

Análise praxeológica da abordagem de frações em um livro didático do 4º ano do ensino fundamental

Praxeological analysis of the fractional approach in a 4th grade textbook of elementary school

EVANILSON LANDIM¹

MARIA DAS DORES DE MORAIS²

Resumo

No presente estudo é apresentada uma análise a priori das situações que tratam de problemas de frações abordados no livro didático Ápis: matemática do 4º ano do Ensino Fundamental (EF) aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). A motivação para essa investigação surgiu a partir dos encaminhamentos dados na disciplina Tópicos em Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), ministrada pela Professora Paula Baltar na UFPE. Nessa disciplina, estudamos, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual nos motivou a fazer essa análise praxeológica do conteúdo matemático proposto. Os diferentes documentos oficiais que norteiam o ensino, dentre eles, os Parâmetros Curriculares Nacionais, sugerem que no sistema educacional brasileiro esse conceito seja abordado a partir do 4º ano do EF. Como suporte à compreensão a priori das situações apresentadas no referido livro, utilizamos a praxeologia proposta por Chevallard (1996) na TAD. Os resultados confirmam a predominância do tipo de tarefa parte-todo que responde por 34 das 58 atividades abordadas na obra. Ademais, indicam também, que os diferentes significados do número fracionário não são tratados conjuntamente como propõem os documentos oficiais.

Palavras-chave: Frações. Problemas matemáticos. Teoria Antropológica do Didático.

Resumen

Este estudio presenta un análisis a priori de las situaciones que abordan los problemas de fracciones abordados en el libro de texto Ápis: matemáticas del 4º año de educación primaria aprobado por el Programa Nacional del Libro de Texto (PNLD). La motivación de esta investigación surgió de las referencias dadas en la asignatura Temas de Educación Matemática en el Programa de Posgrado en Educación Matemática y Tecnológica (EDUMATEC), impartida por la profesora Paula Baltar de la UFPE. En esta disciplina se estudió la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), lo que nos motivó a realizar este análisis praxeológica del contenido matemático propuesto. Los diferentes documentos oficiales que guían la enseñanza, entre ellos, los Parámetros Curriculares Nacionales, sugieren que en el sistema educativo brasileño este concepto es abordado desde el 4º año de la educación primaria. Para apoyar la comprensión a priori de las situaciones presentadas en este libro, utilizamos la práctica propuesta por Chevallard (1996) en TAD. Los resultados confirman el predominio del tipo de tarea parcial, que representa 34 de las 58 actividades abordadas en el trabajo. Además, también indican que los diferentes significados del número fraccionario no se tratan conjuntamente como se propone en los documentos oficiales.

¹ UPE, Brasil, evanilson.landim@upe.br

² UFPE, Brasil, dora.pe@mail.com

Palabras-clave: Fracciones. Problemas matemáticos. Teoría Antropológica de la Didáctica.

Abstract

The present study reveals a priori analysis of situations that deal with fraction's issues, addressed in the textbook Aph: 4th year Math in Elementary School (EF) approved by the National Program of Didactic Book (PNLD). The motivation for this research emerged from the referrals given in the subject Topics in Math from Graduate Program in Mathematical and Technological Education (EDUMATEC), taught by Professor Paula Baltar at UFPE. In this discipline, we studied the Anthropological Theory of Didactics (TAD), which motivated us to make this praxeological analysis of the proposed math content. The distinct official documents which guided the teaching, among them, the National Curricular Parameters, suggest that in the Brazilian educational system this concept is approached from the 4th year of EF. As a support for a priori understanding of the situations developed in the book, we applied the praxeology proposed by Chevallard (1996) in TAD. The results confirmed the predominance from a type of task named "part-whole" that is related to 34 of 58 activities addressed in the topic. In addition, they also indicated that the different meanings of the fractional number are not treated together as proposed by the official documents.

