

Talleres (oficinas): diálogo entre dos teorías

Workshops: dialogue between two theories

MARÍA TRIGUEROS¹

Resumen

En este artículo se describe el trabajo desarrollado en los talleres correspondientes al Diálogo entre dos teorías. Se intenta en la presentación dar al lector una idea de lo tratado en cada una de las sesiones así como presentar las actividades de discusión y trabajo en pequeños grupos o entre la ponente y los participantes como un grupo.

Palabras clave: Teoría APOE; Teoría antropológica de lo didáctico; diálogo entre teorías; álgebra lineal; transformación matricial.

Resumo

Este artigo descreve o trabalho desenvolvido nas oficinas correspondentes ao Diálogo entre duas teorias. A apresentação tenta dar ao leitor uma ideia do que é discutido em cada uma das sessões, bem como apresentar atividades de discussão e trabalho em pequenos grupos ou entre o orador e os participantes como um grupo.

Palavras-chave: Teoria da APOE; Teoria antropológica da didática; diálogo entre teorias; álgebra linear; transformação matricial.

Résumé

Cet article décrit le travail développé dans les ateliers correspondant au cours Dialogue entre deux théories. La présentation tente de donner au lecteur une idée de ce qui est discuté dans chacune des sessions ainsi que des activités de discussion et de travail actuelles en petits groupes ou entre l'orateur et les participants en tant que groupe.

Mots-clés : APOE Theory ; Théorie anthropologique du didactique ; Dialogue entre les théories ; algèbre linéaire ; transformation matricielle.

Abstract

This article describes the work developed in the workshops corresponding to the Dialogue between two theories. The presentation attempts to give the reader an idea of what is discussed in each of the sessions as well as present discussion and work activities in small groups or between the speaker and participants as a group.

Keywords: APOE Theory; Anthropological theory of didactics; dialogue between theories; linear algebra; matrix transformation.

Introducción

El trabajo desarrollado en los tres talleres se organizó tomando en consideración que la conferencia plenaria se llevaría a cabo después de que pasaran dos talleres. Además, después del primer encuentro con los participantes quedó claro que todos ellos conocían

¹ Departamento de Matemáticas - Instituto Tecnológico Autónomo de México - mtrigueros@gmail.com

la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y no habían estudiado la teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE). Dado que un conocimiento de las dos teorías era necesario para poder comprender el diálogo entre las teorías se decidió reorganizar los talleres y analizar los objetivos, la estructura y el tipo de tareas que aborda cada una de las teorías TAD y APOE en la primera sesión, trabajar posteriormente en las ventajas y desventajas de utilizar dos o más teorías conjuntamente en una investigación y comparar los resultados obtenidos con la forma en que los autores del artículo del diálogo entre dos teorías habían considerado. En la tercera sesión, tomando en consideración la sugerencia de los participantes, se decidió retomar una parte práctica del diálogo entre las teorías antes mencionadas y analizar actividades en términos de una descomposición genética relacionada con el ejemplo planteado en la conferencia plenaria y considerar con qué momento de estudio del ciclo ACE podría relacionarse cuando se utilizara en el aula.

Sesión 1: Comparación de las teorías en diálogo

Después de una breve revisión conjunta del tipo de situaciones que dieron lugar al surgimiento de cada una de las teorías, su objetivo y el nivel de análisis considerado en cada una de ellas, se discutieron los elementos teóricos estructurales de cada una de ellas, sus elementos metodológicos, el tipo de problema que aborda cada una de ellas y la forma en la que se teoriza la modelización (Trigueros et., al. 2011).

Una vez hecho un primer análisis de la primera teoría se procedió a llevar a cabo una actividad de síntesis en la que se trabajó en pequeños grupos en responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipo de fenómenos didácticos pueden analizarse con la TAD?
- ¿Qué limitaciones tiene esta teoría?
- ¿Qué se necesitaría hacer para que la TAD pudiera complementarse con una teoría cognitiva como APOE o para hacer posible establecer un diálogo entre ellas?
- ¿Qué factores se deberían tomar en cuenta para ello?

De igual manera, una vez que se presentó la teoría APOE se llevó a cabo una actividad en la que la discusión se guio por la respuesta a las preguntas:

- ¿Qué elementos de la teoría APOE podrían compararse o contrastarse con qué elementos de la TAD para hacerlas compatibles?
- ¿Hay diferencias en las teorías que las pueden hacer incompatibles?

Y al final se pidió resumir en una frase la respuesta a cada una de las preguntas.

