

Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática

Problem solving in the initial training for teachers of Mathematics

LOURDES DE LA ROSA ONUCHIC¹

ROSILDA DOS SANTOS MORAIS²

Resumo

O objetivo deste texto é o de apresentar parte de um Estudo de Caso, realizado em um curso de Licenciatura em Matemática, nos anos de 2010-2011, visando a contribuir com as muitas ações movidas por todos os envolvidos na formação inicial docente, no sentido de melhor preparar esses profissionais, nessa importante etapa de formação. Numa reformulação do curso, a Resolução de Problemas (RP) veio a ser uma das novas disciplinas, cuja ementa apregoava o trabalho com Tendências no Ensino de Matemática. Nesta pesquisa, dar-se-á ênfase ao trabalho desenvolvido com futuros professores nessa disciplina, com enfoque para a Resolução de Problemas como metodologia de ensino sob seus aspectos teórico e prático. Acredita-se que o trabalho docente é reflexo da vivência do professor ao longo de sua trajetória e espera-se que, vivenciando diferentes metodologias de trabalho nessa etapa da formação, o futuro professor esteja mais bem preparado para exercer a docência. Ao final de três semestres do trabalho na disciplina, verificou-se que os futuros professores eram capazes de trabalhar com a Metodologia estendendo-a, inclusive, para outros contextos.

Palavras chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Formação de Professores.

Abstract

This paper aims to present part of a Case Study carried out in an Initial Training for Teachers of Mathematics, in the years 2010-2011, in order to contribute to the many actions done by those involved in the initial teacher's training in order to better prepare these professionals, in this important stage of formation. Having reformulated the course, Problem Solving (RP) came to be one of the new subjects, where the curriculum claimed to work with Trends in the Teaching of Mathematics. In this research, emphasis will be given to working with future teachers in this subject, focusing on Problem Solving as a teaching methodology in its theoretical and practical aspects. It is believed that teaching is a reflection of the experience of the teacher throughout his career and it is expected that experiencing different working methodologies in this stage of training future teachers are better prepared to work as teachers. After three semesters of work on the subject, it was found that prospective teachers were able to work with the methodology by extending it even to other contexts.

Keywords: Mathematics Education; Problem Solving; Teacher Training.

¹ UNESP/RC – lrnuchic@gmail.com

² UNESP/RC – rosildamorais7@gmail.com

INTRODUÇÃO

A formação inicial docente tem sido muito discutida nas últimas décadas, pois o trabalho realizado com alunos, futuros professores, nessa etapa de formação, tem efeito direto na sala de aula.

O local onde o professor deveria iniciar seu trabalho como educador para uma grande massa da população - *a escola* - tem sido o lugar onde, efetivamente, ele tem aprendido a exercer a docência, condição que deveria iniciar-se quando ingressou na universidade e onde os *saberes profissionais*³ deveriam ser adquiridos. Embora possa se reconhecer que os conhecimentos dos professores sejam “*provenientes de várias fontes e construídos em tempos diferentes*” (CURI, 2011, p.78), não se pode negar o papel da universidade, o de possibilitar que os *saberes profissionais* sejam lá construídos. Entretanto, a universidade tem deixado muito a desejar na formação inicial docente, pois forma seus professores a qualquer custo para atender às demandas sociais que clamam por esses profissionais. O preço pago é o despreparo desses professores que, na grande maioria, quando colocados na sala de aula para exercer o papel que lhe foi designado, repetem velhas práticas, aquelas que aprenderam quando foram alunos, na Escola Básica.

Nas últimas décadas, muitos têm sido os esforços para mudar esse cenário, mas são tantas as variáveis que caracterizam a instituição *escola* que toda mudança parece ínfima. Esses esforços são constatados quando se faz uma busca rápida nas várias tendências no ensino e observam-se as diferentes áreas que se juntaram à Matemática no movimento de discussão e reflexão em torno das dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

Este trabalho de pesquisa pretende se apresentar como mais um desses movimentos, no sentido de mudar o tão difícil cenário da formação inicial docente. Ele traz elementos que contribuem com a crença de que, se houver uma mudança nas bases, quando o professor está ainda se tornando professor, aquilo que ele aprendeu, na universidade, poderia vir a incorporar-se à sua prática, pois teve relação direta com o que iria ensinar. O foco deste texto será o trabalho de alunos, futuros professores, depois de terem

³ Tardif (2010): *saberes profissionais* – conhecimentos, competências, habilidades, etc., utilizados efetivamente no trabalho diário, pelo professor, para desempenhar suas tarefas e atingir seus objetivos.

vivenciado, na prática, metodologias de ensino que poderão ser encampadas em seu trabalho quando se tornarem professores.

1. A FORMAÇÃO INICIAL DOCENTE

A formação inicial docente de professores em geral e de Matemática em particular tem sido motivo de preocupação de pesquisadores ao longo da história do ensino de Matemática, sendo mais evidenciada a partir do início do século XX. Pesquisas (BALL & COHEN,1999; FIORENTINI,2003; SILVER,2006; MOREIRA & DAVID,2007; ALBUQUERQUE, 2006) têm apontado que a formação inicial docente é deficiente, mas que tem havido empenho de todos os envolvidos na área no sentido de melhorar essa prática. Ao encerrar os cursos de formação inicial, o professor recém-formado não se sente apto para atuar na sala de aula da Educação Básica, pois, nos anos que passou na universidade, não lhe foi oferecida a segurança necessária para o exercício da docência.

George Polya, já em 1962, em seu livro *Mathematics and Discovery* (1962), ressaltou a fragilidade dos cursos de formação inicial de professores para a Escola Secundária, dizendo que a preparação de professores para esse nível de ensino era insuficiente e que competia, aos Departamentos de Educação e Departamentos de Matemática, ou seja, a todos os envolvidos na formação inicial docente, ações para mudar o cenário. Essa mudança deveria, segundo Polya, iniciar-se pela revisão dos cursos oferecidos a futuros professores da Escola Secundária.

