas esta parecia, a Descartes, confusa, incerta e duvidosa: do desmoronamento das suas primeiras certezas, salvaram-se apenas as que não dependiam da filosofia: a crença em Deus e na matemática. Koyré (1963) afirma ser importante notar isso, pois, com efeito, a metafísica de Descartes tentará ligar essas duas certezas e apoiar uma na outra. Deus e a geometria euclidiana *eram* e *estavam*, no sentido de que existiam independentemente de poderem ser ou não vistos e reconhecidos na natureza.

> Por exemplo, eu via claramente que, ao supor um triângulo, era preciso que seus três ângulos fossem iguais a dois retos; mas nada me assegurava que houvesse no mundo algum triângulo. Ao passo que, voltando a examinar a ideia que eu tinha de um Ser perfeito, eu descobria que a existência nele estava compreendida, da mesma forma que está compreendida na de um triângulo que seus três ângulos sejam iguais a dois retos, ou, na de uma esfera, que todas as suas partes estejam igualmente distantes de seu centro, ou mesmo de maneira mais evidente ainda; e que, portanto, é pelo menos tão certo que Deus, que é esse Ser perfeito, é ou existe, quanto o seria qualquer demonstração de geometria (DESCARTES, 2005, p. 74).

Descartes, assim como os gregos, pensava que a geometria ajudava a educar o espírito. “Eu tiraria o prazer de aprendê-la por vós mesmos e a utilidade de cultivar vossos espíritos ao exercitá-la, o que é a meu ver o que de mais importante se pode retirar desta ciência” (DESCARTES, 1836, p. 3), diz ele, no início de seu *La Géométrie*, sobre sua opção em não explicar todas as construções necessárias já no começo do livro, mas deixá-las para quando isso fosse efetivamente preciso. O que faz a geometria da obra de Descartes diferir da grega é sua abordagem algébrica. Esta associação entre Geometria e Álgebra permitiu a Descartes ver a matemática como tendo “unidade”, pois os mesmos métodos – os algébricos – se aplicavam tanto à geometria quanto à aritmética, tanto ao número quanto ao espaço. Por *mesmos métodos* é preciso entender *mesmos passos do espírito*, o que nos mostra que o importante não eram os objetos – números ou linhas – mas justamente os passos, as ações, as operações com que o espírito ligava esses objetos, estabelecendo relações, comparando-as umas com as outras, medindo umas pelas outras e assim ordenando-as em séries (KOYRÉ, 1963).

Mas, se a abordagem da geometria altera-se com essa visão algébrica, as "certezas" do filósofo com relação a ela permanecem as mesmas apresentadas pelos gregos:

> Quando imagino um triângulo, ainda que não haja talvez em nenhum lugar do mundo, fora de meu pensamento, uma tal figura, e que nunca tenha havido alguma, não deixa, entretanto, de haver uma certa natureza ou forma, ou essência determinada, dessa figura, a qual é imutável e eterna, que eu não inventei absolutamente e que não depende, de maneira alguma de meu espírito; como parece, pelo fato de que se pode demonstrar diversas propriedades desses triângulo, a saber, que os três ângulos são iguais a dois retos, que o maior ângulo é oposto ao maior lado e que outras semelhantes, as quais agora, quer queira, quer não, reconheço mui claramente e mui evidentemente estarem nele, ainda que não tenha antes pensado nisto de maneira alguma, quando imaginei pela primeira vez um triângulo; e, portanto, não se pode dizer que eu as tenha fingido e inventado (DESCARTES, 1998, p. 56).

Esses excertos de Descartes nos ajudam a argumentar sobre sua visão euclidiana de mundo. Inexiste, para ele, a possibilidade de haver outras geometrias, não há a possibilidade de "jogar" com pressupostos de modo a, desse jogo, fazer surgir geometrias alternativas – como a hiperbólica, por exemplo, na qual os triângulos têm *sempre* a soma dos ângulos internos menor que dois retos. Para Descartes foi "exclusivamente na matemática que o espírito humano chegou à evidência e à certeza – e conseguiu constituir uma ciência, uma disciplina verdadeira, na qual se progride, em ordem e com clareza, das coisas mais simples para as construções mais difíceis" (KOYRÉ, 1963, p. 51).

