Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos[1]

Study of the functions of discourse in mathematics problem solving

CÉLIA FINCK BRANDT[2]
MÉRICLES THADEU MORETTI[3]
TÂNIA STELLA BASSOI[4]

Resumo

Com a presente pesquisa, buscamos identificar as operações discursivas recorrentes, utilizadas por alunos, na resolução de problemas matemáticos. Procuramos identificar as diferenças de discurso na resolução de problemas segundo o grau de escolaridade e também segundo a validade do ponto de vista de argumentação matemática. Procuramos soluções para as perguntas: Que operações discursivas são mais recorrentes pelos alunos na resolução de problemas matemáticos? Há diferenças de discurso na resolução de problemas segundo o grau de escolaridade? O discurso utilizado na resolução do problema matemático é válido do ponto de vista de argumentação matemática? As reflexões analíticas foram fundamentadas na Teoria de Representações Semióticas, segundo Raymond Duval, que se mostrou adequada para oferecer explicações sobre as diferentes formas de resolver problemas e de validá-las do ponto de vista da argumentação matemática. Avançamos com algumas análises e nos aproximamos de algumas soluções, que foram expostas ao longo do texto.
Palavras-chave: *representações semióticas; resolução de problemas; operações discursivas.*

Abstract

The aim of this research was to identify the recurrent discursive operations used by students in the resolution of math problems. The study tried to identify the difference in the discourse used in the resolution of problems according to students' level of schooling, as well as to the point of view present in the mathematical reasoning. To this end, the study tried to answer the following questions: What discursive operations are more used by students in the resolution of mathematical problems? Are there any differences in the discourse used by students in the resolution of problems according to their level of schooling? Is the discourse used in the resolution of mathematical problems valid in terms of math reasoning? The analytical reflections in the Semiotic Representation Theory, according to Raymond Duval, were adequate to offer explanations concerning the different forms of solving problems and validating them from a mathematical reasoning point of view. The study provided the advancement of some analysis and also allowed us to present some solutions.
Keywords: *semiotic representations; resolution of problems; discursive operations.*

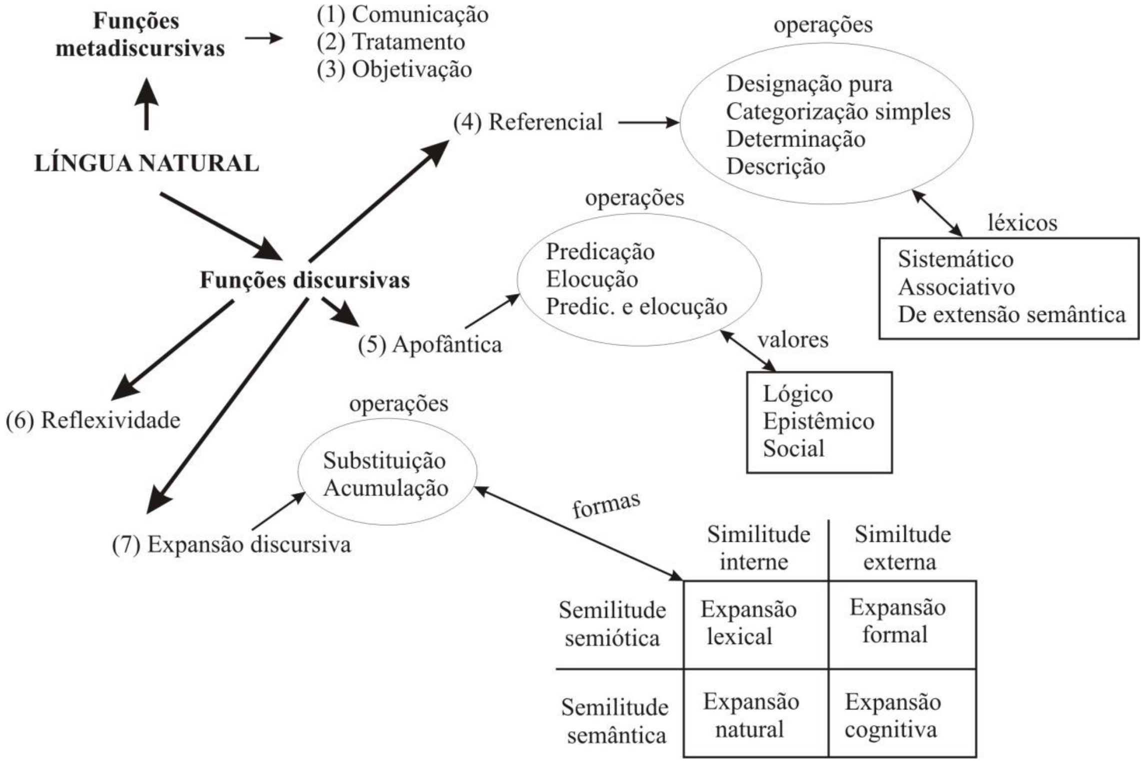
[1] Apoios CAPES e CNPq.
[2] Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC. Professora da Universidade Estadual de Ponta Grossa/UEPG. E-mail: brandt@bighost.com.br
[3] Doutor em Didática da Matemática. Professor do Departamento de Matemática e do PPGECT/UFSC. E-mail: mthmoretti@gmail.com
[4] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná/UFPR. Professora da UNIOESTE. E-mail: taniastella@ibest.com.br

Introdução

Neste estudo, analisamos a resolução de determinadas situações-problema por alunos da educação básica e superior. As análises voltaram-se para os tipos de soluções apresentadas – que podem ser de ordem pragmática ou intelectual – e seu valor de prova. Nossas análises, realizadas no plano do discurso, foram subsidiadas pela Teoria de Representações Semióticas, segundo Duval (1995, 2004).

Para Duval (1995, p. 89-91) uma língua se vale de dois grupos de funções radicalmente diferentes. Um grupo que lhe é próprio e reúne as funções discursivas, e outro grupo, que é comum a qualquer sistema de representação e que reúne as funções meta-discursivas, conforme se pode perceber no esquema a seguir:

Figura 1: Funções metadiscursivas e discursivas no uso de uma língua



Fonte: Esquema elaborado pelos autores a partir de Duval (1995, p. 87-136)

Análise do esquema da Figura 1

A análise do esquema da Figura 1 tomará por base principalmente os escritos de Duval (1995, p. 87-136), a partir dos quais este esquema foi construído. As palavras ou expressões em negrito, neste item do texto, referem-se aos termos encontrados no esquema da Figura 1.

A função de **comunicação** é uma condição necessária a qualquer sistema semiótico de representação. Para o "registro", termo utilizado por Duval (1995, p. 21; 2004, p. 44), são primordiais as funções de **tratamento** e **objetivação,** para que seja possível designar, também, um sistema semiótico de representação, além da comunicação.

O **tratamento** diz respeito às operações que podem ser efetuadas no interior do registro. Por exemplo, quando alguém, em uma conversa, com o intuito de deixar claro alguma coisa, diz a frase "em outras palavras", seguida de uma nova oração, esta pessoa se vale de um recurso da língua para dizer "a mesma coisa", mas com outros termos e outras possibilidades que a língua também lhe oferece. A criação de novos registros em matemática tem, na possibilidade de tratamento, um de seus elementos motivadores: o sistema decimal de numeração é um exemplo importante, basta compará-lo com o sistema romano de numeração, em que os tratamentos são extremamente custosos.

A **objetivação** diz respeito à possibilidade do sujeito de se conscientizar de algo de que ele não tinha consciência, enquanto um trabalho de exteriorização ainda não havia sido acabado. Este tipo de exteriorização pode acontecer não apenas na língua, mas por outros meios – como por exemplo, por um simples desenho. Essas três funções (comunicação, tratamento e objetivação) pertencem a qualquer sistema semiótico de representação.