Anterior a Polya, em 1908, Félix Klein, no livro *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*, já havia manifestado preocupação com a formação docente, alegando que jovens universitários, recém-formados, eram confrontados com problemas na sala de aula que não se referiam, em nenhum aspecto, às coisas com as quais eles haviam sido envolvidos na escola. Até aquele momento, a prioridade dos professores de Matemática, em sua maioria homens, voltava-se à ciência sem nenhuma preocupação com a matemática escolar.

Mais de um século se passou, desde as primeiras preocupações com a formação inicial docente e reconhece-se que muito já foi feito objetivando melhorar essa importante etapa da formação, sejam por meio de congressos, artigos, grupos de pesquisa, seminários, simpósios, etc. Contudo, a realidade desses cursos, no que diz respeito a

transformações que visam a melhor preparar o docente, capacitando-o à *proficiência de ensino*⁴, caminha a passos lentos. Uma justificativa para essa lentidão, como apontou Garcia Blanco (2003), refere-se aos distintos estamentos que envolvem a formação docente: sociedade, instituições, pesquisadores, formadores de professores, professores e alunos. Para a autora, apesar de a formação docente estar em constante processo de evolução, essas particularidades fazem com que ela seja vista e sentida como problemática. Um aspecto do problema, relativo a essa etapa da formação,

seria a definição de programas de formação que respondessem às demandas provenientes dos distintos setores afetados; um programa que possibilitasse a formação de profissionais do ensino com capacidade para desenvolver suas tarefas no âmbito de sua própria e contínua aprendizagem e desenvolvimento profissional (GARCIA BLANCO, 2003, pp.51-52).

Silver (2006) afirmou que apesar de o cenário estar longe do desejado, há um progresso significativo realizado ao longo das últimas décadas, especificamente a partir da década de 1990, com currículos mais provocativos e instigantes; relatos de experiências bem sucedidas no ensino de Matemática estão à disposição com mais facilidade; há uma melhor noção do que vem a ser um professor de matemática bem “qualificado”; e o desenvolvimento da consciência para a necessidade de uma melhor qualificação profissional.

O presente trabalho traz resultados, que corroboram com as expectativas de Garcia Blanco e Silver, no que se refere às ações movidas para melhorar o cenário atual, relativo à formação inicial docente de professores de Matemática, com a universidade reformulando o currículo, o professor formador e os professores em formação, todos

⁴De acordo com Silver (2006) “um professor de Matemática proficiente tem um conhecimento profundo de matemática, tanto dentro quanto fora do currículo escolar; ele sabe como os alunos aprendem e operam mentalmente o conhecimento matemático (essa competência do professor é o conhecimento conceitual para ensinar). A proficiência no ensino de matemática também inclui um repertório fluente de procedimentos pedagógicos (fluência procedimental para ensinar), juntamente com a habilidade para planejar aulas e materiais didáticos e para avaliar de que forma decisões e ações pedagógicas particulares podem influenciar a aprendizagem dos alunos (competência estratégica e raciocínio adaptativo para ensinar). Finalmente, outro componente crucial do ensino proficiente é uma orientação rumo a um aperfeiçoamento contínuo do conhecimento e do desempenho do indivíduo enquanto professor (disposição produtiva para ensinar)” (p.129).

engajados no trabalho de enfrentar os desafios de uma nova proposta curricular em atendimento às necessidades urgentes de melhorias na formação inicial. Embora se reconheça a complexidade da sala de aula, acredita-se que, na formação inicial docente, o futuro professor, vivenciando diferentes abordagens metodológicas, terá a oportunidade de examinar conteúdos matemáticos com profundidade, refletindo sobre eles, de forma a atender mais e melhor às dificuldades de seus estudantes.

2. A METODOLOGIA

Dentre os conjuntos de estratégias designados *qualitativos*, nesta pesquisa, por se tratar de um *caso específico* – professores em formação na disciplina *Resolução de Problemas* trabalhando com diferentes abordagens metodológicas – dentro de um sistema mais amplo, escolhemos o *Estudo de Caso*. Como procedimento, foi adotada a *observação participante*, uma das estratégias dessa metodologia, que teve o professor formador como observador. Essa estratégia de pesquisa permite um acompanhamento mais prolongado e minucioso das situações, utilizando uma linguagem e uma forma mais acessível do que apresentam outros relatórios de pesquisa (LÜDKE, 1986; GOLDENBERG, 2003).

Na *observação participante*, o professor formador teve seus registros anotados em um *diário de campo*. Buscou-se, nessas anotações, valorizar o trabalho dos estudantes, futuros professores, no que se refere ao aprofundamento das discussões ocorridas nos grupos de trabalho. Os estudantes eram constantemente questionados, pelo professor formador, sobre a Matemática que poderia ser explorada em cada problema dado ou pesquisado e sobre outros casos que teriam passado despercebidos aos estudantes. O professor formador, nesse trabalho, pretendia chamar atenção dos estudantes para as sutilezas do processo de escolha e preparo de atividades, o que se tornaria comum no dia a dia de sua prática docente.

O fenômeno aqui estudado é o trabalho com estudantes, em um curso de Licenciatura em Matemática com duração de três anos, em uma universidade particular na cidade de Piracicaba, São Paulo. Para esse trabalho foi proposto, aos estudantes, o estudo de diferentes *Tendências Pedagógicas no ensino de Matemática* a fim de que pudessem vivenciar diferentes metodologias de trabalho na formação inicial e que, no exercício da docência, pudessem experimentá-las com seus alunos uma vez que adquiriram, ao longo

da formação, alguma maturidade com esse trabalho. Dentre as *Tendências* estudadas, a *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas* foi escolhida como metodologia de trabalho para um estudo prático nos dois semestres subsequentes.

Nessa *Metodologia* “o problema é o ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos” (ONUCHIC;ALLEVATO, 2011, p.81). Assim, os problemas devem ser selecionados, de antemão, pelo professor, e trabalhados em sala, com os alunos, seguindo um roteiro de aula sugerido por Onuchic e Allevato (2011): “1. preparação do problema; 2. leitura individual; 3. leitura em conjunto; 4. resolução do problema; 5. observar e incentivar; 6. registro das resoluções na lousa; 7. plenária; 8. busca por consenso; 9. formalização do conteúdo” (p.83-84).