No racionalismo de Descartes, clareza implica acessibilidade plena ao espírito, ou seja, é claro o que a inteligência pode conceber sem nenhuma interferência da imaginação e dos sentidos. Isto praticamente equivale a dizer que só é claro o que é matemático ou, pelo menos, matematizável (KOYRÉ, 1963). Depois de admitir que permanecera firme na resolução de não supor nenhum outro princípio senão o raciocínio para demonstrar a existência de Deus e da alma, Descartes acrescentou, no *Discurso do Método*, sobre as demais coisas a serem conhecidas: "nada admitir como verdadeiro que não me parecesse mais claro e mais certo do que antes me haviam parecido as demonstrações dos geômetras" (DESCARTES, 2005, p. 79). É à geometria euclidiana que ele está se referindo, são as demonstrações contidas em *Os Elementos* que ele toma como base para verificar se as demais ideias são claras e certas. O método de Descartes está, de algum modo, atrelado à geometria, *vive* nela, ele *exemplifica* seus quatro passos por meio dela:

sublinhando a importância da obra de Euclides, não havia para Descartes razão alguma para abandonar ou negligenciar *Os Elementos*.

Euclides e(m) Hume

Cerca de um século mais tarde, outra importante apreensão filosófica surge na Europa: o Empirismo do inglês David Hume (1711-1776) exige o abandono da metafísica, que "não é propriamente uma ciência, mas, ou decorre dos infrutíferos esforços da vaidade humana que pretende penetrar à força em assuntos completamente inacessíveis ao nosso entendimento, ou dos ardis das superstições populares" (HUME, 1984, p. 135). Admite-se a vitória da razão cética que reconhece uma irresistível força da natureza que se sobrepõe à razão. Quando Hume declara, no princípio da *Investigação sobre o Entendimento Humano*, "Sê filósofo, mas, em meio a toda a tua filosofia, não te esqueças de ser homem" (HUME, 1984, p. 134), está ressaltando que o homem-filósofo deve ceder lugar ao homem-natureza (REALE e ANTISERI, 2004).

De um modo geral – já que nossa intenção é investigar como diferentes abordagens filosóficas consideram a obra de Euclides, não propriamente deter-nos de modo aprofundado em cada uma das abordagens que vêm à cena –, Hume divide as *percepções*, conteúdos da mente humana, em duas categorias: as *impressões* e as *ideias* (ou *pensamentos*). As impressões são "todas as nossas percepções mais vivazes, quando ouvimos, vemos, sentimos, amamos, odiamos, desejamos ou queremos" (HUME, 1984, p. 138), ou seja, em outras palavras, *ter impressões* significa *sentir* algo. Por outro lado, as ideias são as imagens enfraquecidas que a memória produz a partir das impressões, isto é, *ter ideias* significa *pensar*:

> Embora nosso pensamento pareça possuir essa liberdade ilimitada, examinando o assunto mais de perto vemos que em realidade ele se acha encerrado dentro de limites muito estreitos e que todo o poder criador da mente se reduz à simples faculdade de combinar, transpor, aumentar ou diminuir os materiais fornecidos pelos sentidos e pela experiência (...). Em resumo, todos os materiais do pensamento derivam da sensação interna ou externa; só a mistura e composição destas dependem da mente e da vontade. Ou, para expressar-me em linguagem filosófica, todas as nossas ideias ou percepções mais fracas são cópias de nossas impressões, ou percepções mais vivas (HUME, 1984, p. 138-139).

As ideias, portanto, são mais *fracas* que as impressões e são produzidas pela memória a partir destas; sendo assim, as ideias *dependem* das impressões e podem ser *simples* ou *complexas* (o que também ocorre com as impressões), sendo as do segundo grupo, na verdade, constituídas por três tipos distintos de associações de ideias simples: semelhança[15], contiguidade no tempo e no espaço[16] e causa e efeito[17]. Destas relações decorre uma grande mudança com relação às correntes filosóficas anteriores: *não há ideias inatas*: as ideias só ocorrem depois de já termos impressões (REALE e ANTISERI, 2004).

Depois desta rápida "introdução" ao empirismo humeano, chegamos à parte que nos interessa mais objetivamente aqui: Hume afirmava que todos os objetos da razão ou investigação humana pertenceriam ou ao grupo das *relações de ideias* ou ao das *questões de fato*. É no primeiro grupo que encontramos a geometria.

As questões "de fato" são verificáveis apenas pela experiência e, para isso, contam com o desenvolvimento dos sentidos humanos, precisam ser analisadas com relação às suas causas e efeitos para, a partir disso, serem generalizadas. Contrárias à necessidade da experiência para se adquirir o conhecimento são as questões do grupo de relações de ideias, grupo a que

> pertencem as ciências da Geometria, Álgebra e Aritmética; e, numa palavra, toda afirmação que seja intuitivamente ou demonstrativamente certa. Que *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos dois lados* é uma proposição que expressa uma relação entre essas figuras. Que *três vezes cinco é igual à metade de trinta* expressa uma relação entre esses números. As proposições desta espécie podem ser descobertas pela simples operação do pensamento, sem dependerem do que possa existir em qualquer parte do universo. Ainda que jamais existisse um círculo ou um triângulo na natureza, as verdades demonstradas por Euclides conservariam para sempre a sua certeza e evidência (HUME, 1984, p. 141).