Keyword: Fractions; Mathematical problems; Anthropological Theory of Didactics

Introdução

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 15), existe uma insatisfação diante dos resultados negativos obtidos frequentemente em relação à aprendizagem matemática. Por outro lado, a constatação da importância dessa disciplina é indiscutível, apoiando-se, sobretudo no fato de que ela desempenha um papel decisivo frente aos problemas da vida cotidiana, além da sua relevância para o mundo do trabalho e para a instrução nas demais áreas curriculares. Dentre os diversos conceitos explorados na disciplina, em relação aos que os estudantes apresentam dificuldades, o ensino dos números racionais, ainda, é um desafio a ser enfrentado por professores, dada a incompreensão das crianças a respeito dos variados significados desses números, principalmente quando apresentados na forma fracionária (BERTONI, 2009).

Os diferentes documentos norteadores do ensino brasileiro propõem que o trabalho com números fracionários aconteça a partir do 4º ano do Ensino Fundamental e, deve permitir que os estudantes percebam as variadas ideias associadas a esse conceito, quais sejam: *parte-todo, medida, quociente, operador e razão*. A escola, pode contribuir de forma significativa com o desenvolvimento dessas ideias pelos estudantes ao longo da Educação Básica. Nesse contexto, é preciso levar em consideração que a elaboração do conceito de número racional pelas crianças requer uma organização que empregue experiências com diferentes significados e representações, o que, necessariamente, exige razoável espaço de tempo (BRASIL/PCN, 1998).

Diante disso, algumas pesquisas têm buscado compreender como ocorre o processo de ensino e de aprendizagem desse conceito. Nas últimas décadas (final do século XX e início do século XXI), as investigações que tratam desse tema têm indicado uma diversidade de concepções e dificuldades relacionadas a esse conceito. Dentre elas, podemos citar: Nunes e Bryant (1997), Maciel e Câmara dos Santos (2007), Bertoni (2009) e Van de Walle (2009).

Tais pesquisas têm reforçado a importância de que todos os significados dos racionais sejam tratados na sala de aula, por consequência o conceito de fração tem tido um olhar central nesses estudos. De um modo geral, os estudantes ao lidarem com frações, números decimais ou porcentagens, estão na verdade empregando conceitos próprios dos números racionais. Entretanto, do ponto de vista do ensino, tem se enfatizado sobremaneira aspectos como o modelo parte-todo ou, ainda, a forma $\frac{a}{b} \in Q$, $b \neq 0$, em que a é o numerador e b é o denominador da fração.

O fato é que tem sido destacada a importância de considerar no processo ensino-aprendizagem os variados significados dos números fracionários. Diante disso, se configura o nosso interesse em investigar como esses números vêm sendo apresentados nos livros didáticos e, como as diretrizes dispostas nos documentos oficiais têm sido incorporadas pelos autores. Nesse texto, o nosso recorte de análise considera uma obra específica aprovada pelo PNLD 2014, voltada à instrução escolar das crianças do 4º ano do Ensino Fundamental: Ápis – matemática (DANTE, 2014).

O ensino de matemática e a abordagem dos problemas de fração no Ensino Fundamental

A abordagem do conceito de fração no Ensino Fundamental, a princípio, pode parecer uma atividade simples e desenvolvida sem muitas dificuldades, pelo menos, se tomamos como referência para essa análise o emprego de procedimentos prototípicos para o ensino dessa matéria. O mesmo, no entanto, não se pode afirmar sobre o processo de aprendizagem das crianças nesse tema.

O fato é que as escolhas do professor na apresentação desse conceito, ainda, apresentam traços de uma abordagem tradicional que deixa de lado a preocupação com o processo de compreensão conceitual em detrimento de um apanhado de regras e técnicas sem nenhum significado para a criança. É muito comum, os estudantes, perceberem a fração como uma combinação de dois números - *numerador e denominador* – e não como um número que

exprime a relação entre a parte e o todo em diferentes contextos e com significados variados.

Desenhar figuras geométricas, dividi-las em partes de mesmo tamanho, pintar algumas dessas partes e depois escrever a relação entre o número de partes pintadas e a quantidade total de partes, não tem sido suficiente para expressar o que está implícito nesse processo tão trivial na escola, que é o conceito de número fracionário, que deve ser compreendido a partir da insuficiência dos números naturais na resolução de problemas cotidianos. À primeira vista, a dificuldade das crianças pode estar relacionada com o emprego de estratégias que valorizam a memorização e a técnica sem que sejam encorajadas à análise e a reflexão frente as atividades propostas. “Por mais que crianças aprendam os procedimentos da associação de números a figuras divididas e de regras que se diz fornecerem o resultado de operações, não há sombra de dúvida de que não estão entendendo e elaborando a construção dos números fracionários” (BERTONI, 2009, p. 12).