Entretanto, um sistema semiótico, para ser considerado uma língua, além de cumprir as funções de comunicação, tratamento e objetivação, deve preencher todas as funções discursivas. Ou seja, ele deve ser capaz de:

- poder designar objetos (**(4) Função referencial**);
- dizer algo dos objetos assim designados sob a forma de uma proposição (**(5) Função apofântica**);
- marcar o valor, o modo ou estatuto de uma expressão (**(6) Função de reflexividade**);
- religar uma proposição a outra de forma coerente (**(7) Função de expansão discursiva**).

No interior de cada uma dessas funções discursivas, diferentes operações discursivas podem ocorrer. No caso da função referencial, podemos observar, no esquema da figura 1, quatro operações possíveis:

- Designação pura: consiste na identificação de um objeto. Por exemplo, <u>P</u> e <u>r</u> na frase seguinte: "Seja **<u>P</u>** um ponto qualquer da reta **<u>r</u>**...";

- Categorização simples: identificação de um objeto por uma de suas características. Por exemplo, <u>MMC</u> na frase seguinte: "Determinar o **<u>MMC</u>** dos números 3, 4 e 9";

- Determinação: torna preciso o campo de aplicação da operação de categorização. Por exemplo, a frase anterior “Determinar **o** MMC dos números 3, 4 e 9”;

O que se pode perceber, nestas duas últimas operações, é que a categorização simples não é suficiente por si só para designar um objeto, ela deve estar combinada com a operação de determinação.

Há ainda outra função discursiva, qual seja:

- Descrição: consiste em identificar um objeto pelo cruzamento de diversas operações de categorização; é uma operação de categorização mais complexa. Ainda na frase anterior, MMC designa o Mínimo Múltiplo Comum, e os algarismos 3, 4 e 9 designam os números. Essas duas designações são interligadas pela preposição de: “Determinar o MMC **dos** (de + os) números 3, 4 e 9”.

Nenhuma língua, mesmo a natural, pode ter um nome para cada objeto ou classe de objetos. Portanto, é por meio da operação de descrição que se pode nomear qualquer objeto, apesar da limitação lexical (DUVAL, 1995, p. 99).

Um léxico é um conjunto de elementos (signos, palavras ou símbolos) que permite marcar explicitamente a realização de cada uma dessas quatro operações discursivas da função referencial. Ele é caracterizado, para a função de designação, como **associativo, sistemático** e **de extensão semântica**.

Podemos dizer que “um léxico é associativo quando o léxico de partida não remete mais a um conjunto de elementos elementares, mas a uma diversidade de objetos e fenômenos do meio físico e do ambiente sociocultural” (DUVAL, 1995, p. 103). Por exemplo, seja AB o segmento de reta; seja AB o lado do triângulo ABC. Nesses casos, o léxico AB é associado ao segmento de reta e também ao lado do triângulo. O sistema posicional decimal de numeração é um exemplo claro de léxico sistemático, uma vez que qualquer número é designado a partir da posição e da combinação de dez signos iniciais. Já o procedimento por extensão semântica permite que novos objetos sejam criados por metonímia, metáfora, sinédoque etc.

Em relação à **função apofântica**, podemos destacar duas operações que podem ser efetuadas de forma isolada ou em conjunto: **predicação** e **elocução**. Uma unidade apofântica pode ser vista pelo seu conteúdo ou estatuto: o conteúdo diz respeito aos diferentes aspectos pelos quais ela pode ser considerada (materialidade dos signos que permite distinguir um do outro, afora as significações e associações de suas expressões), enquanto que o estatuto refere-se ao papel que ela preenche na organização global do discurso – hipóteses dadas, premissa, regra, conclusão intermediária, conclusão final (DUVAL, 1995, p. 123-124).

Uma língua deve permitir a distinção entre o engajamento do locutor e aquilo que ele quer dizer. Granger (1979, p. 170-172) define esta função da língua como **elocução**. Mas, conforme afirma Duval (1995, p. 133) não é somente para fins de comunicação entre as pessoas que as marcas de enunciação são importantes, e prefere chamar esta função de **função de reflexividade** para o discurso com fins estritamente científicos. Do fato que uma unidade apofântica depende de um ato de elocução ou predicação, ou de elocução e predicação ao mesmo tempo, este enunciado pode ter um valor **social**, **epistêmico** ou **lógico** – em geral, não explícito. No caso em que o valor lógico sobressai sobre os demais, como no discurso científico, a função de comunicação persiste. No entanto, está implícita, também, a função de tratamento, que é fundamental para a **expansão discursiva**.

A função de **expansão discursiva** é importante por permitir ao interlocutor fazer inferências, tornando explícito o que, no discurso, está implícito. Isto significa que o discurso diz mais do que parece dizer, e isso ocorre por meio das operações discursivas. Estas, por sua vez, ocorrem pelos modos de progressão do discurso, que podem ser de dois tipos: o primeiro é caracterizado como lógico e o segundo como natural, por ser mais espontâneo. Por exemplo, o discurso a seguir caracteriza a expansão discursiva do tipo lógico: se ΔABC é isósceles com $\widehat{A} = \widehat{B}$, ΔDEF é isósceles com $\widehat{E} = \widehat{F}$ e se Â ≡ Ê, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Já o exemplo "a soma de dois números ímpares é um número par" caracteriza uma expansão do tipo discursiva natural.

A função de expansão discursiva é operada de dois modos: por **substituição** ou **acumulação**; e por quatro formas de expansões distintas: **expansão lexical**, **expansão formal**, **expansão natural** e **expansão cognitiva**.

As inferências possibilitadas a partir da progressão das proposições podem ser realizadas pela substituição do resultado das novas inferências sobre as que foram feitas nas proposições anteriores. Essa expansão discursiva por inferência funciona por **substituição,** como se fosse um cálculo (DUVAL, 1995, p. 123). Para o autor, as inferências de um discurso desenvolvido nesse modelo requerem que se note cada vez mais a aplicação da regra utilizada, a qual pode ser explícita ou implícita ao discurso.

Duval (1995, p. 123) aponta ainda que a expansão discursiva por **substituição** depende do estatuto dos respectivos enunciados, que podem estar prévia e explicitamente fixados desde o começo, de acordo com o marco teórico e com as hipóteses que fundamentam o enunciado; ou apenas no momento em que ele aparece, durante o discurso. Assim, esse estatuto faz parte do sentido do enunciado.

Não é do mesmo modo que se faz a progressão do discurso em uma narração, descrição ou explicação: as frases se unem umas às outras e vão, por meio de conectores, determinando a progressão dos objetos nelas tratados, transformando-os ou enriquecendo-os no próprio percurso discursivo: a expansão se dá por **acumulação** de traços e de novas informações.

Quando a expansão discursiva acontece por **acumulação**, a evolução do enunciado depende do conteúdo expresso. O estatuto é quase sempre esquecido, pois se imagina que as informações expressadas têm o mesmo **valor epistêmico** e estão relacionadas ao mesmo assunto.

Para as formas de expansão discursiva, Duval (1995, p. 125-132) salienta quatro formas que possibilitam o reconhecimento do propósito que há na unidade de uma série de frases – como, por exemplo, a narração de um conto, os passos de um raciocínio, a descrição de um objeto, a narração de uma história e a justificativa de uma declaração.

A análise dessas formas se faz pela coerência do texto, e é ditada por regras que asseguram a continuidade do propósito em uma sequência de frases ou em proposições assertivas. Uma caminhada discursiva pode ser feita por meio de uma dessas formas, ou elas podem ser combinadas em um texto, desde que sejam respeitadas as regras de coerência e a gramática textual. Sendo assim, afirma o autor, não se pode pretender uma aprendizagem da produção escrita, bem como a compreensão de texto (que é o que estaremos fazendo ao analisar as soluções dos problemas apresentadas pelos dos alunos), se não levarmos em consideração o desenvolvimento de capacidades de discriminação dessas quatro formas de expansão discursiva.