Eis aí a declaração de Hume de que a geometria era o que era – uma afirmação e um pensamento bastante análogos aos de Descartes –, de modo que não havia nenhuma brecha para se pensar em uma geometria que não fosse a euclidiana. Como ele mesmo afirma, tudo aquilo demonstrado por Euclides eram evidências incontestáveis, que nem precisavam da experiência para serem aceitas como verdade, pois poderiam ser

[15]Uma associação por semelhança ocorre quando passamos de uma ideia a outra por algo que as vincula; por exemplo: ao pegarmos uma carta, nos lembramos de quem a escreveu.

[16] Uma associação por contiguidade no tempo e espaço ocorre quando, por exemplo, ao visitarmos uma casa, pensamos em quem morou lá anteriormente.

[17] Uma associação por causa e efeito é quando a ideia da causa suscita-nos a do efeito, ou vice-versa; por exemplo: ver uma imagem de uma geleira nos faz pensar no frio.

alcançadas pelo pensamento. Parece interessante ressaltar outro contraponto: se, por um lado, Hume afirma que não existe nada mais livre do que a imaginação do homem e que "embora ela não possa ultrapassar o fundo original das ideias fornecidas pelos sentidos internos e externos, [ela] tem um poder ilimitado de misturar, unir, separar, e dividir essas ideias em todas as modalidades de ficção e visão" (HUME, 1984, p. 151), em nenhum momento Hume considerou a possibilidade de alterar algumas ideias da geometria euclidiana "jogando" com conceitos. Se a imaginação, livre e ilimitada, poderia conceber, por exemplo, um grifo pela associação de ideias, por que, por esta mesma associação, não poderia imaginar um triângulo cuja soma dos ângulos fosse menor que dois retos, ou mesmo negar a possibilidade de se traçar uma paralela a uma reta dada passando por um ponto dado? Se a geometria não precisava da experiência, o que, então, impediria esses "jogos"?

Talvez também aqui se possa perceber a influência do livro de Euclides sobre o pensamento humeano. Tudo havia sido tão bela e coerentemente demonstrado, tudo estava tão coerentemente organizado e encadeado, que os resultados, alcançados pelo raciocínio, não pela experiência, mantinham inquestionável o *corpus* da geometria como proposto por Euclides.

> A grande vantagem das ciências matemáticas sobre as morais consiste em que as ideias das primeiras, por serem de ordem sensível, são sempre claras e determinadas, a mais diminuta distinção entre elas é imediatamente perceptível e os mesmos termos expressam sempre as mesmas ideias, sem ambiguidade nem variação. Nunca se confunde uma oval com um círculo ou uma hipérbole com uma elipse. O isósceles e o escaleno são separados por diferenças mais precisas do que o vício e a virtude, o justo e o injusto. Se um termo qualquer é definido em Geometria, o intelecto de per si substitui prontamente, em todas as ocasiões, o termo definido pela sua definição (HUME, 1984, p. 156).

O que fora definido e demonstrado por Euclides era considerado conhecimento válido e inquestionável, com termos adequados que bem representavam os objetos nomeados, o que implica ser o empirismo humeano, nesta história que estamos traçando, mais uma importante coluna de sustentação à geometria euclidiana e, por extensão, ao livro *Os Elementos*.

Euclides e o criticismo de Kant

Seguindo uma trama cronológica, nos aproximamos cada vez mais da época de Carroll. Tentemos agora uma aproximação ao Criticismo de Immanuel Kant: a leitura de uma das suas publicações mais importantes – *A Crítica da Razão Pura*[18]– e de textos elaborados por alguns de seus comentadores, talvez nos possibilite compreender o modo como ele, Kant, pensa a geometria. Essa aproximação, mesmo que tímida, exige que cuidemos, antes, de alguns conceitos básicos da filosofia kantiana.

"Nosso conhecimento começa com a experiência" (KANT, 1987, p. 25), declara o filósofo na introdução do seu texto. Sem ela, o que despertaria a faculdade do conhecimento? Os objetos tocam nossos sentidos e, por um lado, produzem representações; por outro, despertam nosso entendimento para que as representações possam ser comparadas, conectadas, separadas etc, de modo que, pensando em função de um tempo decorrido, nenhum conhecimento precede a experiência e todo conhecimento começa com ela. Mas o fato de o conhecimento começar *com* a experiência não significa que ele se origine *da* experiência. Kant propõe, então, investigar se poderia acontecer de o nosso conhecimento da experiência ser um composto entre aquilo que recebemos pelas impressões (por meio dos nossos sentidos) e aquilo que a nossa própria faculdade de conhecer fornece. Se sim, esta "mistura" que resulta no conhecimento poderia apresentar partes de um "conhecimento independente da experiência e mesmo de todas as impressões dos sentidos" (KANT, 1987, p. 25). Para investigar a existência destes conhecimentos, Kant dá-lhes o nome de *conhecimentos a priori*, distinguindo-os dos *conhecimentos empíricos*, cujas fontes são *a posteriori*, isto é, são experiência.