A *Metodologia* foi aplicada pelo professor formador, sob seu aspecto prático, isto é, problemas foram trabalhados, respeitando o que propõem Onuchic e Allevato (2011), no segundo semestre da disciplina Resolução de Problemas. Em um semestre subsequente, terceiro da disciplina, já com uma teoria construída, os alunos trabalharam com a *Metodologia* pesquisando por problemas, resolvendo-os e elaborando um *plano de aula* que foi aplicado por cada um dos grupos a seus colegas de sala.

3. A DISCIPLINA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA INSTITUIÇÃO

O curso de *Licenciatura em Matemática* da universidade em estudo havia sido reformulado em 2007, com uma nova proposta pedagógica visando a atender às demandas atuais na formação docente.

A disciplina *Resolução de Problemas* era uma das disciplinas da nova grade e sua ementa apregoava que fossem apresentadas diferentes tendências do ensino e da pesquisa em Educação Matemática. Por essa razão, optou-se por trabalhar textos teóricos sobre diferentes tendências em *Educação Matemática* no primeiro semestre do oferecimento da disciplina, que tinha duração de três semestres, dentre as quais a *Resolução de Problemas* foi uma das abordadas. No segundo semestre, foram propostos problemas que deveriam ser resolvidos à luz dos pressupostos teóricos da *Metodologia*

de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Por último, no terceiro semestre, os alunos deveriam preparar um *projeto de aula* de Matemática onde considerariam essa metodologia como eixo norteador. Esse trabalho foi realizado no segundo semestre de 2010 e durante todo o ano de 2011. O estudo abrangeu as dimensões *teórica e prática*⁵ da *Resolução de Problemas*⁶.

4. O DESENVOLVIMENTO DA DISCIPLINA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Inicialmente foi proposto, aos 11 (onze alunos) do curso de Licenciatura em Matemática, o estudo de algumas tendências do ensino e da pesquisa em Educação Matemática. Foram contempladas: *O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas; O uso de Tecnologias no Ensino de Matemática; e a Modelagem Matemática como estratégia de ensino.* O favoritismo em relação a esses temas e não a outros dentro da grande área da Educação Matemática deu-se em razão da necessidade de delimitar o trabalho.

No primeiro semestre do oferecimento da disciplina Resolução de Problemas, quarto semestre do curso, seu desenvolvimento compreendeu o estudo teórico das tendências escolhidas e a elaboração, pelos alunos, de um relatório final. Após esse semestre foi-lhes proposto que as aulas fossem desenvolvidas tendo a *Metodologia* como eixo norteador, seguindo o que propõem Onuchic e Allevato (2011). Com isso, no segundo semestre, problemas foram propostos pelo professor formador aos alunos, que se organizaram em cinco grupos para resolvê-los. Para cada aula, com duração de 120 minutos, foi proposto um problema. Desses problemas propostos, pelo professor formador, não constam suas resoluções aqui, visto não ser essa a pretensão deste trabalho.

Iniciado o terceiro semestre dessa disciplina, último período do curso, aos alunos foi dada a tarefa de buscar por diferentes problemas, procurando identificar aqueles que seriam considerados bons, isto é, problemas que serviriam como ponto de partida para o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, como pressupõe a *Metodologia de*

⁵ Considera-se teoria o estudo da Resolução de Problemas a partir de conceitos e proposições a ela referentes. O aspecto prático refere-se à aplicação da Metodologia nas aulas de Matemática.

⁶ Os R e P maiúsculos indicam a Resolução de Problemas como teoria e, r e p, referem-se ao ato de resolver problemas.

ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nela, o professor precisa pesquisar problemas apropriados à construção de novos conceitos e conteúdos, como afirmam Onuchic e Allevato (2011):

os problemas são postos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento do aluno é feita continuamente, durante a resolução do problema (p.85).

Foram disponibilizadas algumas aulas para a pesquisa de problemas e, ao final, cada grupo selecionou um problema para trabalhar, tendo a metodologia adotada como suporte. Após a escolha do problema, uma nova etapa, que incluía, além da resolução do problema; o questionamento sobre quais conceitos poderiam ser desenvolvidos a partir do problema; o levantamento de questões norteadoras; o pensar num *problema auxiliar*⁷; e verificar se o enunciado era suficientemente claro; foi iniciada. Toda essa etapa, que ocorreu durante as aulas de Resolução de Problemas na biblioteca da universidade, foi acompanhada pelo professor formador, que trabalhou com os grupos questionando-os, sobre a clareza do enunciado dos problemas, conceitos que poderiam ser explorados e a possibilidade da construção de outros conceitos ainda não abordados, bem como, se um mesmo problema poderia ser trabalhado em diferentes níveis de ensino.

Após a seleção e o estudo do problema, os alunos, futuros professores, organizaram-se, em seus grupos, para elaborar seu *plano de aula*. Essas aulas foram ministradas nos meses de outubro e novembro de 2011.

5. O TRABALHO DO G1

⁷ “é aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro – o nosso problema original. Este último é o fim a que desejamos chegar; o problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo” (POLYA, 1995, p.119).

Priorizou-se por apresentar nesta pesquisa o resultado do trabalho de um único grupo de alunos, futuros professores, chamado neste texto de G1. No entanto, é importante ressaltar que os outros quatro grupos elaboraram e aplicaram suas aulas aos demais colegas de sala, da mesma forma que fez o G1. Durante a apresentação do problema do G1, os demais alunos trabalharam em seus grupos e contribuíram significativamente em cada uma das etapas propostas pelo grupo. Assim, houve a participação efetiva de todos os alunos, dentre os quais, alguns terão suas falas trazidas para este texto (esses estudantes foram chamados de A1, B1 e C1).