A **expansão lexical** é baseada na recuperação de um mesmo significante, por identificação homofônica ou homográfica, processo que garante a continuidade e a coesão do discurso na passagem de uma frase à outra. Exemplo: o <u>pelo</u> do cachorro é preto; vou <u>pelo</u> lado de dentro.

A **expansão formal** ocorre pela aplicação de regras de substituição, embasadas exclusivamente em símbolos que representam variáveis ou proposições, independentemente de sua significação. Tais regras permitem a obtenção de uma nova asserção quando há a substituição de símbolos na asserção de partida, como em uma demonstração. Exemplo: $\forall$ **x e y** $\in \mathbb{R}$, se $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$.

Outra forma de expansão discursiva que pode ser levada em conta na análise dos discursos é a **expansão cognitiva**, caracterizada pelo emprego especializado da linguagem natural, cujo vocabulário é limitado pelas terminologias restritas a um conhecimento dominado. Exemplo: Um número ímpar excede um número par em uma unidade. Logo, a soma de dois ímpares resulta num número par. Esse vocabulário associativo vai expressar significações estabelecidas pelas definições, pelos enunciados das demonstrações, por observações, experiências etc. São associados a essa expansão discursiva as descrições, as explicações técnicas e teóricas, além de algumas demonstrações. Em relação às demonstrações, o que as difere da forma de **expansão formal** está no fato de que as regras de substituição, baseadas apenas na forma do símbolo, já não são relevantes.

A quarta e última expansão discursiva a ser considerada na análise dos discursos é a **expansão natural**, caracterizada pelo emprego comum da linguagem. Nela ocorre a mobilização simultânea da rede semântica de uma língua natural e dos conhecimentos práticos do próprio meio sociocultural daqueles que produzem o discurso.

A expansão discursiva (natural, cognitiva, formal ou lexical) e as inferências ocorrem, segundo Duval (1995, p.129), em virtude de relações de similaridade entre as unidades apofânticas (**similaridades semióticas** e **semânticas** ou **similaridades internas** ou **externas**).

A similaridade entre duas unidades apofânticas é dada pelos significantes que constituem cada uma delas, respectivamente. Quando há uma repetição dos mesmos significantes de um enunciado a outro, temos uma **similaridade semiótica**. Por exemplo, a palavra "razão" (significante) pode ser empregada em duas expressões referenciais não equivalentes: "a <u>razão</u> entre duas grandezas é..." ou " ele tem <u>razão</u> ao afirmar que...".

Se expressões referenciais equivalentes são empregadas em enunciados diferentes, provocando uma invariância referencial, enquanto que a diferença de sentido entre elas permite que a segunda tenha um progresso discursivo em relação à primeira, então estamos falando de uma **similaridade semântica**. Por exemplo, "o produto de dois números é positivo" ou "$x.y > 0$".

Com base nos dados coletados, analisamos a produção dos alunos, concentrando nossa atenção no tipo de solução apresentada (pragmática ou intelectual) e nas formas discursivas utilizadas (narração, descrição explicação e raciocínio) que lhes possibilitaram fazer inferências ou explicitações, tendo em vista as funções de expansão discursiva, referencial e apofântica.

Buscou-se, com as análises realizadas, a compreensão dos sentidos e das significações das soluções apresentadas pelos alunos, partindo de um quadro definido de categorias prévias que permitisse determinar, a partir do tipo de representação semiótica utilizado em problemas de aritmética-álgebra (língua natural/formal, linguagem algébrica e linguagem numérica), o valor de argumentação matemática da solução (pragmática ou intelectual).

Conhecer como os alunos argumentam, do ponto de vista discursivo, a partir da solução de situações problema, nos levou às seguintes questões: Que operações discursivas são mais recorrentes pelos alunos na resolução de problemas matemáticos? Há diferenças de discurso na resolução de problemas segundo o grau de escolaridade? A que se devem essas diferenças? O discurso utilizado na resolução do problema matemático é válido do ponto de vista de argumentação matemática?

Portanto, esta investigação teve por objetivos:

- Explicitar as operações discursivas mais recorrentes pelos alunos na resolução de problemas matemáticos;
- Apontar, por meio de reflexão analítica, as diferenças de discurso na resolução de problemas, segundo o grau de escolaridade, e a que se devem essas diferenças;
- Validar, do ponto de vista da argumentação matemática, o discurso utilizado na resolução do problema matemático.

Procedimentos de coleta e análise de dados e resultados

O procedimento de coleta de dados empíricos compreendeu a aplicação de problemas matemáticos a serem resolvidos por alunos da educação básica e superior, conforme o Quadro 1. A especificidade dos problemas possibilitou a utilização ou não da linguagem algébrica em sua resolução.

Quadro 1 – Situações problema propostas aos alunos segundo o grau de ensino

Problema 1	Problema 2
Estou pensando em dois números de dois algarismos. A soma dos algarismos de cada um é 10 e a diferença entre os números é 18. Quais são os números? Justifique sua solução e escreva como a obteve.	Escreva três números naturais ímpares cuja soma é vinte. Justifique sua solução.
Proposto aos alunos do ensino médio e superior.	Proposto aos alunos do ensino fundamental, médio e superior.

Participaram do estudo 96 alunos do ensino fundamental – EF (6º, 7º, 8º e 9º anos) –, 46 alunos do ensino superior – ES (1º ano do curso de licenciatura em Matemática) –, e 44 do ensino médio – EM (1º e 2º anos) –, todos advindos de duas cidades paranaenses. Os alunos foram convidados pelos professores de matemática a comparecerem em contra turno numa sala da escola para resolver problemas de matemática.

Para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, elaborou-se um código de identificação, da seguinte forma: os problemas foram numerados de 1 a 2, os alunos do ensino fundamental foram marcados pela letra F, os do ensino médio pela letra M e os do superior pela letra S, e os sujeitos foram representador por números de 1 a *n*. Desse modo, o código 2-S8 refere-se à solução apresentada ao problema 2 pelo aluno número 8 do ensino superior.

A qualidade da produção apresentada por um sujeito vai ser evidenciada, enquanto análise, em relação ao embasamento ou elaboração teórica (apoiadas em propriedades ou teoremas matemáticos) e à utilização de procedimentos de análise e argumentação.

Análise do discurso apresentado pelos alunos na resolução dos problemas propostos

As soluções aos problemas propostos, em forma de discurso (em linguagem numérica, algébrica ou língua natural), foram analisadas em relação às funções de expansão discursiva, apofântica e referencial. Esse procedimento de análise possibilitou a compreensão dos textos em relação ao que estava explícito ou não, exigindo dos pesquisadores inferências apoiadas na mobilização de conhecimentos referente ao tema.

As operações de expansão discursiva – narração, descrição, explicação e raciocínio – mobilizadas pelos alunos nesses discursos, foram interpretadas conforme sua natureza lógica ou espontânea, por acumulação e conforme a produção de inferências realizadas por substituição. Dessa forma, foi possível perceber a regra utilizada, estando ela explícita ou não.

As operações da função referencial de designação pura, categorização simples, determinação ou descrição, foram destacadas para contribuir na compreensão das formas utilizadas pelos alunos para designar os objetos de conhecimento mobilizados para a resolução dos problemas. O mesmo foi feito com os tipos de léxicos utilizados (sistemáticos ou associativos).

As operações da função apofântica de predicação e de ato ilocutório acompanharão as análises para que possamos inferir sobre o valor lógico, epistêmico ou social das respostas apresentadas.

Dividiremos a apresentação dessas análises em duas partes. Na primeira parte, apresentaremos as análises do problema 1; na segunda, as do problema 2.