A dificuldade no entendimento do número fracionário pode comprometer o progresso dos estudantes em outros campos, tais como: *números decimais, porcentagem, razão, proporção e cálculo de probabilidades*. Por outro lado, é comum que crianças alcancem algum sucesso na resolução de tarefas que envolvem números fracionários, mesmo distantes da compreensão conceitual desses números, sobretudo quando empregam procedimentos memorizados.

As primeiras atividades dirigidas as crianças na aprendizagem de frações, deve explorar a ideia de parte fracionária do todo e pode empregar modelos de área ou região, de comprimento e de conjuntos. Também, é importante que compreendam que uma fração não indica, necessariamente, o tamanho do todo ou das partes, mas exprime, a relação entre a parte e o todo (VAN DE WALLE, 2009).

Nos livros didáticos, a abordagem das frações geralmente vem desarticulada dos números naturais, o que pode dar vida a compreensão de que são objetos distintos do campo numérico (BERTONI, 2009). Ademais, muitas das atividades propostas nos livros, favorecem o entendimento da fração como uma combinação de dois números, é o caso, por exemplo, quando a criança é encorajada a contar partes pintadas de uma dada figura sem que compreenda a sua ação, conforme já mencionamos.

A propósito, como também acontece na abordagem de muitos outros conceitos, o estudo da fração requer um conjunto sofisticado de tarefas que deem conta de alcançar todos os significados implícitos nessa matéria. No caso das crianças do segundo ciclo, que

corresponde ao 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, os PCN recomendam que sejam abordadas apenas os significados parte-todo, quociente e razão (BRASIL, 1997). Diante disso, nesse texto, tratamos apenas dos sentidos indicados para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, uma vez que a obra analisada é dirigida ao 4º ano.

Os problemas que tratam do modelo parte-todo, quase sempre são os mais frequentes nos livros didáticos e abordam com muita recorrência tarefas nas quais a unidade é uma região geométrica, seja ela retangular ou circular, como por exemplo: *uma pizza grande geralmente é dividida em oito fatias, Eduarda comeu duas fatias dessa pizza, qual a fração que representa a parte da pizza que Eduarda comeu?* Por outro lado, também podem ser identificadas atividades nas quais a unidade é um conjunto discreto de elementos, como acontece nas situações que fazem referência a certa quantidade de laranjas em uma cesta de frutas, por exemplo. O fato é que os problemas do tipo parte-todo - seja a unidade contínua ou discreta - parecem relacionados de forma mais imediata a contextos que são mais familiares aos estudantes. No entanto, apesar de tarefas cotidianas serem bem vistas como ponto de partida ao processo de aprendizagem de um conceito, não se pode deixar de considerar que é papel da instrução escolar ir além do que acontece ao redor da criança, sobretudo proporcionando experiências com um amplo conjunto de situações de diferentes naturezas e que exijam condutas variadas dos estudantes (VERGNAUD, 1996).

Diferente do que acontece nos problemas do tipo parte-todo, que são mais comuns ao cotidiano dos estudantes, são as situações do tipo $\frac{a}{b}, b \neq 0$, que representam os problemas do modelo quociente. Nesse contexto, a criança é encorajada a dividir harmoniosamente duas barras de chocolates para cinco pessoas, por exemplo.

O número fracionário, também, pode exprimir uma razão entre duas grandezas, é o caso, por exemplo, quando se questiona a relação entre o número de meninas e meninos numa classe com 16 meninas e 12 meninos, que é o mesmo que dizer que na classe existem 4 meninas para cada 3 meninos. Outros significados dos números fracionários são recomendados para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

Cavalcanti e Guimarães (2008), ampliam essa discussão apresentando significados variados vinculados ao número fracionário e situam as circunstâncias que caracterizam cada modelo.