Segundo Reale e Antiseri (2004), o conhecimento científico consta fundamentalmente de proposições ou juízos que, além de serem *universais* e *necessários*, incrementam continuamente o conhecimento, possibilitando a expansão dos campos da ciência. Para responder à pergunta que fizera – se existem e quais seriam os conhecimentos *a priori* – , Kant divide os juízos em *analíticos* e *sintéticos*. Um juízo é a conexão entre dois conceitos dos quais um deles (digamos, *A*) cumpre a função de sujeito e, outro (digamos, *B*), a de predicado. Um juízo é dito *analítico* quando o conceito do predicado está contido no sujeito e pode ser entendido ou extraído dele por pura análise (por exemplo: se digo "todo corpo (A) é extenso (B)", estou pronunciando um juízo analítico, pois o conceito de extensão é sinônimo de corporeidade, já que não há corpo sem extensão); *sintéticos* são os juízos em que o conceito B (que funciona como predicado) não se encontra no conceito A (que funciona como sujeito), mas acrescenta a

[18] Kant publicou duas edições de *A Crítica da Razão Pura*: a primeira em 1781 e a segunda em 1787. A segunda edição, comumente chamada de "edição B", foi a que consultamos.

este algo que não é "extraível" dele por mera análise (por exemplo: se digo "todo corpo (A) é pesado (B)", estou pronunciando um juízo sintético, pois o conceito de "pesado" não pode ser extraído, por pura análise, do de "corpo" – uma prova disso é que Aristóteles, por muito tempo, considerou pesados corpos como a terra e a água, e leves o ar e o fogo).

Os juízos analíticos são formulados *a priori* pois, como expressam de modo diferente o mesmo conceito conhecido do sujeito, não necessitam da experiência. Sendo assim, são *universais* e *necessários* (qualquer pessoa, em qualquer parte do mundo, não negaria que um corpo é extenso), mas não são *amplificadores* do conhecer. Ainda que a ciência se valha deste tipo de juízo a todo momento, ela não se baseia neles quando amplia seu campo e, portanto, os juízos analíticos *a priori* não fazem a ciência "caminhar".

Os juízos sintéticos mais comuns são aqueles formulados a partir da experiência – juízos *experimentais*. Eles são *a posteriori* e sempre ampliam o conhecimento, uma vez que inegavelmente atribuem ao sujeito algo que não estava contido implicitamente nele. No entanto, como dependem da experiência, não podem ser universais e necessários e servem, quando muito, para que deles se possa extrair algumas generalizações: sendo assim, a ciência não pode tê-los como base.

Kant defendia que a ciência se baseava num terceiro tipo de juízo: um tipo que, ao mesmo tempo, unia a *aprioridade* (isto é, a *universalidade* e a *necessidade*) com a *fecundidade* (isto é, a *sinteticidade*) (REALE e ANTISERI, 2004). A esse juízo chamou de *sintético a priori*. É na Matemática que Kant vai buscar os exemplos desse tipo de juízo. Ao declarar que "desde os tempos mais remotos que a história da razão pode alcançar no admirável povo grego, a matemática entrou na via segura de uma ciência" (KANT apud FERRAIOLO, 1996, p. 7), Kant afirma a Matemática como ciência inequívoca, exemplo tanto para a metafísica quanto para as outras ciências, como o verdadeiro modelo de acordo com o qual se poderia ampliar o conhecimento sem o auxílio da experiência. Para ele, tanto as operações aritméticas[19] quanto os juízos da geometria eram sintéticos *a priori*:

> Aquele que primeiro demonstrou o triângulo isósceles (fosse ele Tales, ou como quer que se chamasse) teve uma iluminação; descobriu que não tinha que seguir passo a passo o que via na figura,

[19] Kant fala que 7 + 5 = 12 é um juízo sintético pois, ao pensar a soma, pensa-se que o 7 deve ser acrescentado ao 5, mas não se pensa que esta soma tem 12 por resultado. Como o conceito "12" não é pensado a partir do conceito "soma", é preciso buscar auxílio na *intuição* correspondente a estes dois números (contando nos dedos ou movendo peças num ábaco, por exemplo) e, graças a ela, vê-se nascer – sinteticamente – o conceito do novo número correspondente à soma.