A escolha por apresentar a aula do G1, neste texto, deu-se pela possibilidade de discutir cada detalhe da aula por eles aplicada, bem como, por ter sido esse o único grupo a propor o trabalho com a metodologia estudada na disciplina Resolução de Problemas em duas disciplinas diferentes.

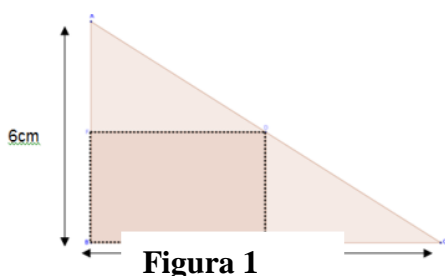
O professor formador ministrava nessa turma duas disciplinas sendo a *Resolução de Problemas*, objeto deste estudo, e o *Estágio Supervisionado*. O *Estágio* estava organizado da seguinte forma: no primeiro semestre de ocorrência, as aulas aconteciam na universidade e, nessa etapa, eram estudados documentos oficiais que o regulamentam como, também, eram dadas orientações aos alunos de como elaborar um *plano de aula*. A aula, que seria elaborada pelos alunos para *regência*, deveria ser ministrada na universidade ao professor e aos colegas de sala antes de ser aplicada na escola, local onde o *Estágio*, sob seu ponto de vista prático, ocorria. No segundo período do *Estágio*, os estudantes, futuros professores, iam para as escolas da rede de ensino público e ocupavam salas de aula de Matemática, apenas observando o trabalho do professor. Já no terceiro período do *Estágio*, faziam-se as *regências*.

A necessidade de abordar o *Estágio Supervisionado* neste texto justifica-se em razão de o G1 ter sugerido trabalhar com a *Resolução de Problemas como metodologia de trabalho de sala de aula*, e por sua vez com o mesmo problema, nas duas disciplinas coordenadas pelo professor formador. Ao ser consultado sobre a possibilidade dessa ocorrência, o professor não se opôs ao trabalho proposto pelo G1. Contrário a isso, valorizou o trabalho do grupo que visualizou a possibilidade de estender o problema para outra disciplina.

As regências do *Estágio Supervisionado* ocorreram no mesmo semestre da aplicação do problema escolhido pelo G1 na *Resolução de Problemas*. No entanto, diferentes abordagens foram dadas ao problema em cada uma das disciplinas.

O problema trabalhado pelo G1:

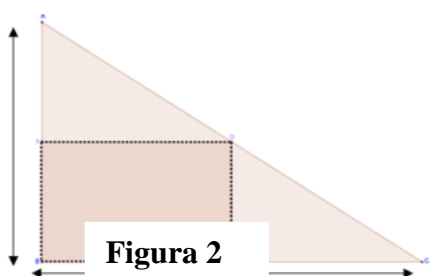
“É dada uma folha de cartolina como na figura abaixo.



Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima” (IEZZI, MURAKAMI, 1977, p. 132-A).

Esse problema foi adaptado para a aula de *Estágio*.

Na folha entregue pelo G1 aos colegas, o triângulo da *Figura 1* não tinha indicadas as medidas dos catetos (**Figura 2**), pois uma das etapas pretendidas pelo grupo era a de que pudessem medir, com régua, suas dimensões e, posteriormente, definir os intervalos reais, fechados, com os quais poderiam trabalhar. Ao solicitar a medição, desejava-se que os alunos fizessem uso de instrumentos de medida – no caso a régua – para trabalhar com intervalos reais. Esses intervalos determinariam o *domínio real* da função, que seria definida no final da aula. A proposta era a de que o aluno pudesse, por ele mesmo, observar o que era um intervalo real, como também verificar, nesse intervalo, o *domínio* da função.



Desejando que, em atendimento ao problema, cada grupo desenhasse um ou mais retângulos inscritos no triângulo dado, imaginando que pudessem ser o de área máxima, o G1 teve como objetivo para a resolução desse problema, no *Estágio Supervisionado*,

construir gráficos de funções como, por exemplo, a construção do gráfico de uma *Função Quadrática* - cujas variáveis, nesse caso, eram a base dos retângulos inscritos no triângulo e sua respectiva área - por meio da construção de uma tabela de valores, com pares ordenados, e do *software Graph*®. Por sua vez, na aula de *Resolução de Problemas* o enfoque dado foi para as relações algébricas e geométricas necessárias para a resolução do problema.

Os conceitos que poderiam ser trabalhados nesse problema e elencados pelo G1 foram: Área de Figuras Planas; Congruência de Triângulos; Semelhança de Triângulos; Razão e Proporção; Expressões Algébricas; Plano Cartesiano; Noção Empírica de Função; Noção Empírica de Limite; Intervalos Reais; Função Quadrática; Gráficos de Funções; Pontos de Máximos e Mínimos; Limites e Derivadas.

As questões a seguir foram elaboradas pelo G1 para o direcionamento da aula:

1. Quais as dimensões da figura?
2. Quais os possíveis valores para as bases e alturas do retângulo procurado?
3. Dado o triângulo ABC (desenhado e recortado numa cartolina), podem-se inserir, dentro desse triângulo, alguns retângulos que, visualmente, aparentam ter área máxima? Ao registrar, na **Tabela 1**, os valores das bases dos retângulos construídos e de suas respectivas áreas como pares ordenados, resultantes do produto da base escolhida pela altura identificada no retângulo, obter-se-á uma coletânea de retângulos. Algum desses retângulos aparenta ser o retângulo procurado?