Quadro 1 – Significados do número fracionário segundo Cavalcanti e Guimarães (2008, p. 2-3)

SIGNIFICADO	DEFINIÇÃO	EXEMPLO
-------------	-----------	---------

Parte-todo	Partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$. Um procedimento de dupla contagem, das partes do todo e das partes tomadas, no geral, é o suficiente para solucionar o problema.	Uma jarra com suco foi dividida entre três copos. João bebeu um copo. Que fração representa o que João bebeu da jarra?
Quociente	A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma variável corresponde ao numerador e a outra ao denominador.	Em uma festa foram distribuídos 2 bolos para 6 crianças igualmente. Quanto cada uma vai receber?
Probabilidade	A fração representa a chance de um evento acontecer. (número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis).	Jogando uma vez um dado que fração representa a probabilidade de tirar o número 3 ou 4?
Operador multiplicativo	A fração é um valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, um multiplicador da quantidade indicada.	Numa jarra contendo 900 ml de suco Pedro bebeu $1/3$ do líquido. Quantos mililitros eles bebeu?
Número	A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida numa dada situação.	Onde posso marcar na reta numérica $1/3$?
Medida	Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta quantas vezes? Neste caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.	Tomando a reta \overline{CD} como unidade de medida, quanto mede \overline{AB} ?  Outro caso: quantos copos de $1/3$ de litro são necessários para encher um balde de 15 litros?
Razão	A fração refere-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Para fazer um suco de laranja eu misturo numa jarra 2 copos de água para 1 de concentrado. Que fração de concentrado eu tenho na jarra?

Fonte. Os autores

Diante da observação da existência dos diferentes significados das frações, é interessante ressaltar o relevante papel do professor, pois, ele é o responsável por elaborar situações favoráveis à construção e ampliação desse conceito pelos estudantes. A despeito disso, Maciel e Câmara dos Santos (2007), também chamam a atenção para a necessidade de abordar em salas de aula, situações diversificadas que permitam que o estudante atribua significado às diferentes ideias associadas ao conceito de fração.

Essa constatação reforça a importância de dirigir o nosso olhar à escola e, identificar como esse tema vem sendo trabalhado em seus diversos aspectos, desde a elaboração do planejamento pelo professor, até a realização de propostas de ensino que avaliem a aprendizagem dos estudantes, para que seja possível identificar os fatores que estão influenciando e provocando o descompasso entre as expectativas de aprendizagem das

crianças e os resultados verificados nas avaliações externas, sobretudo a respeito desses números.

Ainda, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 22), “os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória”. Por isso, nesta pesquisa, foi importante analisar o modo como o livro *Ápis: matemática do 4º Ano do EF* apresenta os conceitos matemáticos e que relações são estabelecidas entre as proposições dos documentos oficiais e as ideias relacionadas as frações, tendo como suporte a Teoria Antropológica do Didático, que é o objeto de estudo da próxima seção.

A Teoria Antropológica do Didático

A dificuldade de estabelecer um alinhamento entre o que se espera que os estudantes aprendam e o que efetivamente eles compreendem pode ser justificada a partir dos estudos que se apoiam nas ideias propostas pelo conceito de transposição didática e pela Teoria Antropológica do Didático, que analisam o caminho e as circunstâncias que levam os objetos de saber a tornarem-se objetos de ensino e de aprendizagem (CHEVALLARD, 1996).

A compreensão desse processo de transformação dos saberes (*saber a ensinar* → *saber ensinado*), passa por um sistema didático (professor, aluno, saber) e pelas correlações existentes entre os objetos de ensino. Por isso, do ponto de vista didático, muitos fenômenos estão imbricados nesse processo e concorrem para a consideração da sala de aula como uma instituição complexa.

Na TAD, a aprendizagem ocorre a partir da modificação da relação pessoal do indivíduo com o objeto institucional, quando o indivíduo se torna sujeito da instituição. Dentre as diversas abordagens propostas pela TAD, a ideia de organização praxeológica ou praxeologia, assume importante papel à compreensão da ação humana institucional.