> nem o simples conceito que dela possuía, para conhecer de certa maneira as suas propriedades; que antes deveria produzi-la, ou construí-la, mediante o que pensava e o que representava *a priori* por conceitos e que, para conhecer, com certeza, uma coisa *a priori*, nada devia atribuir-lhe se não o que fosse consequência necessária do que nela tinha posto, de acordo com o conceito (KANT apud FERRAIOLO, 1996, p. 7).

Como ciência que determina *a priori* (e não empiricamente) seu sujeito, a Matemática, que no início era um conjunto de tentativas incertas, teve seu desenvolvimento comparado por Kant a uma *revolução*, pois no decurso do tempo atingiu um patamar inquestionável, mostrando um caminho que não poderia mais ser perdido. Ele reconhecia, portanto, na Matemática – especialmente na geometria –, uma *criação da mente humana* que não dependia de nada mais que da própria mente humana.

Quando tratou, então, de buscar a origem do conhecimento, Kant abandonou o campo da experiência e situou tal origem na própria faculdade de conhecer, possibilitando a existência de um conhecimento *a priori* tal qual ele defendia ocorrer na Matemática. Mas a faculdade de conhecer pertencia ao *sujeito*, não ao *objeto*, e a ideia vigente até então – tentava-se explicar o conhecimento supondo que o sujeito deveria girar em torno do objeto – foi abandonada pelo filósofo: tão importante para a filosofia quanto a revolução de Copérnico para a Astronomia, e por isso comparada a ela, Kant passou a supor que era o objeto que deveria girar em torno do sujeito, isto é, que só se podia conhecer das coisas aquilo que se colocava nelas, pois não eram os objetos que regulavam o intelecto para, deles, os conceitos serem extraídos, mas o contrário: eram os objetos, como algo pensado, que se regulavam pelos conceitos do intelecto e se juntavam a eles. Ao objeto da experiência, cujas características jamais podem ser apreendidas pelo sujeito, Kant chamou *coisa em si*, e nomeou *fenômeno* o modo como ele aparece ao sujeito: de acordo com seu modo de perceber as coisas, o sujeito jamais apreende a *coisa em si*, mas percebe dela somente o fenômeno.

A partir daí surge o conceito kantiano de *transcendental*: é transcendental todo o conhecimento que não se relaciona com os objetos, mas com o modo de conhecê-los, enquanto possível a priori. O conhecimento dos “sentidos” e o conhecimento “do intelecto” são os dois ramos do conhecimento humano que se articulam no ato de conhecer: primeiro o objeto é “dado” ao sujeito pelos sentidos e, depois, ele é “pensado” pelo intelecto. A doutrina do sentido e da sensibilidade é chamada por Kant de “Estética Transcendental” e, a do pensamento e do intelecto, de “Lógica Transcendental”. Aqui nos deteremos apenas na primeira, porque foi na busca dos elementos que a compunham que Kant identificou estruturas que, veremos, relacionam-se à geometria euclidiana.

Ao abstrair o que se relacionasse com as sensações, ou seja, ao dispensar todas as características do fenômeno que só poderiam ser obtidas *a posteriori*, Kant percebeu que permaneciam no sujeito duas estruturas, às quais chamou de *formas puras da intuição*[20] *sensível*: o *tempo* e o *espaço*.

"O tempo não é um conceito empírico abstraído de qualquer experiência. Com efeito, a simultaneidade ou a sucessão nem sequer se apresentaria à percepção se a representação do tempo não estivesse subjacente a priori" (KANT, 1987, p. 44). Kant aponta o tempo como uma representação necessária subjacente a todas as intuições: é possível que haja tempo sem fenômeno, mas nunca o contrário, e é esta forma pura da intuição que permite ao sujeito perceber se os fenômenos observados são simultâneos ou sucessivos.

O espaço, que também não é um conceito empírico abstraído de experiências externas, é, por sua vez, aquilo que possibilita ao sujeito representar coisas que estão fora de si mesmo, "uma ao lado da outra e por conseguinte não simplesmente como diferentes, mas como situadas em lugares diferentes" (KANT, 1987, p. 41). O espaço é uma representação *a priori* necessária que torna possível as representações externas e, embora possamos pensar um espaço no qual não se encontra nenhum objeto, é impossível representar a ausência de espaço.