Tabela 1

Número da medição	Base (x cm)	Área [A(x) cm ²]
1		
2		
...		
9		
10		

4. Pode-se perceber que, para cada valor da base do retângulo, existe uma área correspondente, o que nos sugere que a área da figura é função da base. Sendo assim, sejam x , a medida da base do retângulo construído, e $A(x)$ a área A em função de x formando pares ordenados $(x, A(x))$, que podem ser plotados no *Plano Cartesiano*. Para isso, utilizando o *software Graph*®, responda: **a)** Qual o comportamento desses pares ordenados no *Plano Cartesiano*? Que tipo de figura esses pares ordenados sugerem?; **b)** Matematicamente pode-se construir uma *lei de formação* para essa figura, ou seja, uma *expressão analítica* que representa a relação funcional entre a base do retângulo e sua área? **c)** Essa figura apresenta pontos extremos? Quais seriam esses pontos?; **d)** De que modo se podem encontrar esses pontos e o que eles nos fornecem?
5. Existe algum padrão de semelhança e congruência de triângulos nesse problema? Caso exista, observando esse padrão, você é capaz de deduzir alguma relação algébrica que lhe permita encontrar a função determinada anteriormente pelo *software Graph*®?
6. Você percebe algum outro método que lhe permita “desconfiar” de ter encontrado o retângulo de área máxima procurado?
7. De quais conceitos matemáticos esse problema trata?

Obs: A altura necessária para o cálculo da área foi obtida pelo processo de medição, com régua, indo do x assumido como base do retângulo, até a hipotenusa do triângulo ABC. As questões levantadas pelo G1 não foram entregues aos demais colegas de sala. Elas eram lançadas à medida em que o problema ia sendo desenvolvido.

6. O DESENVOLVIMENTO DA AULA DO G1

Na aula de *Estágio Supervisionado*, o G1 propôs o que chamou de “método experimental”, pois cada aluno traçou, no triângulo da *Figura 1*, retângulos que imaginava ter área máxima, mediu com régua suas dimensões e calculou sua área. Os registros (base do retângulo e área respectiva) foram colocados na *Tabela 1* e, em seguida, registrados num *Plano Cartesiano* na planilha do *Graph*®, um *software livre* disponível na web para *download*. Uma das ferramentas desse aplicativo, após inserir os pontos numa tabela, plota os pontos no *Plano Cartesiano*. Em outra ferramenta do aplicativo pode-se pedir uma melhor curva para a série de pontos selecionados e, concomitantemente, o aplicativo dá a *expressão analítica* da função que, no caso do

problema em discussão, representava a curva obtida a partir dos pares ordenados coletados. A *expressão analítica* encontrada referia-se a uma *Função Quadrática*, cujo *valor máximo* indicava o par ordenado procurado. O passo seguinte caracterizou-se pela busca das coordenadas desse par ordenado.

Sobre a questão **4a**), ao serem questionados, todos os alunos concordaram que a figura seria algo parecido com uma Parábola, representação geométrica de uma *Função Quadrática*, cujas particularidades (concavidade, zeros e vértice) passaram a ser trabalhadas. Foi possível notar nessa etapa, no registro de alguns alunos, pontos dispersos em relação aos demais, o que os motivou a retomar o processo de medição, verificando que se tratava de *erros aleatórios*. O estudo realizado levou o G1 a trabalhar o *cálculo do vértice da parábola* e o *coeficiente angular* da reta tangente à curva no par ordenado procurado (nesse ponto o *coeficiente angular*, obtido pela *Derivada da função*, é nulo). Assim, cada aluno pôde calcular a base, que levava à área máxima do retângulo, encontrando sua altura máxima pelo processo de medição, e esgotando o que havia sido proposto para a aula do *Estágio Supervisionado*.

O principal objetivo do G1 para a aula de *Estágio Supervisionado* foi o de trabalhar com a *Metodologia* nas aulas de Matemática, num curso de formação inicial docente, contando com o apoio das Tecnologias da Informação (TICs) como ferramenta de trabalho.

Na aula de *Resolução Problemas* foram levantadas outras possibilidades de resolução do problema e, com elas, conceitos matemáticos importantes foram construídos. Duas dessas possibilidades envolviam construções por dobraduras.

6.1 DOBRADURAS

Os alunos trabalharam na resolução do problema proposto pelo G1 em seus respectivos grupos, aqueles organizados no início da disciplina *Resolução de Problemas*. O integrante de um desses grupos, chamado neste texto de A1, construiu o triângulo ABC com as medidas propostas pelo problema e o recortou. Percebeu que, ao sobrepor, por dobradura, o vértice A e o vértice C, do triângulo ABC, ao vértice B, acabavam por construir um retângulo que se inscrevia perfeitamente no triângulo ABC (**Figura 3**).

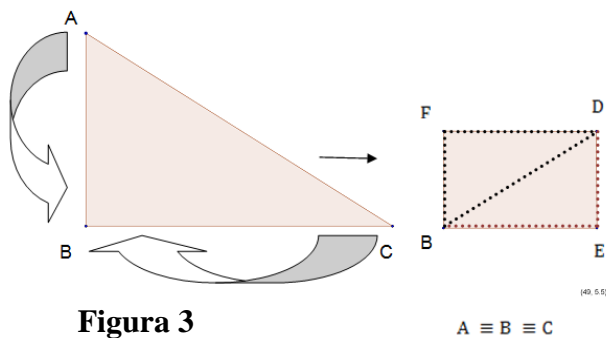


Figura 3

A1 disse que a composição de dois triângulos retângulos idênticos formou o retângulo BEDF, não havendo outra possibilidade de compor um retângulo, a partir de dois triângulos, que fosse inscrito no triângulo retângulo ABC. Sabendo que a soma das áreas dos dois triângulos (BFD e BDE) corresponde à área de um retângulo, A1 verificou que o retângulo obtido é o de área máxima procurado. Constatou ainda, utilizando a régua, que os vértices F e E do retângulo BEDF eram *pontos médios* dos catetos AB e BC, respectivamente, do triângulo retângulo ABC. Desse modo, as dimensões do retângulo de área máxima procurado eram:

$$\begin{cases} BF = \frac{1}{2} \cdot AB \rightarrow BF = \frac{1}{2} \cdot 6\text{cm} \therefore BF = 3\text{cm} \\ BE = \frac{1}{2} \cdot BC \rightarrow BE = \frac{1}{2} \cdot 8\text{cm} \therefore BE = 4\text{cm} \end{cases}$$

A1 prolongou sua análise acerca do problema, questionando-se se o segmento de reta \overline{BD} poderia ser a *mediana* relativa ao lado AB do triângulo e *bissetriz* do ângulo B. Para tanto, A1 percebeu as seguintes *congruências* nos triângulos retângulos AFD (adjacente ao lado DF) e DEC (adjacente ao lado DE):