Análises das soluções apresentadas pelos alunos ao problema 1

A solução do aluno 1-M8 envolveu uma prova pragmática, não algébrica, em língua natural. A natureza lógica do raciocínio revelou-se quando ele afirmou que trabalhou com numerais cuja soma dos algarismos era 10; a partir da retirada de 18 unidades, encontrou o outro número. Essa lógica possibilitou inferências que correspondem aos numerais que substituem as frases do enunciado do problema.

28 e 46 porque a soma dos algarismos é 10 e a diferença é de 18.
1º separei os números e os algarismos que dão 10 somados, depois subtraí 18 de cada um, até que desse uma resposta que a soma dos algarismos desse 10.

Consideramos esta uma prova pragmática, pois o numeral 46 foi considerado para a retirada das 18 unidades e para a obtenção do numeral 28. No entanto, outras soluções poderiam ser obtidas se as demais possibilidades fossem testadas. Assim, para 55 teríamos o numeral 37, que também constitui solução para o problema. Assim aconteceria para os pares 64 e 46, 73 e 55, 82 e 64, 91 e 73, 37 e 19. A compreensão da solução apresentada pelo aluno foi possível por meio da expansão natural, pois o discurso do aluno foi seguido de explicação. Foi por meio dessa predicação que o aluno falou sobre a sua forma de raciocinar acerca do problema e, ao mesmo tempo, de interagir com seu interlocutor – no caso, o professor. Essa solução tem valor social, por envolver resposta dada a uma questão proposta pelo professor; e também um valor lógico de verdade, pois a afirmação é verdadeira. No entanto, o valor epistêmico de certeza não foi contemplado, pois a solução é pragmática, obtida por tentativa. Isso não invalida a solução apresentada, visto que, nesse grau de ensino, as formas matemáticas de pensar devem ser incentivadas.

Quando os discursos caracterizaram narração, descrição ou explicação, também foi possível avaliar a progressão dos objetos neles tratados, realizada por **acumulação de informações**, sendo que o desenvolvimento desses discursos demandou, segundo Duval (1995), uma "*apreensão sinóptica de todas as frases e de todas as relações que existem entre elas*" (p. 114), além da necessidade de assimilação dos aspectos gerais que compunham as frases e das relações estabelecidas entre elas. Este foi o caso da solução apresentada pelo aluno 1-S4, classificada como pragmática, não algébrica, com registro numérico e registro em língua natural:

19 8 7 6 5
28 91 82 73 64
37 $\underline{-73}$ ou $\underline{-64}$ ou $\underline{-55}$ ou $\underline{-46}$
46 18 18 18 18
55 Como a soma dos dois algarismos é 10, logo a sequência dos $n^{\underline{os}}$ é uma PA de razão 9.
73 E aí pegando 2 $n^{\underline{os}}$, que diferem em x a razão, a diferença entre eles é 18.
82
91

A explicação dada pelo aluno nos revela que os registros apresentados evidenciam a operação cognitiva de expansão discursiva, quando ele apontou a existência de uma PA com a sequência dos números formados de acordo com a condição do problema. Essa descoberta se deu por acúmulo das informações que a sequência forneceu, permitindo a obtenção da solução do problema. Do ponto de vista de valor de prova, é possível inferir que essa solução é válida segundo a argumentação matemática, na qual o discurso utilizado na resolução do problema matemático combina registro numérico com registros da língua natural.

É por meio da função apofântica que podemos argumentar a favor da validade da solução, pois os argumentos utilizados são de natureza lógica em relação à veracidade da afirmação (de fato, a sequência é uma progressão aritmética (PA) de razão 9 e, de dois em dois numerais, há uma diferença de 18 unidades). Esse valor lógico adquire um valor de natureza cognitiva em se tratando do universo dos interlocutores: o aluno falando ao seu professor. A operação de designação contou com léxicos associativos e sistemáticos: os algarismos dos numerais, os sinais, as letras do alfabeto (ao se referir a uma progressão aritmética tratando-a de PA). A designação da solução aponta para o fenômeno que ocorre por meio do registro da sequência: registro dos algoritmos indicando a diferença de 18 unidades e a enunciação das relações e propriedades observadas empiricamente. Essa solução tem valor lógico de verdade e valor social, por cumprir uma ordem dada pelo professor com a finalidade de encontrar a solução do problema.

Os discursos foram avaliados também em relação às suas unidades apofânticas – que foram consideradas ora como proposições, ora como frases –, por meio de seu conteúdo (materialidade dos signos que permitem a sua distinção) ou a partir de seu estatuto (a significação das suas expressões referenciais e predicativas assim como das associações que são permitidas devido à rede semântica da qual provêm, ou de seu **valor lógico** de verdade). Esse estatuto correspondeu ao papel que cumpre diante de outro enunciado na organização do discurso (premissa, regra, conclusão...), e de que forma estabeleceu um **valor epistêmico** à unidade apofântica por meio das definições, teoremas e axiomas.

No caso do aluno 1- M7, as unidades apofânticas caracterizaram um conteúdo (7 + 3 = 10 e 5 + 5 = 10) que cumpre o papel de organização da solução do problema, confirmado pela operação de subtração apresentada em forma de algoritmo:

$$\begin{array}{lr} & 6\; \\ 7 + 3 = 10 & 73 \\ 5 + 5 = 10 & \underline{-55} \\ & 18 \end{array}$$

A argumentação matemática dessa solução é válida, mas não esgota todas as soluções possíveis para o problema. As unidades apofânticas utilizadas expandem o discurso e permitem inferir que a solução obtida levou em consideração os dados do problema, mas não garantem um valor epistêmico porque a solução não foi apoiada por definições, axiomas ou teoremas. Para a designação dos objetos (números), foram utilizados somente léxicos sistemáticos (os algarismos que compõem os numerais e os sinais de adição e subtração). Esses léxicos permitiram a designação dos objetos utilizados nas sentenças matemáticas com as respectivas relações entre eles: adição e subtração. No entanto, do ponto de vista de valor epistêmico, essa solução não permite a determinação de certeza (ser solução única), por ser sustentada em apenas um dado empírico obtido por tentativa. Esse procedimento não esgota todas as possibilidades. Considerando o ato ilocutório, possibilitado pela função apofântica, essa solução tem que ser compreendida pelo professor como um progresso na forma matemática de pensar, a qual precisa ser valorizada no ambiente da sala de aula. Essas sentenças adquirem um valor determinado no universo cognitivo dos interlocutores: para o aluno, elas adquirem um valor social, por representar uma resposta a um problema proposto pelo professor; ao mesmo tempo, possuem um valor lógico de verdade; para o professor igualmente, por caracterizar uma resposta a uma solicitação e por ser verdadeira, apesar de pragmática.

A solução do aluno 1-S1 (correta por acaso) não pode ser validada do ponto de vista da argumentação matemática, pois o estatuto das unidades apofânticas utilizadas é falso em relação à significação referencial, já que a sentença x – y = 18 não poderia expressar a diferença entre os números representados pelos numerais, visto que x e y designavam os algarismos da cada um desses numerais.