Tanto o tempo quanto o espaço são *unos*: o primeiro possui uma única dimensão (diversos tempos não são simultâneos, mas sim sucessivos) e o segundo, mesmo quando se diz ou se pensa nele no plural – *espaços* –, na verdade se está aludindo a partes de um mesmo e único espaço. Apenas o tempo e o espaço são as formas puras da intuição, sendo que o tempo é a forma (o modo de funcionamento) do sentido interno, isto é, a forma de todo dado sensível interno conhecido pelo sujeito; e o espaço é a forma (o modo de funcionamento) do sentido externo, isto é, a condição à qual deve sujeitar-se a representação sensível de objetos externos (REALE e ANTISERI, 2004):

> Se posso dizer *a priori*: todos os fenômenos externos são determinados *a priori* no espaço e segundo as relações do espaço, a partir do princípio do sentido interno posso então dizer universalmente: todos os fenômenos em geral, isto é, todos os objetos dos sentidos, são no tempo e estão necessariamente em relações de tempo (KANT, 1987, p. 46).

[20] A *intuição* é o conhecimento *imediato* dos objetos. Segundo Kant, o homem possui somente um tipo de intuição: a intuição própria da sensibilidade. O intelecto humano *não* intui; quando *pensa*, está se referindo sempre aos dados que lhe chegaram pela sensibilidade.

Para o sujeito não há fenômeno sem tempo e espaço. Segundo Kant, o sujeito capta as coisas como determinadas espacial e temporalmente porque possui uma sensibilidade assim configurada, uma sensibilidade que só funciona desta maneira. Dito isso, declarou que ambas as formas puras da intuição têm *realidade empírica* – porque nenhum objeto pode ser dado aos sentidos sem se submeter a eles – e *idealidade transcendental* – uma vez que não são formas do objeto, e sim do sujeito.

O que queremos ressaltar, agora, é que este espaço ao qual Kant se refere, inerente a todo homem, é o espaço euclidiano. O espaço que ajuda o homem a conhecer o fenômeno, uma forma pura da intuição, é o espaço tal qual representado, provado e sistematizado na geometria de Euclides e todos – absolutamente todos – os juízos sintéticos *a priori* da geometria dependem da intuição *a priori* desse espaço.

Um exemplo citado por Kant é retomado por Carroll no Ato II, Cena II de *Euclides e Seus Rivais Modernos*:

> Que a reta seja a linha mais curta entre dois pontos, é uma proposição sintética. Meu conceito de *reta*, com efeito, não contém nada como quantidade, mas apenas uma qualidade. O conceito de mais curto é, portanto, completamente acrescentado, e não pode ser extraído, mediante alguma decomposição, de conceito de linha reta. Devemos, portanto, recorrer à intuição, por meio da qual apenas é possível a síntese (KANT apud REALE e ANTISERI, 2004, p. 399).

Kant também declarou que a proposição "duas linhas retas não limitam um espaço"[21] não podia ser derivada nem do conceito de linha reta, nem do de número dois, ocorrendo a mesma impossibilidade com a proposição que afirma que, a partir de três linhas retas, é possível formar um triângulo. Todo esforço de compreendê-las se mostraria inútil e o sujeito se veria obrigado "a buscar refúgio na intuição, como faz sempre a Geometria" (KANT, 1987, p. 51): é preciso que se dê, primeiro, o objeto *a priori* na intuição, e sobre ele fundar a proposição sintética. Somente nesta ordem é que o sujeito poderia acrescentar aos conceitos (de duas linhas retas ou de três linhas retas) algo novo (a não limitação do espaço; a existência do triângulo).

"É na sutileza de respeitar a experiência sem contudo contaminar-se por ela que se encontra a peculiaridade da matemática" (FERRAIOLO, 1996, p. 12). Além disso, ainda que tanto o conhecimento matemático quanto o filosófico impliquem juízos sintéticos, apenas o caráter construtivo da matemática permite, por meio do particular, considerar legitimamente o geral. Isto equivale a dizer que, quando desenhamos um

[21] Axioma 9 da edição brasileira de *Os Elementos*.

círculo (ou recortamos um triângulo), estamos representando um particular que vale universalmente, pois o objeto do *conceito* círculo (ou triângulo) é representado por um *modelo* particular, mas aquilo que se deduz e se prova utilizando-se esta figura independe, por fim, desta experiência, e é válido para todo e qualquer círculo (e triângulo), venham também eles a ser representados por algum modelo ou não.

> A Geometria percorre o seu seguro caminho mediante meros conhecimentos a priori sem precisar pedir à Filosofia um atestado concernente à descendência pura e legítima do seu conceito fundamental de espaço. No entanto, nesta ciência o uso do conceito refere-se apenas ao mundo sensível externo, do qual o espaço é a forma pura de sua intuição e no qual portanto todo conhecimento geométrico possui evidência imediata por se fundar sobre intuição a priori, sendo os objetos dados a priori (segundo a forma) na intuição pelo próprio conhecimento (KANT, 1987, p. 76).