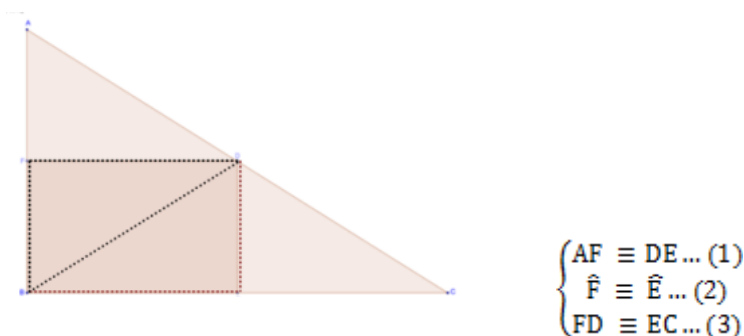


Figura 4

Em seguida, A1 afirmou: resulta de (1), (2) e (3) e do caso Lado Ângulo Lado (LAL) para *congruência* de triângulos, que os triângulos retângulos AFD e DEC são

congruentes. Portanto, as hipotenusas AD e DC possuem a mesma medida o que torna o ponto D *ponto médio* do lado AC do triângulo retângulo ABC. Concluiu-se então que o segmento \overline{BD} é a *mediana* relativa ao lado AC do triângulo ABC.

Para verificar se \overline{BD} era *bissetriz* do ângulo B, condição que A1 não foi capaz de resolver, o G1 fez a seguinte intervenção: Sejam os triângulos ADB e BDC vistos na **Figura 5**.

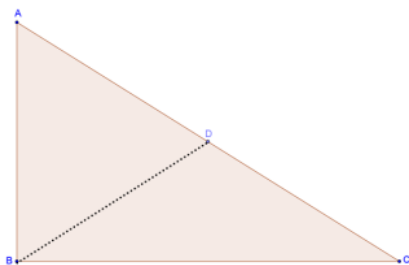


Figura 5

Do caso de *congruência* de triângulos visto anteriormente, disse o G1, temos que os lados AD, BD e CD são *congruentes*. Sendo assim, os triângulos ADB e BDC são isósceles o que implica em $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ABD}$, bem como, $\widehat{DCB} \equiv \widehat{DBC}$. Contudo, os lados AB e BC são diferentes, o que torna também diferentes os ângulos \widehat{ABD} e \widehat{DBC} . Dessa forma, concluiu o G1, o segmento de reta \overline{BD} não é *bissetriz* do ângulo B.

O que foi descrito anteriormente, resultado do trabalho do G1 em Plenária⁸ com os demais colegas, foi ocorrendo à medida que eram levantadas questões sobre o problema. Todos os questionamentos feitos por A1 foram discutidos pelo G1. Além disso, G1 auxiliou em conceitos que A1 não compreendia ou mesmo que apresentava algum grau de dificuldade, como no caso de verificar se \overline{BD} era ou não *bissetriz*. Todo esse trabalho esteve sob a supervisão e orientação do professor formador.

Depois de verificar, por dobradura, qual era o retângulo procurado e de responder às questões levantadas, com o apoio da *Geometria Euclidiana Plana sobre ponto médio, mediana e bissetriz*, o G1 sugeriu buscar comprovação, por meio da Álgebra, de que o retângulo procurado era, de fato, aquele que A1 havia encontrado.

⁸ *Plenária* é o momento de discussão em que participam todos os alunos. Nessa etapa são apresentadas todas as diferentes formas de resolução do problema proposto. O professor se coloca como um mediador, como um guia (ONUChic; ALLEVATO; 2011). Nesta pesquisa, além do que propõem Onuchic e Allevato, considerou-se *Plenária* todos os momentos de discussão geral que envolvia todos os alunos.

Antes de atender à solicitação do G1, um estudante, chamado nesse texto de B1, pertencente a outro grupo de trabalho, desenhou o triângulo AGC - que na *Geometria Euclidiana Plana* é a reflexão do triângulo ABC, sendo \overline{AC} o *eixo de simetria* - formando um retângulo (**Figura 6**) de medidas 6cm e 8cm. Ao dobrar o retângulo ao meio, verticalmente e horizontalmente, foram gerados 4 (quatro) retângulos menores com dimensões congruentes, ao menos experimentalmente. Um desses retângulos ficou perfeitamente inscrito dentro do triângulo ABC, conforme a figura a seguir:

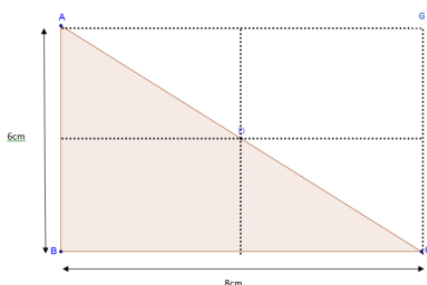


Figura 6

Dessa forma, B1 argumentou que a área máxima do retângulo procurado seria igual a um quarto da área do retângulo ABCG:

$$A_{\text{máx}} = \frac{1}{4} \cdot S_{\text{ABCG}} \longrightarrow A_{\text{máx}} = \frac{1}{4} \cdot (6\text{cm} \cdot 8\text{cm}) \longrightarrow A_{\text{máx}} = 12 \text{ cm}^2$$

S = área do retângulo ABCG

Visto que as dobraduras foram feitas em cima dos *pontos médios* dos lados do retângulo ABCG, constatou B1, foi imediato afirmar que as medidas dos lados do retângulo de área máxima inscrito no triângulo ABC é igual à metade das medidas dos lados do retângulo ABCG. Dessa forma, as dimensões do retângulo de área máxima procurado são 3cm e 4cm, visto que $(3\text{cm}) \times (4\text{cm}) = 12\text{cm}^2$, que corresponde a $\frac{1}{4}$ da medida da área do retângulo ABCG. A constatação de B1 não foge ao que A1 havia concluído sobre as dimensões do retângulo de área máxima.