6 4 4 6	*x – y = 18*	*64*
x y x y	*10 – y – y = 18*	*46*
x + y = 10	*- 2y = 18 – 10*	*18*
x = 10 – y	*Y = 8*	
x = 10 - 4	*2*	
x = 6	*Y = 4*	

Essa solução pode ser analisada levando em conta a função referencial de designação de objetos. Os léxicos sistemáticos x e y foram utilizados para designar os números e as relações entre eles de acordo com o enunciado do problema. No entanto, essas relações foram explicitadas de forma errada, pois se x e y representam os algarismos dos numerais que designam os números, eles não poderiam ser utilizados para representar esses mesmo números. Em se tratando da função apofântica, a expressão matemática x – y é desprovida de valor lógico, por não ser verdadeira, e também de valor epistêmico, por representar um absurdo. Se x e y são os algarismos desses números, eles deverão ser utilizados de duas formas: primeiro, para expressar a relação entre eles conforme apontado no enunciado "isto é x + y = 10"; e, segundo, para expressar o valor relativo de acordo com a estrutura do Sistema de Numeração Decimal Posicional (SNDP): "isto é xy = 10x + y". Os mesmos léxicos não poderiam ser utilizados para designar o outro numeral representativo do outro número. Seriam necessários outros léxicos, como por exemplo, z e w. As mesmas relações seriam então expressas com a sua utilização: z + w = 10 (de acordo com o enunciado), wz = 10w + z (de acordo com o SNDP). Há ainda outro enunciado para atender a outra condição colocada pelo professor no problema: 10x + y – (10w – z) = 18. Mesmo que o ato ilocutório esteja presente (quando o aluno apresenta essa condição por meio de uma sentença incorreta, isto é, x – y = 18), significando um valor social por atendimento a uma solicitação do professor, ele não caracteriza condição necessária e suficiente para garantir os valores epistêmico e lógico. Em se tratando do ato ilocutório, essa solução precisa ser compartilhada com os demais alunos, de modo a iniciar uma discussão sobre a validade dessa forma de designação tendo em vista as condições do enunciado.

O aluno 1-S8 apresentou uma solução algébrica, utilizando unidades apofânticas de outra natureza, que têm validade pelo seu estatuto, conferindo significação às suas expressões referenciais e predicativas e às associações permitidas pela rede semântica da qual provêm – isto é, da linguagem algébrica.

1º número 10a + b — $9a + \cancel{a + b} - 9x - \cancel{(a + b)} = 18$

2º número 10x + y — $9a - 9x = 18$ — *Como* $a = x + 2$ *então*

$a + b = 10$ — $a, b, x, y \in N$ — $9(a - x) = 18$ — $b = 8 - x$

$x + y = 10$ — $a - x = 2$

$a = x + 2$

Existem as possibilidades $\begin{cases} a = 9 \\ x = 7 \end{cases}$ $\begin{array}{r} 91 \\ -\ 73 \\ \hline 18 \end{array}$

$\begin{array}{l} a = 8 \\ x = 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 82 \\ -\ 64 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{l} a = 7 \\ x = 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 73 \\ -\ 55 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{l} a = 6 \\ x = 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 64 \\ -\ 46 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{l} a = 5 \\ x = 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 55 \\ -\ 37 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{l} a = 4 \\ x = 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 46 \\ -\ 28 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{l} a = 3 \\ x = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 37 \\ -\ 19 \\ \hline 18 \end{array}$

O **valor lógico** de verdade foi alcançado em virtude das relações matemáticas estabelecidas. O valor epistêmico também foi alcançado, visto que o progresso do discurso foi feito pela substituição de relações válidas do ponto de vista matemático. Essa substituição caracterizou uma expansão cognitiva, visto que as sentenças matemáticas apresentadas revelam o conhecimento da estrutura do SNDP e de outras propriedades e teoremas – tais como a aplicação de princípios aditivos e multiplicativos para a resolução das equações e a utilização do método da substituição para resolução do sistema de equações. Essas substituições foram sustentadas pela similitude externa e semântica, que garantiram a invariância de referência dos objetos tratados.

Essa forma de resolução deve ser valorizada, envolvendo interlocução entre os demais alunos da classe. É o ato ilocutório enquanto função do discurso sendo valorizado no processo de ensino, para possibilitar aprendizagens mais significativas e atribuição de sentido às diferentes soluções apresentadas para os problemas.

O aluno 1-S21 apresentou uma solução cuja expansão discursiva não avançou além da descrição/narração.

x → ?? , soma de x = 10
y → ?? , soma de y = 10
x – y = 18
Lógica, ou melhor, tentativa e erro, pois sabendo que a soma dos algarismos é 10, então temos: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Numerando eles de 1 a 9 temos que: Subtraindo um dos números pelo sucessor de seu sucessor teremos a diferença entre os mesmos de 18, portanto as possibilidades são 7.

Para caracterizar uma expansão natural baseada numa argumentação retórica, seria necessário argumentar que a diferença entre um número e o sucessor de seu sucessor é sempre constante – no caso, igual a 18. Essa argumentação se baseia no fato de que um número x = k tem como sucessor de seu sucessor um número y = k + 2. Como a soma dos algarismos de x é 10 e a soma dos algarismos de y também é 10, ter-se-ia 20 como soma dos algarismos de x e y e 2 unidades de diferença entre os números x e y, pois y – x = k + 2 – k = 2; portanto, 20 – 2 = 18.

No caso do aluno 1-S7, na primeira parte do discurso percebe-se, em solução de natureza pragmática, uma expansão natural descritiva e narrativa, pois ele não avança com argumentações retóricas, como no caso anterior. No entanto, essa tentativa empírica fê-lo perceber um padrão de regularidade (a diferença constante de 18), o qual possibilitou a apresentação de outro discurso com expansão discursiva sustentada por uma argumentação retórica: basta diminuir sempre 18 de um número qualquer (desde que a soma dos algarismos seja 10) para encontrar o outro (só faltou argumentar porque esse outro número também teria como resultado da adição dos algarismos uma soma igual a 10). Esse padrão de regularidade o fez lançar mão da reversibilidade operatória para a obtenção dos dois números pedidos.

1 + 9 = 10	*Para obtermos todas as possibilidades, basta montarmos uma tabela como ao lado. Assim teremos todas as somas dos dois algarismos são iguais a 10. Para a diferença pegamos da tabela o último número, passamos o próximo e teremos assim o par para a subtração.*
2 + 8 = 10	
3 + 7 = 10	
4 + 6 = 10	*Por exemplo:*
5 = 5 = 10	*91 – 73 = 18*
6 + 4 = 10	*82 – 64 = 18*
7 + 3 = 10	*73 – 55 = 18*
8 + 2 = 10	*55 – 37 = 18*
9 + 1 = 10	*46 – 28 = 18*
	37 – 19 = 18

Outra forma de obtermos o outro número correspondente para a subtração é escolher qualquer número e subtrair 18 dele, a resposta será o número desejado.

Do ponto de vista da operação de predicação da função apofântica, esses enunciados possuem valor lógico (afirmações verdadeiras), por garantir a certeza da solução – pois retirar 18 unidades de um numeral com resultado da soma dos dois algarismos igual a 10 significa encontrar outro número com diferença de 18 unidades do anterior. No entanto, essa enunciação não tem valor epistêmico, pois não argumenta em relação à soma dos algarismos desse novo número. Nesse sentido, seria necessário argumentar que a retirada de 18 unidades levaria a um número cuja soma dos algarismos também é 10. Essa argumentação vai exigir uma demonstração no sentido de expandir o discurso por substituição e por recorrência a mecanismos de expansão cuja similaridade é externa e semântica, portanto expansão de natureza cognitiva. A seguir, o que seria necessário para essa argumentação.

$$\begin{cases} 10x + y = xy \\ 10w + z = wz \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y = 10 \\ w + z = 10 \end{cases} \rightarrow x + y = w + z \rightarrow \boxed{x - w = z - y}$$