Para Chevallard (1996), toda atividade humana pode ser descrita por meio de uma praxeologia constituída pelos elementos: *tipo de tarefa (T)*, *técnica (τ)*, *tecnologia (θ)* e *teoria (Θ)*. Se T é uma tarefa matemática, a praxeologia [T, τ , θ , Θ] pode ser chamada de organização praxeológica matemática, ou ainda, organização matemática. De modo geral, esse modelo praxeológico pode ser aplicado a todas as atividades humanas.

Chevallard (1996) organiza a atividade praxeológica em dois blocos: *saber-fazer* (práxis) e *saber* (logos). O tipo de tarefa (T) e a técnica (τ) aplicada à sua execução, constituem o

saber-fazer, componente prático da praxeologia. A tecnologia (Θ) e a teoria (Θ), constituem o discurso que valida o saber-fazer, componentes teóricos, é o saber, propriamente dito.

A abordagem do conceito de fração a partir da TAD na obra analisada

A obra dedica um capítulo à abordagem das ideias relativas ao conceito de fração. A abertura desse capítulo ocorre a partir da ilustração de sete crianças sentadas à mesa com uma pizza no centro dividida aparentemente em sete partes iguais. No rodapé da página são apresentadas algumas questões, quais sejam:

- ✓ *O que as crianças estão fazendo?*
- ✓ *Em quantas partes iguais a pizza está dividida?*
- ✓ *Se dividirmos uma pizza em duas partes iguais, como podemos chamar essas partes?*

A expectativa do autor é encorajar em classe, uma discussão que permita trazer à tona o que as crianças já conhecem sobre esse conceito, dado que de acordo com os PCN (BRASIL, 1997), situações relacionadas com a ideia de fração devem ser apresentadas desde o 4º ano do Ensino Fundamental. Ademais, é próprio de muitas atividades cotidianas o enfrentamento de problemas que exigem, ainda que implicitamente, o emprego de saberes desse campo.

Na obra analisada, foram identificadas 58 tarefas relativas à instrução das crianças no conceito de fração. A maior parte dessas atividades trazem à tona situações do tipo de tarefa parte-todo; mais especificamente, 34 das 58 questões abordadas na obra, foram categorizadas como próprias desse modelo.

As questões do tipo parte-todo, exploraram competências diversas, quer seja com situações nas quais a unidade é uma região geométrica ou, considerando um conjunto de elementos discretos como sendo a unidade. Ademais, também foram empregadas 3 tarefas vinculadas a representação fracionária em segmento de reta, onde os estudantes foram encorajados a considerarem a unidade como a distância entre uma extremidade e outra do segmento. No modelo parte-todo, quase sempre, a técnica empregada pode ser descrita da seguinte forma: *observa-se em quantas partes o todo foi dividido e toma o número de partes indicado na descrição do item*, ou ainda, nos termos de Cavalcanti e Guimarães (2008), divide-se o todo em n partes iguais, de modo que cada parte possa ser representada por $1/n$. Geralmente, um procedimento de dupla contagem, das partes do

todo e das partes tomadas, é o bastante para solucionar o problema. A tecnologia associada a essa técnica é o discurso de que se a unidade tem n partes ou elementos, uma fração desse conjunto com m partes pode ser escrita na forma $\frac{m}{n}, n \neq 0$. A teoria vinculada a essa organização matemática é o próprio conjunto dos números racionais.

O número fracionário como operador, foi identificado em 24 dos itens tratados no capítulo. Nesse tipo de tarefa, a técnica empregada anima a criança a *determinar a parte da unidade que corresponde ao número fracionário*, por exemplo, dado um estojo com 24 lápis de cor, determinar o número de lápis de cor que equivale a $\frac{2}{3}$ desse conjunto. A tecnologia aqui parece vinculada ao conceito de fração de uma quantidade ou fração de uma figura, a depender da natureza da unidade, seja ela, um conjunto discreto de elementos ou uma figura geométrica. Esses procedimentos e saberes, também, estão embasados no campo teórico dos números racionais.