Nesse instante, um integrante de outro grupo de trabalho, chamado neste texto de C1, questionou se o retângulo de área máxima (área igual a 12cm^2), inscrito no triângulo ABC, seria único.

Uma nova problemática foi instaurada e, nesse momento, questionou-se, inclusive, o enunciado do problema que dizia: “Determine esse retângulo, sabendo que a área é

máxima”. Veja que o uso da palavra “esse” determina um único retângulo, mas, naquele momento, com o questionamento de C1, todos os alunos pensaram na possibilidade de haver outros retângulos. Por exemplo, o retângulo de base 3cm e altura 4cm poderia ser um dos inscritos no triângulo ABC? E o retângulo de base 2cm e altura 6cm?

Após algum tempo, C1 argumentou que se a base do retângulo está sobre o lado BC do triângulo ABC, esta base – que denotaremos por b – está contida no intervalo real $]0;8[$. Do mesmo modo, se a altura do retângulo está sobre o lado AB do triângulo ABC, esta altura – que denotaremos por h – está contida no intervalo real $]0;6[$:

$$\begin{cases} 0\text{cm} < b < 8\text{cm} \\ 0\text{cm} < h < 6\text{cm} \end{cases}$$

Para resolver essa questão, o que permitiria encontrar as dimensões do retângulo de área máxima de forma segura, o G1, apoiado na Álgebra, apresentou a solução a seguir.

6.2 MÉTODO ALGÉBRICO

Nessa etapa, estando os alunos em seus grupos de trabalho, o G1, em Plenária, por meio de questionamentos, buscou por uma função que relacionava a área do retângulo com sua base a partir da semelhança de triângulos, nos triângulos ABC e AED (Caso: Ângulo Ângulo Ângulo - AAA).

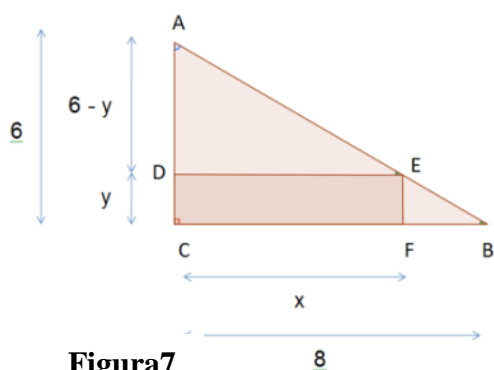


Figura7

Assim, utilizando a fórmula que calcula a área A do retângulo DEFC (um retângulo genérico que indica o de área máxima procurado) e a relação de semelhança entre os triângulos ABC e AED, o G1 escreveu:

$$\begin{cases} A = x \cdot y \dots (1) \\ \frac{6}{8} = \frac{6-y}{x} \dots (2) \end{cases}, \text{ lembrando que duas}$$

figuras são semelhantes quando seus ângulos são iguais e seus lados são proporcionais.

De (2) temos:

$$\frac{6}{8} = \frac{6-y}{x} \rightarrow y = -\frac{6}{8}x + 6 \quad \dots (3)$$

Finalmente, substituindo (3) em (1) teremos que:

$$A(x) = x \cdot \left(-\frac{6}{8}x + 6\right) \therefore A(x) = -\frac{6}{8}x^2 + 6x$$

Assim, A é uma *Função Quadrática* que depende de x, cujo gráfico apresenta um único ponto de máximo. Por essa razão, poder-se-ia encontrar um único retângulo de dimensões máximas, derrubando, por meio da Álgebra, a conjectura de que poderia haver mais de um retângulo de área 12cm² inscrito no triângulo ABC e garantindo que o enunciado do problema, com o uso da palavra “esse”, estava correto.

Fazendo uso dos conhecimentos prévios sobre o cálculo do *vértice* da *Parábola* e gráfico de uma *Função Quadrática*, G1 deu continuidade: Seja x_v a abscissa do vértice da Parábola, que nesse caso, coincide com a medida da base do retângulo de área máxima procurado. Então: $x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = -\frac{6}{2 \cdot \left(-\frac{6}{8}\right)} \rightarrow x_v = -\frac{6}{-\frac{6}{4}} \rightarrow x_v = 4\text{cm}$

Substituindo x = 4cm em (3), tem-se: $y = -\frac{6}{8} \cdot 4\text{cm} + 6\text{cm} \rightarrow y = 3\text{cm}$.

Com isso o G1, juntamente com os demais grupos, concluiu que existia um único retângulo de área máxima igual a 12cm² inscrito no triângulo retângulo ABC. Como justificativa para C1, foi-lhes dito que havia outros retângulos com área igual a 12cm², como já havia sido diagnosticado. Contudo, não eles são perfeitamente inscritíveis no triângulo ABC.

Outra forma de resolver o problema, mas que não foi abordada pelo G1, seria com o apoio da *Geometria Analítica*.

Se o triângulo ABC fosse desenhado no *Plano Cartesiano*, estando seus catetos apoiados no sistema de eixos coordenados, poder-se-ia, por meio da equação da reta $f(x) = y = ax + b$, encontrar o *coeficiente angular* da reta (**a**) e o *coeficiente linear* (**b**). Isso porque, a equação da reta procurada determina a hipotenusa do triângulo ABC, sendo que o *coeficiente angular* é dado pela equação $a = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cat oposto}}{\text{cat adjacentes}} = \frac{6}{8}$. A figura mostra que a reta procurada $y = ax + b$ é decrescente. Assim, o *coeficiente angular* é negativo. Logo, $a = -\frac{6}{8}$. O *coeficiente linear*, ponto onde a reta intercepta o

eixo Oy , é 6, ou seja, $b = 6$. A equação procurada é, então, $y = -\frac{6}{8}x + 6$.

Com essa equação, atribuindo-se valores para x que, no caso do problema, é a variável, calcula-se a *altura* y analiticamente e, conseqüentemente, a área desses retângulos. Existem infinitos retângulos inscritíveis no triângulo ABC (e isso pode ser comprovado atribuindo-se qualquer valor real positivo para x pertencente ao *domínio* da função). Contudo, só há um deles com área igual a 12cm^2 inscrito no triângulo ABC. Logo, ele é o de área máxima.