$10x + y - (10w + z) = 18$

$10\,x - 10\,w + y - z = 18$

$10(\,x - w) + y - z = 18$

$10\,(z - y\,) + y - z = 18$

$10z - 10y + y - z = 18$

$9z - 9\,y = 18 \quad \rightarrow x - y = 2 \rightarrow x = 2 + y$

$x + y = 10 \rightarrow 2 + y + y = 10 \rightarrow y = 5 \text{ e } x = 5$

$5 - w = z - 5 \rightarrow w + z = 10$

No caso do aluno 1-S8, podemos observar que sua argumentação recaiu num primeiro momento na descrição/narração de seus procedimentos para resolver o problema. No entanto, essa narração/descrição teria que avançar para garantir essa similaridade externa, isto é, garantir que os argumentos tivessem validade. Nesse momento, a língua natural não foi eficiente e a expansão discursiva passa a ser de natureza cognitiva (restrições anunciadas com auxílio da linguagem algébrica: como “a subtração... é positiva então ab > xy; b-y = 8; b < y). Essas restrições são decorrentes das condições do problema e, por essa razão, justificam a escolha dos dois valores: b = 4 e y = 6. Esses valores encontrados possibilitam a solução do problema, pois o outro algarismo do número é obtido para completar 10 (outra condição do problema: a soma dos algarismos...). A estratégia mais empírica e pragmática impediu-o de encontrar as outras soluções possíveis que atendessem às mesmas restrições. Na passagem para a expansão cognitiva, seu discurso caracterizou mais uma explicação do que um raciocínio dedutivo.

ab	$a + b = 10$	ab	$b \neq 9$	$y > 3$	$b < 9$	$y > 5$
xy	$x + y = 10$ $\underline{-xy}$	$b \neq 8$				
		18	$1b$	$b = 4$ e $y = 6$		
			$\underline{-y}$			
			8			

R: Para a solução do problema, optei pelas tentativas. Para isso criei pequenas “restrições”. Por exemplo, como a subtração de ab por xy é positiva, ab > xy, logo, b < y. Sabemos também que 1b – y é 8, assim, como b “pode’”ser 4, temos y = 6. E como a soma dos algarismos 10, temos ab = 64 e xy = 46. Para provar 64 – 46.

A solução do aluno 1-S18 apresenta as formas como os objetos (no caso os numerais que representam os números) são designados. Ao mesmo tempo, leva em conta os dados do problema. Essa designação caracteriza uma similaridade externa e de natureza cognitiva, pois exige o conhecimento das regras de organização da escrita arábica de acordo com a estrutura do SNDP. É também cognitiva, por utilizar léxicos sistemáticos para a designação dos numerais (isto é, letras do alfabeto) e também por justapor esses léxicos da mesma forma como são justapostos os algarismos de 0 a 9. Essa designação correta permitiu a obtenção de uma das soluções do problema. O raciocínio do aluno tornou-se explícito nas formas de designação de outros objetos – como, por exemplo, a diferença entre os dois números. Essa designação, ao compor os enunciados, adquire valor lógico (verdadeira) e epistêmico (garantia de certeza, pois foi apoiada em propriedades e teoremas). Assim, designa a diferença positiva por meio das sentenças em linguagem algébrica, colocando em cena a função apofântica, ao explicitar, por meio de enunciados, as relações e teoremas: b é diferente de 9, pois o único número terminado em 9 (19) não tem um outro menor para que a diferença dê positiva e, como consequência, crie outra designação; isto é, então b < 9 (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1) . Essa designação passa a ser testada e um valor é escolhido para o valor de b (no caso 4). Como consequência, o valor de y fica determinado (no caso 6) e os outros valores de a e x também (6 e 4, respectivamente).

1º número 10 a + b — *9a + a + b – 9x – (a + b) = 18*

2º número 10x + y — *9a – 9x = 18* — *Como a = x + 2 então*

a + b = 10 — *a, b, x, y ϵN* — *9(a – x) = 18* — *b = 8 - x*

x + y = 10 — *a – x = 2*

a = x + 2

Existem as possibilidades $\begin{cases} a = \mathbf{9} \\ x = \mathbf{7} \end{cases}$

$a = \mathbf{8}$	$a = \mathbf{7}$	$a = \mathbf{6}$	$a = \mathbf{5}$	$a = \mathbf{4}$	$a = \mathbf{3}$
$x = \mathbf{6}$	$x = \mathbf{5}$	$x = \mathbf{4}$	$x = \mathbf{3}$	$x = \mathbf{2}$	$x = \mathbf{1}$

No caso do aluno 1-S41, observa-se a expansão discursiva de natureza cognitiva, visto que as afirmações são baseadas em definições (ab e cd são os números em questão, isto é, a e b são os algarismos do número x cuja adição tem por soma 10...).

Sejam x = ab e y = cd os números em questão. Como os dois números (x e y) são diferentes, vamos supor sem perda de generalidade que x > y. Desse modo, temos que a ≥ c e b ≥ d. Tendo em vista que a, b, c, d ϵZ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, temos as possibilidades:

X = 37 e y = 19	*x = 73 e y = 55*
X = 46 e y = 28	*x = 82 e y = 64*
X = 55 e y = 37	*x = 91 e y = 73*
X = 64 e y = 46	

Essa designação utilizou léxicos sistemáticos (as letras do alfabeto). A justaposição desses léxicos representa as designações do tipo caracterização e determinação (ab e cd são <u>os</u> <u>números</u> em questão). Da mesma forma, essas definições são utilizadas para afirmar que x > y, pois a diferença é positiva (no caso igual a 18). No entanto, essas definições não foram utilizadas corretamente, quando1-S41 assumiu que a ≥ c e b ≥ d, pois poderemos ter os números 73 e 55, em que a condição b não é satisfeita; não poderemos ter a = c e d = b, pois a diferença não daria 18, uma vez que a – c = 0 e b – d = 0. Em se tratando da função apofântica, esse enunciado não tem valor lógico (isto é, não é verdadeiro) e nem epistêmico (pois são afirmações absurdas). Esse enunciado, mesmo tendo sido apresentado na explicação, contradiz as soluções apresentadas empiricamente – como, por exemplo: no par 37 e 19, b não é maior que d; em nenhum par a = c e b = d. Para a afirmação (enunciado): “como os dois números são diferentes”, seria necessário argumentar que, se não fossem diferentes, não haveria uma diferença entre eles que corroboraria a sentença (outro enunciado) x > y. Essas propriedades foram levadas em consideração na formação dos pares (em todos eles x > y). A formação dos pares torna explícito, considerando a função de expansão discursiva, que os dados do problema foram considerados, pois em todos eles a adição dos algarismos tem soma igual a 10. Ao mesmo tempo em que 1-S41 parte de um discurso de natureza cognitiva, ele o transforma em empirismo, pois suas conclusões se baseiam em tentativas empíricas. Seu discurso é natural, do tipo narração/descrição. Essas análises são importantes por parte do professor, que deve levar em conta o ato ilocutório de uma das funções do discurso: a função apofântica. O aluno comunica ao professor suas conceitualizações e, igualmente, suas incompreensões e suas fragilidades conceituais. Essas não estão explicitadas, cabendo ao professor sua identificação e comunicação, para que haja possibilidade de progresso na forma matemática de pensar. As funções do discurso têm grande contribuição nesse processo: por essa razão, são importantes.

Análises das soluções apresentadas pelos alunos ao problema 2

Quando a passagem de um enunciado a outro se faz naturalmente – ou seja, quando o reconhecimento do léxico (vocabulário) básico da língua é suficiente para a identificação da **similaridade semiótica** ou da **similaridade semântica** –,dizemos que há uma similaridade interna entre os dois enunciados.

É o que revela a solução apresentada por 2-M5, classificada como não algébrica, em língua natural, caracterizando uma similaridade semântica interna.

> *Não dá, porque a soma é par e para dar certo devia ser ímpar.*

Do ponto de vista da argumentação matemática, essa solução é válida, visto que, em função da expansão do discurso, pode-se inferir que existe o conhecimento da propriedade matemática “a soma de dois números ímpares é par”; logo, ao somar um terceiro, não poderia dar 20 – número par. Essa frase (enunciado) tem valor lógico (por ser verdadeira) e também valor epistêmico, por afirmar que a soma sempre daria ímpar (afirmação apoiada na seguinte proposição: “a adição de dois números ímpares é par”; somando um terceiro número, também ímpar, essa soma resulta ímpar). A designação dos objetos foi feita por meio de categorização e da determinação das proposições.