Já em relação aos tipos de situação quociente e razão, não foram identificadas nenhuma tarefa voltada a essas ideias, pelo menos, não na forma como compreendemos as atividades vinculadas a esses significados, o que, inclusive, está de acordo ao entendimento de Cavalcanti e Guimarães (2008). Por outro lado, um aspecto considerado relevante no decorrer da obra foi a preocupação do autor de encorajar as crianças a estimarem, ainda que, em uma situação apenas, o número que melhor se aproxima das frações dadas. Nesse caso, foi tomada como referência a metade da unidade e, a instrução, recomendava que o estudante estimasse cada resultado como sendo menor que a metade, igual a metade ou maior que a metade.

Finalmente, há indicativos de uma preocupação prematura do autor com uma formalização dos termos relacionados à instrução do conceito de fração: unidade, inteiro, numerador e denominador. Por se tratar de uma abordagem dirigida a crianças do 4º ano do Ensino Fundamental, entendemos que essa preocupação parece de certa maneira precoce, ainda mais, por ser exposta logo nas primeiras páginas do capítulo. Nessa etapa, é esperado que a criança tenha a oportunidade de “experimentar” e construir os conceitos matemáticos da forma mais intuitiva possível. A preocupação com o progresso do estudante deve tomar como ponto de partida à sua compreensão processual a despeito do mesmo, dado que, nessa etapa escolar, o rigor não deve desempenhar um papel tão relevante.

Considerações Finais

Neste estudo procuramos responder à questão: *qual a natureza dos problemas relativos ao conceito de número fracionário em um livro didáticos do 4º ano do Ensino Fundamental?* Para tal, analisamos sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático uma obra aprovada pelo PNLD 2014: Ápis – matemática.

Após essa análise, identificamos que dentre as 58 tarefas envolvendo números fracionários, 34 delas são do tipo parte-todo, e, reservadas, quase sempre ao emprego de uma mesma técnica, qual seja: *observa-se em quantas partes o todo foi dividido e toma o número de partes indicado na descrição do item*. Nesse cenário, o tipo de tarefa parte-todo e a técnica de dupla contagem – número de partes do todo e número de partes tomadas – compõem o bloco saber-fazer, à medida que o discurso que valida essa técnica com o campo teórico pertinente a mesma, representam, nos termos de Chevallard (1996), o saber.

As outras 24 tarefas foram consideradas como do tipo operador, cuja técnica encoraja as crianças a determinarem a parte da unidade que equivale ao número fracionário apresentado, isto é, a fração é um multiplicador da quantidade indicada (CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2008). Os conceitos de fração de uma quantidade ou de fração de uma figura e o conjunto dos números racionais constituem, nesse caso, o bloco saber (tecnologia e teoria).

Diferente das recomendações dos PCN (BRASIL, 1998) não foram identificadas tarefas do tipo razão na obra analisada. É possível que o autor tenha reservado para a etapa seguinte a abordagem de outros significados do conceito de fração, apesar das orientações oficiais de que os diferentes sentidos desse tema sejam tratados da forma mais integrada possível.

A partir deste estudo, outras questões vêm à tona, o que pode permitir a expansão dessa investigação, sobretudo no sentido de ampliá-la para outras obras e etapas da instrução escolar. Também, se julga pertinente analisar como a aprendizagem dos números fracionários tem sido abordada na formação inicial e continuada dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e, como esses saberes circulam em diferentes instituições: processos de formação dos professores, livros didáticos e análise do desempenho das crianças em situação nas tarefas que tratam do número fracionário.

Referências

BERTONI, N. E. **Pedagogia: Educação e Linguagem matemática IV, frações e número fracionários**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009. 95 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

CAVALCANTI, E. M. S.; GUIMARÃES, G. L. Os significados de fração em livros didáticos das séries iniciais. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. **Anais 2º SIPEMAT**. Recife: Sipemat, 2008.

CHEVALLARD, Y. Conceitos fundamentais da didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 115-153.

DANTE, L. R. **Ápis: matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

MACIEL, A.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Analisando o rendimento de alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em atividades envolvendo frações e idéias associadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 20, n. 28, p.163-177, 2007.

NUNES, T. N.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p. Tradução de Paulo Henrique Colonese.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.