Assim, uma figura geométrica sempre se apresenta *a priori* ao sujeito, ainda que este venha a utilizar recursos empíricos para representá-la (como um desenho, por exemplo). A representação individual não passa disso – uma representação – e "jamais daria conta nela mesma da generalidade expressa em seu conceito" (FERRAIOLO, 1996, p. 29). Em compensação, "a realidade potencial emprestada ao objeto da matemática subsidia a compreensão da relação tão estreita que tal ciência mantém com a existência das coisas ou realidade atual" (FERRAIOLO, 1996, p. 33), isto é, os objetos construídos matematicamente se submetem à forma da experiência. Kant notou claramente esta relação e mostrou que o conceito geométrico puro de um círculo corresponde ao conceito empírico de um prato (KANT, 1987). Aqui chegamos a um ponto crucial da nossa análise: como o sujeito percebe o espaço externo a ele como o espaço euclidiano, a geometria euclidiana ganhou ainda mais força, pois ela se aplicava perfeitamente ao mundo exterior, respeitando em toda a extensão a forma perceptiva do sujeito ler a realidade. "Mesmo que o nosso universo não seja euclidiano no seu todo, localmente, isto é, na nossa vizinhança imediata, comporta-se como um universo euclidiano" (COUTINHO, 2004, p. 27), e foi isto que Kant percebeu.

Ferraiolo (1996) relata em seus estudos que alguns comentadores da obra de Kant sugerem, por ele ter se utilizado tão frequentemente da geometria euclidiana em suas análises, que sua filosofia não abarcaria outras geometrias ou, no mínimo, as colocaria como inferiores àquela sistematizada por Euclides. Mas esta não é a opinião da autora: considerando que a geometria euclidiana seguia inquestionável à época de Kant – as geometrias não-euclidianas surgiriam apenas mais tarde –, compreende-se melhor seu ponto de vista, ainda mais se considerarmos que o espaço perceptivo por nós desenvolvido é euclidiano.

"Kant foi um euclidiano convicto" (COUTINHO, 2004, p. 228) mas, por outro lado, ao valorizar o papel da intuição, abriu as portas para que o próprio espaço que defendia fosse subjugado a ela. A produção de figuras no espaço é uma característica indiscutível da geometria euclidiana. Contudo, o que é realmente relevante não é propriamente a figura, mas a intuição do espaço que possibilita ao sujeito construí-la, "e este espaço permanece na reelaboração de outras geometrias" (FERRAIOLO, 1996, p. 38).

O filósofo não viveu para conhecer a geometria hiperbólica ou a elíptica. Carroll, por sua vez, acreditava que elas eram essenciais para a compreensão do mundo apenas num nível poético ou fictício[22]. Dito isso, percebemos que a importância e a relevância da geometria euclidiana na obra de ambos são duas características que eles tinham em comum. Nem seria necessário, aqui, considerar que, à época em que viveu, Kant desconhecia outras geometrias. O que deve ser ressaltado é que à geometria euclidiana o filósofo deu amplo destaque, relacionando suas representações com a forma pura da intuição humana: se todos os seres humanos intuem (pelas formas *a priori* do tempo e do espaço) e se este espaço é euclidiano – pois é o que melhor representa a nossa realidade – a geometria euclidiana deixa de ser tão somente uma sistematização e organização de conceitos bem elaboradas por Euclides para ser, também, necessária para a compreensão do mundo.

Em síntese: a permanência do modelo euclidiano

Este breve percurso pela Filosofia, abordando, segundo alguns autores e obras, aspectos gerais do pensamento grego, do Racionalismo de Descartes, do Empirismo de Hume e do Criticismo de Kant, talvez tenha sido suficiente para perceber que, ainda que as ideias filosóficas tenham se alterado substancialmente, a geometria euclidiana manteve-se firme como exemplo, como modelo, como via segura para se conhecer o mundo, como parâmetro para se atingir a verdade. Por isso, quando Carroll escreveu

[22] Segundo Dionne (1998), Carroll, assim como vários geômetras, expressaram suas convicções profundas nas "verdades originais" da geometria euclidiana, mais precisamente porque essas preservavam uma ligação entre o mundo das experiências vividas e o reino das ideias, e assim poderiam prevenir a auto-referência das questões científicas. Em seus escritos – dentre eles o livro *Euclides e Seus Rivais Modernos* –, Carroll expressa claramente a importância da geometria euclidiana como a base para a nossa percepção do mundo; isso, no entanto, não quer dizer, na opinião da autora, que ele simplesmente estava rejeitando as geometrias não euclidianas mas que, para ele, estas outras geometrias eram essenciais para a compreensão do mundo apenas num nível poético ou fictício (DIONNE, 1998).