Já a solução apresentada por 2-S8, classificada como algébrica, explicitou uma similaridade semântica externa – por essa razão, por expansão cognitiva –, e sua validade, do ponto de vista da argumentação matemática, está assegurada, pois o estatuto das unidades apofânticas utilizadas é verdadeiro em relação à significância referencial.

$(2x + 1) + (2y + 1) + (2z + 1) = 20$ $x, y, z \in \mathbb{Z}$
$(2x + 2y + 2z) + 3 = 20$
$2(x + y + z) = 17$
$x + y + z = 8{,}5$ 1
Como x, y e $z \in \mathbb{Z}$ então $x + y + z$ deve pertencer a $\mathbb{Z}$. Assim, por 1, não existe solução.

Essas unidades também têm valor epistêmico, garantido pela certeza das sentenças elaboradas. Essas sentenças foram criadas a partir da designação dos números ímpares, pela utilização de léxicos sistemáticos (as letras) e associativos (as sentenças que designam um número ímpar por meio de sua propriedade: 2x + 1). Essas designações entraram nas sentenças matemáticas que caracterizaram a solução apresentada para o problema. Essas sentenças foram transformadas pela substituição das sentenças iniciais por outras sentenças, tendo por referência o mesmo objeto (em se tratando das operações meta-discursivas, essas são transformações efetuadas por tratamento). Foi um tipo de expansão discursiva de natureza cognitiva e com similaridade semântica, por garantir a referência a um mesmo objeto de conhecimento. Essa expansão só foi possível em virtude do ato ilocutório, o qual permitiu ao aluno expressar seu raciocínio para encontrar a solução do problema, e ao professor analisar a validade da argumentação do ponto de vista matemático. Essa solução precisa ser compartilhada com os demais alunos da classe e com os alunos de outras classes e de diferentes graus de ensino. É o ato ilocutório sendo valorizado no processo de ensino, colocando em cena seus diversos atores.

Interessante é o fato da passagem ser feita indiretamente pelo recurso a um terceiro enunciado. Duval (1995) aponta que este enunciado estabelece uma continuidade discursiva entre os outros dois quando cumpre duas condições: ter uma *similaridade semiótica* ou *semântica* com um deles e ter um estatuto teórico e social, por aquele que o produz ou por seu destinatário. Nesse caso, temos uma similaridade externa dos enunciados. Por exemplo, os enunciados "um número é 5 unidades maior que outro" e "a diferença entre dois números é 5" podem ser substituídos por um terceiro enunciado: "x – y = 5" ou "subtraindo dois números encontramos 5", com estatutos teóricos diferentes para alunos com maior ou menor conhecimento matemático – e, por esta razão, com similaridade externa diferente.

A solução apresentada por 2-S4 explicita essa similaridade externa quando o aluno recorre a dois discursos para dizer a mesma coisa: “se eu pegar...” “nº par + nº ímpar = ímpar”. Essa continuidade semântica assegurou a validade da solução apresentada do ponto de vista da argumentação matemática.

Não existe 3 nºs ímpares que somados dê um nº par pois: 2 nºs ímpares somados = nº par
Se eu pegar esses dois primeiros números que foram somados e resultou um nº par e somar c/ o terceiro nº ímpar dará um nº ímpar.
Pois nº par + nº ímpar = nº ímpar

Os objetos de conhecimento foram designados com recurso a léxicos associativos, de forma a categorizar e determinar relações, propriedades e teoremas. Ao mesmo tempo, se prestam a interagir com o professor, de modo que o aluno possa expressar seu raciocínio para encontrar a solução do problema. Essa solução precisa ser compartilhada.

O aluno 2-F6 apresenta uma resposta pragmática, em língua natural, com similaridade semântica, mas no nível de descrição/narração, sem constituir uma argumentação retórica, por não concluir sobre o porquê da solução encontrada.

Entre 3 números ímpares, cuja soma é vinte não existe. Nem mesmo repetindo dois dos três números ou somando números diferentes, não consegui chegar ao resultado 20.

Ao comunicar seu raciocínio, o aluno só narra que não conseguiu encontrar os números, mas não se preocupa em saber o porquê. Cabe ao professor conversar com esse aluno a respeito dessa resposta, para assegurar o progresso na forma matemática de pensar. Esse quadro significa que tudo é válido quando se trata da aprendizagem dos alunos: soluções corretas, válidas, incorretas, inconsistentes, com valor epistêmico e lógico (ou não) e com valor social (por tentar encontrar uma forma de dizer sobre o que concluiu).

Interessante será observar que a solução apresentada pelo aluno 2-F11 revela a maturidade intelectual em relação à matemática – nem sempre apresentada, nem mesmo por alunos de nível de ensino mais elevado.

Impossível, porque é incalculável porque você pode tentar somar e sempre vai dar par, no que eu quero dizer o valor que falta para completar o vinte, por exemplo 7 + 7 = 14, mas para dar vinte faltam 6, ou seja é par. E outro número ímpar somado com ímpar, sendo três, cinco, sete,... vai dar resultado ímpar. Ex:

5 + 5 + 5 = 15 → ímpar	*Fica claro todo número ímpar somado por ou multiplicado em valores ímpares,*
5 + 5 = 10 → par	*resultado é número ímpar. Vice versa, com números pares a mesma coisa.*

O aluno apresenta uma solução por meio de discurso de natureza retórica, já avançando para o silogismo aristotélico. Nesse caso, importante será apontar as características da solução em se tratando de discurso. A descrição caracteriza a forma de designação, e tanto a predicação como a elocução intervêm para dizer sobre o raciocínio utilizado na obtenção de solução para o problema. As afirmações possuem valor lógico, por serem verdadeiras, mas não valor epistêmico, pois a certeza tem por apoio procedimentos empíricos. Em se tratando do grau de ensino, essa solução precisa ser compartilhada, tendo por interlocutores os demais alunos da classe e de outras classes. O raciocínio foi realizado por acumulação de informações e de exemplos: dessa forma, expandiu o discurso na forma de expansão cognitiva.

No caso do aluno 2-F13, o discurso em língua natural narrado e descrito compreendeu uma argumentação de natureza retórica, pois os números testados dois a dois, iguais ou não, implicaram em uma diferença par para atingir a soma 20 apresentada.

R: Não existe, todas as somas dos números ímpares sendo iguais ou não sempre faltará um número par para somar 20.

Essa descoberta empírica caracterizou o argumento que refutava a hipótese a ser testada, conforme solicitação do problema. Do ponto de vista de argumentação matemática, essa solução é válida, bem como os argumentos que caracterizam o valor de prova. Isso porque o enunciado tem valor lógico (é verdadeiro) e expande o discurso de forma natural.

Já o aluno 2-M2 apresentou um discurso em língua natural com expansão discursiva, sustentado por uma argumentação retórica e ao mesmo tempo cognitiva, pois se baseou em uma explicação do porquê da impossibilidade da soma ser 20.

R: Não é possível, Porque a soma de dois números ímpares o resultado é par. E o resultado de um terceiro número ímpar não é par.

O enunciado "a soma de dois números ímpares" é substituído por "o resultado é par". Esse processo exigiu o conhecimento de definições (um número ímpar é do tipo $2x + 1$) e de leis ($2x + 1 + 2y + 1 = 2 (x+y) + 2$, que somado com $2z + 1$ será igual a $2(x + y + z) + 3$, que não é par). Logo, esse enunciado tem valor lógico (é verdadeiro) e epistêmico (garantido por leis e propriedades). Importante será identificar as inferências viáveis, explicando o que está implícito, de modo a apontar a validade da argumentação matemática e o valor de prova da solução apresentada. Isso é realizado pelo ato elocutório que envolve o aluno e o professor.