O G1, durante o estudo dos conceitos que poderiam ser ensinados com o problema, verificou a possibilidade de abordar o conceito de *Derivada*. Durante a aplicação do problema, essa abordagem não foi sugerida pelos demais colegas e coube ao G1 apresentá-la.

Considerando que as *Funções Polinomiais* são diferenciáveis em todo o seu domínio, disse o G1, a *Derivada de Primeira Ordem* $\left[A'(x) = -\frac{6}{4}x + 6 \right]$ da *Função Polinomial* $A(x) = -\frac{6}{8}x^2 + 6x$, interpretada geometricamente como o *coeficiente angular* da reta tangente à curva num dado ponto da função, quando igualada a zero, indica os pontos de *máximo* ou de *mínimo* da função. Igualando $\frac{dA}{dx}$ a zero, obtém-se $x = 4$, que é ponto de *máximo* da função e o valor da base do retângulo de área máxima.

Para calcular o valor de y , largura do retângulo, basta substituir $x = 4$ em (3):

$$y = -\frac{6}{8}x + 6, \text{ obtendo o valor de } y, \text{ que é } 3.$$

Essa abordagem, usando conceitos do *Cálculo Diferencial e Integral*, encerra uma ampla gama de conceitos importantes que podem ser abordados com esse problema, mostrando-nos que um único problema, que inicialmente pareceu ser muito simples com a resolução empírica por meio de dobraduras, pode ser trabalhado desde as séries iniciais do Ensino Fundamental II, passando pelo Ensino Médio com os importantes conceitos de *Função Afim* e *Função Quadrática* e, com mais rigor, no Ensino Superior, com a abordagem do *Cálculo Diferencial* e da *Geometria Analítica*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando o que disse Garcia Blanco (2003), no início deste texto, quando falou dos estamentos que envolvem a formação docente, veem-se, no que foi aqui apresentado, algumas dessas particularidades em movimento, que poderiam solucionar, ao menos na esfera que compete aos que aqui foram citados, essa problemática. Viu-se: a instituição com um novo projeto curricular, o formador de professor direcionando seu trabalho às novas tendências do ensino de Matemática e, os alunos, interessados em conhecer novas práticas, todos engajados num movimento de mudança.

A metodologia adotada possibilitou ao futuro professor estabelecer a relação entre conceitos matemáticos abordados nos diferentes níveis de ensino, da Educação Básica ao Ensino Superior. Espera-se que o aprendizado adquirido venha a incorporar sua prática docente, trabalhando a Matemática sob o ponto de vista de seu desenvolvimento, inter-relacionando os conteúdos, valorizando os conhecimentos prévios dos estudantes, fazendo conexões com conceitos já apreendidos e/ou com experiências já vivenciadas, a fim de promover uma aprendizagem mais significativa. A *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas* apresenta-se como uma possibilidade de trabalho que pode vir a ser incorporada em sua prática.

Um aspecto positivo que pôde ser observado foi o de alunos engajados em um forte processo de formação em função das condições de trabalho às quais foram expostos permitindo, inclusive, que o conhecimento adquirido numa disciplina transcendesse para além dela.

Agradecimentos: Agradecemos aos ex-alunos, atuais professores da Educação Básica, Luís Ricardo Alves Soares e Renata Roque que muito contribuíram com este trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, C. et al. (2006). A Matemática na Formação inicial de professores. Lisboa: APM e SPCE. Disponível em http://www.apm.pt/files/_90-95_lq_45d9e33dcb34b.pdf . Acesso em: 20 nov. 2013.
- BALL, D. L.; COHEN, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice – based theory of professional education. In G. Sykes and L. Darling – Hammond (Eds). *Teaching as the learning profession: Handbook of policy an practice* (pp.3-32). San Francisco: Jossey Bass.

CURI, E. (2011). A formação inicial de professores para ensinar matemática: algumas reflexões, desafios e perspectivas, 75-93. In *REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura/ Universidade Federal do Rio Grande do Norte*. – Ano 6. n.9 (jul. 2011). – Natal, RN:EDUFRN – editora da UFRN.

FIORENTINI, D. (2003). Em busca de novos caminhos e de outros olhares na formação de professores de Matemática - Apresentação. In: FIORENTINI, Dario (Org.). *Formação de Professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2003. p. 7-16.

GARCIA BLANCO, M.M. (2003). A formação inicial de professores de Matemática: Fundamentos para a definição de um curriculum. In: *Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Dario Fiorentini (Org). Campinas, SP: Mercado de Letras. p.51-86.

GOLDENBERG, M. (1997/2003). *A arte de pesquisar – Como fazer uma pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 7ª Edição. Rio de Janeiro - São Paulo: Record editora.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. (1977). *Fundamentos de Matemática Elementar – Conjuntos Funções*. 3ª Edição. São Paulo: Atual Editora.

KLEIN, F. (1908/1924). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, analysis*. 3ª ed. USA. Editora: Cosimo Classis.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M.M.M.S. (2007). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116p.

ONUCHIC. L.R.; ALLEVATO, N.S.G. (2011). Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, UNESP – IGCE. – v.5, n.41, Dezembro de 2011.

ONUCHIC. L.R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: *Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas*. 5ª reimpressão. Maria Ap. V. Bicudo (Org). Editora Unesp: Rio Claro.

POLYA, G. (1962). *Mathematical Discovery – on understanding, learning, and teaching problem solving*. v.I. John Wiley & Sons, INC., New York. London. Library of Congress Catalog Card Number: 62-8784.

_____ (1945/1995). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

SILVER, E. A. (2006). Formação de Professores de Matemática: desafios e direções. In: *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*. UNESP – IGCE. - Ano 19 - n.26. Rio Claro: Unesp, 2006.

TARDIF, M. (2010). *Saberes docentes e formação profissional*. 11.ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.