Euclides e Seus Rivais Modernos, ele não estava só: fazia coro com inúmeros pensadores que, como ele, viam o mundo como espaço euclidiano e tinham, talvez, como ele, estudado e compreendido *Os Elementos*. A obra de Carroll parece, assim, carregada destes diversos olhares. No correr dos tempos grandes mudanças foram absorvidas pela humanidade: a Terra deixara de ser plana, o sistema solar deixara de ser geocêntrico, mas Euclides continuava o senhor da geometria e *Os Elementos* perpetuava-se como guia para o estudo dessa ciência que em nada havia se alterado. Era intenção de Carroll, portanto, mantê-lo como tal sob os olhares dos ingleses e dos educadores da época vitoriana.

Referências

DESCARTES, René. La Géométrie. Paris: A. Hermann Librairie Scientifique, 1836. Disponível em <www.gutenberg.org>. Acesso em: 17/04/2012

DESCARTES, René. Meditações Metafísicas. São Paulo: Nova Cultural, 1998.

DIONNE, Caroline: *Lewis Carroll: A Man Out of Joint*, 1998. Disponível em: <http://web.udl.es/usuaris/s2430206/pumby/carolarc.htm#N_10_>. Acesso em 04/08/2008.

DODGSON, Charles L. Euclid and His Modern Rivals. London: MacMillan and Co., 1879.

EUCLIDES. Elementos de Euclides dos Seis Primeiros Livros, do Undécimo e Duodécimo da Versão Latina de Frederico Commandino, Addicionados e Ilustrados por Roberto Simson. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1855.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FERRAIOLO, Fiorella. Matemática Kantiana e Percepção da Realidade. Dissertação de Mestrado. Marília: Universidade Estadual Paulista, 1996.

GASCA, Ana Millán. Euclides: la Fuerza del Razonamiento Matemático. Madri: Nivola, 2007. BICUDO, Irineu. *Prefácio e introdução*. EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

BRITO, Arlete de Jesus. Geometrias Não-Euclidianas: um Estudo Histórico-Pedagógico. Dissertação de Mestrado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995.

CALVINO, Italo. Por Que Ler os Clássicos. Tradução de Nilson Moulin. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.

CAMBI, Franco. História da Pedagogia. Tradução de Álvaro Lorencini. São Paulo: UNESP, 1999.

CARROLL, Lewis. Euclides e Seus Rivais Modernos. Tradução de Rafael Montoito. Bauru: Universidade Estadual Paulista, 2012 (obra não publicada).

COUTINHO, Lázaro: Matemática e Mistério em Baker Street. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2004.

DESCARTES, René. Discurso do Método. Tradução de Paulo Neves. Porto Alegre: LP&M, 2005.

GENETTE, Gérard. Paratextos Editoriais. Tradução de Álvaro Faleiros. Cotia: Ateliê Editorial, 2009.

HEATH, Thomas. Thirteen Books of Euclid's Elements. Volume 1. New York: Dover, 1956.

HUME, David. Investigação Sobre o Entendimento Humano. São Paulo: Abril Cultural, 1984.

JAEGER, Werner. Paideia: a Formação do Homem Grego. Tradução de Artur M. Parreira. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2010.

KANT, Immanuel. Crítica da Razão Pura. São Paulo: Nova Cultural, 1987.

KOYRÉ, Alexandre. Considerações Sobre Descartes. Lisboa: Editorial Presença, 1963.

LEVI, Beppo. Lendo Euclides: a Matemática e a Geometria Sob um Olhar Renovador. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

LLOYD, G. E. R. Ciência e Matemática. *In*: FINLEY, M. I. O Legado da Grécia: uma Nova Avaliação (Org). Tradução de Yvette Vieira Pinto de Almeida. Brasília: UNB, 1998

MIORIM, Maria Ângela: Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.

MLODINOW, Leonard: A Janela de Euclides. Tradução de Enézio de Almeida. São Paulo: Geração Editorial, 2005.

PLATÃO. A República. Tradução de Pietro Nassetti. São Paulo: Martin Claret, 2011.

REALE, Giovanni; ANTISERI, Dario. História da Filosofia: de Spinoza a Kant. Vol. 4. Tradução de Ivo Storniolo. São Paulo: Paulus, 2004.

ROSENFIELD, Denis Lerrer. *Prefácio – Vida e Obra*. DESCARTES, René. Discurso do Método. Tradução de Paulo Neves. Porto Alegre: LP&M, 2009.

SCHUBRING, Gert. Análise Histórica de Livros de Matemática: Notas de Aula. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados, 2003.

THOMPSON, John B. Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa. Petrópolis: Vozes, 1995.

Recebido: 26/09/2013
Aceito: 16/03/2014