A expansão discursiva de natureza cognitiva, verificada no discurso de 2-S1, avança para um raciocínio dedutivo, ao inferir que, em se tratando de números inteiros, essa adição não possibilita uma soma igual a 20 – mas, para números não inteiros ela poderia ser possível.

Sabemos que a soma de 2 números ímpares dá um número par. Já a soma de um número par com um ímpar dá um número ímpar, então com números inteiros é impossível.

Essa afirmação caracteriza um raciocínio do tipo se A então B. Nesse caso, do ponto de vista de argumentação metafórica e em relação ao valor de prova, a resposta apresentada pelo aluno é válida.

No caso do aluno 2-S5, deparamo-nos com uma expansão discursiva de natureza cognitiva com similaridade semântica e externa – isto é, aceita por uma comunidade científica pela explicitação das definições, regras e leis.

Os números ímpares são escritos na forma: 2n – 1 com n ∈Z então, teremos a soma desses 3 números na forma: (2a – 1) + (2k – 1) + (2c – 1), com a, k e c ∈Z
2a + 2k + 2c – 3 = 20
2(a + k + c) – 1 = 18 Como a, k e c são números inteiros então a soma é um número inteiro.
2 n – 1 = 18
Como 18 não é ímpar, é impossível encontrar os números necessários.

O raciocínio utilizado compreende um raciocínio dedutivo com apresentação de uma proposição ("como 18 não é ímpar é impossível..."). Também há a explicitação da utilização de terceiros enunciados (2(a + k + c) – 1 = 18 substituído por (2n – 1 = 18).

No caso de 2-S11, deparamo-nos com uma expansão discursiva natural com emprego de um silogismo aristotélico (premissa 1: "somando dois números..."; premissa 2: "somando par com..."; dedução: "portanto, nunca...").

1- *Somando dois números ímpares sempre resultará em números pares.*
2- *Somando um número par com ímpar sempre resultará um números ímpar.*
Portanto nunca com três números, que é ímpar, obterá um resultado par.

Considerações finais

Com a presente pesquisa, buscamos identificar as operações discursivas recorrentes pelos alunos na resolução de problemas matemáticos. Procuramos identificar diferenças de discurso na resolução de problemas, segundo o grau de escolaridade. Procuramos descobrir, também, se o discurso utilizado na resolução do problema matemático é válido do ponto de vista de argumentação matemática.

Avançamos com algumas análises e nos aproximamos de algumas soluções que puderam ser expostas neste texto.

As reflexões analíticas foram fundamentadas na Teoria de Representações Semióticas, segundo Raymond Duval, a qual se mostrou adequada para a elucidação de explicações acerca das diferentes formas de resolver problemas, segundo o que nos foi apresentado pelos alunos, e validá-las do ponto de vista da argumentação matemática.

O estudo apontou as possibilidades de análise das soluções apresentadas, fossem elas de ordem pragmática ou intelectual, e seu valor de prova, com o subsídio de um quadro teórico que pudesse sustentar análises de processos avaliativos, para que seja possível organizar uma prática educativa voltada para o desenvolvimento de competências complexas conforme o grau de escolaridade dos alunos.

Essas análises foram realizadas no plano do discurso, levando em consideração as diferentes funções discursivas utilizadas em uma língua. Dentre essas funções discursivas, utilizamos para as análises da produção dos alunos as funções de **expansão discursiva, referencial** e **apofântica,** as quais permitiram ao investigador a explicitação do que, no discurso, estava implícito. Essa possibilidade permitiu compreender mais profunda e compreensivamente as produções dos alunos, conforme apresentação por meio de registros discursivos.

Essas funções de expansão discursiva possibilitaram a compreensão das soluções apresentadas em relação à sua validade e ao seu valor de prova, pois uma frase ou um conjunto de frases dizem mais do que parecem dizer. Essa leitura pode ser feita pelo professor se houver a compreensão de que, por meio das operações discursivas e pelos modos de progressão do discurso, natural ou espontâneo, realizados por substituição ou por acumulação, podem ser feitas inferências tanto sobre o que está explicitado como sobre o que não está. Como essa progressão não é a mesma em uma descrição, em uma narração ou em uma explicação, é possível avaliar tanto o conteúdo do discurso como o seu estatuto em termos de validade, visto que, ao organizá-lo, o aluno utiliza unidades apofânticas que cumprem um papel capaz de estabelecer um valor epistêmico, conforme essa unidade seja uma definição, um teorema, um axioma ou uma propriedade.

Pelas formas de expansão discursiva (**expansão lexical**, **expansão formal**, **expansão natural** e **expansão cognitiva**), foi possível identificar o propósito do aluno ao utilizar uma série de frases para anunciar os passos de seu raciocínio, ou descrever os procedimentos utilizados para resolver os problemas. Essas formas de expansão foram de natureza distinta conforme o grau de escolaridade dos alunos.

As análises foram baseadas na coerência dos textos. Foram guiadas por regras que asseguraram a continuidade do propósito das sequências de frases ou das proposições assertivas utilizadas. Também se basearam em relações de similaridade entre as unidades apofânticas (**similaridades semióticas** e **semânticas** ou **similaridades internas** ou **externas**).

Com base nessas relações de similaridade, pudemos identificar expressões referenciais equivalentes, que foram empregadas nas diferentes soluções apresentadas aos problemas, provocando uma invariância referencial. Vários exemplos foram analisados no texto, apontando para o fato de que essas diferentes soluções foram acompanhadas de diferenças de sentido – as quais permitiam, por vezes, um progresso no discurso apresentado pelo aluno.

Identificamos, nos registros discursivos, a forma de expansão **formal,** quando o aluno utilizou regras de substituição embasadas exclusivamente em símbolos. Foi o caso das soluções algébricas, por exemplo: “um número ímpar é um número da forma 2x + 1”.

Outra forma de expansão discursiva utilizada na análise dos discursos foi a **expansão cognitiva,** nas soluções apresentadas somente em linguagem natural, com a utilização de um vocabulário específico para expressar definições ou demonstrações.

Igualmente, foi utilizada a **expansão natural,** nas soluções apresentadas com o emprego comum da linguagem, por meio da qual houve mobilização simultânea da rede semântica de uma língua natural e dos conhecimentos práticos do próprio meio sociocultural dos alunos que produziram esses discursos.

Também ocorreram diferentes formas de designar os objetos e de utilizar essas designações em sentenças matemáticas ou frases, com o intuito de falar mais sobre eles. Por meio da função apofântica, foi possível verificar o valor lógico ou epistêmico dos raciocínios explicitados ou dos que puderam ser inferidos.

Concluímos e defendemos que esse quadro teórico foi fundamental para as análises, o que nos possibilitou avaliar as competências exigidas para a solução de problemas, conforme o grau de escolaridade.

A análise serviu também para apontar caminhos para a organização da prática educativa, a qual deve levar em conta as produções dos alunos e as diferentes formas de interlocução entre professor e aluno e entre alunos. Desta forma, será possível o desenvolvimento dos alunos nas formas matemáticas de pensar.

A forma de expansão discursiva contribuiu para a aceitação de formas não canônicas de apresentação de soluções para problemas matemáticos, ainda que com o mesmo grau de validação e de valor de prova – sempre levando em consideração o grau de escolaridade. Os alunos devem ser, sobretudo, valorizados, pois isso contribui para a sua autoestima, evitando assim a sua exclusão da escola, provocada pelo não entendimento de que o desenvolvimento dessas competências mais complexas é gradativo e individual. Nesse contexto, deve ser respeitado o tempo de cada aluno, ao mesmo tempo em que haja investimento, por parte do professor, no desenvolvimento dessas competências.

Referências

DUVAL, R. **Sémiósis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Suisse: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Tradução de: RESTREPO, M. V. Cali: Universidade del Valle: 2004.

GRANGER, G. **Langages et épistémologie**. Paris: Klinksiek, 1979.