La discusión fue muy interesante. En ella surgieron algunas dudas sobre la teoría APOE que fueron respondidas, en parte, por los mismos participantes. Si bien los participantes sabían, por el título del taller y por el título de la conferencia que se había ya llevado a cabo un diálogo entre las dos teorías presentadas, manifestaron que les parecía difícil encontrar una forma de utilizarlas conjuntamente. Durante la discusión surgieron las siguientes cuestiones: la relación del objeto matemático con las instituciones, por ejemplo, con el análisis de textos o el trabajo en sala de aula; una diferencia fundamental entre la TAD y la teoría APOE es que la TAD no trabaja con conceptos matemático y otra radica en que la TAD no se relaciona con los obstáculos epistemológicos. Se discutieron las posibilidades de complementar una teoría cognitiva con la TAD y si bien la mayoría de los participantes opinaron acerca de las dificultades que se encontraría al tratar de hacerlo, se señaló la existencia de una investigación que relaciona la TAD con la cognición situada y que en el mismo LADIMA II habría una presentación acerca de ese trabajo.

Segunda sesión: Uso de distintas teorías en una misma investigación

El segundo taller se inició revisando las ideas de la sesión anterior y centrando la atención sobre el hecho de que muchas investigaciones en educación matemática toman elementos de varias teorías simultáneamente dentro de su marco teórico. El eje de la discusión fue la pregunta ¿Qué tan válido es hacer esto desde el punto de vista teórico y metodológico? Después de una breve discusión en la que hubo posiciones encontradas se inició una breve presentación acerca del diálogo entre dos teorías llevado a cabo entre la teoría APOE y la TAD haciendo énfasis en que en ese diálogo se hizo una reflexión profunda sobre ello y que, si bien no se debía pensar que lo que se concluyó en esa investigación es la última palabra al respecto, quedaba claro que había que hacer una reflexión seria al respecto para poner en claro los problemas que se podrían generar antes de tomar una decisión que podría conducir a problemas teóricos y metodológicos graves.

Se presentaron las estructuras a considerar en el diálogo y las relaciones básicas entre ellas que se usan consistentemente para determinar los compromisos ontológicos de cada una de las teorías; sus normas metodológicas en relación con el tipo y extensión de los datos a considerar, el tipo de respuestas admisibles y la unidad de análisis. Se hizo énfasis en que esta última origina limitaciones voluntarias en el tipo de problemas y en el tipo de respuestas “admisibles” en una teoría, por una parte y, por otra, impone coherencia entre

los compromisos y las normas de la misma. Se explicitaron las bondades de un análisis cuidadoso de las teorías a dialogar y se explicó la propuesta de considerar a las teorías como praxeologías de investigación.

Posteriormente se planteó la pregunta central en la reflexión sobre la posibilidad de un diálogo entre dos teorías: ¿Cómo los principios básicos de una de las teorías pueden ser reinterpretados para desarrollar la lógica interna de la otra y viceversa, sin violentar su lógica interna? y cómo la respuesta a esta pregunta planteaba tres modalidades de diálogo: comenzando desde la componente teórica de la praxeología de investigación; comenzando desde sus componentes técnica y tecnológica, y comenzando desde el problema de investigación, dado que cada uno de ellos permite encontrar aquellos elementos de cada teoría que son susceptibles de reformulación sin violentar la lógica interna de las teorías. Se concluyó de esta presentación que antes de poner juntos en un marco teórico elementos de dos teorías distintas es necesario:

- Hacer un análisis de cada una de ellas en los términos descritos.
- Establecer en qué forma se podrían reinterpretar los principios teóricos de cada una de ellas para hacerlos compatibles teóricamente.
- Analizar las diferencias metodológicas para encontrar una metodología coherente con los nuevos principios teóricos que permita una interpretación de consistente de los resultados
- Replantear o reformular los problemas.

Se subrayó que la integración de las estructuras teóricas de dos praxeologías de investigación puede conducir a dificultades dado que las nociones construidas dentro de una de ellas tienen significados distintos en la otra, pero que, en ocasiones únicamente se considera la componente teórica de cada praxeología de investigación y, en ese caso, el riesgo que se corre es dejar de lado las otras componentes que son también importantes. Se concluyó que cuestionar cómo los principios básicos de cada praxeología de investigación pueden ser reinterpretados para desarrollar la lógica interna de la otra, sin violentar la lógica interna de ambas, es una forma conveniente de llevar a cabo un diálogo apropiado.

Para entrar más de lleno a la discusión del posible diálogo entre la teoría APOE y la TAD se plantearon las preguntas siguientes para que se discutieran en pequeños grupos:

- ¿Qué principios básicos de estas dos teorías son compatibles?
- Las dos teorías parten de posturas epistemológicas ¿Son estas posturas iguales? Si no ¿En qué difieren?

- Ambas teorías parten de un análisis a priori ¿Hay algún paralelismo entre ellos?

Después de un tiempo de discusión en los grupos, se organizó una discusión con todos los participantes en el que se llegó a organizar y complementar las respuestas propuestas y a compararlas con las obtenidas por los autores del estudio del diálogo entre las teorías para llegar a la conclusión de que ambas teorías parten de una postura epistemológica, y aunque ésta es diferente en cada una de ellas, ambas construyen un modelo a priori para la investigación y la enseñanza y hay un paralelismo entre estos modelos: la descomposición genética de APOE pretende modelar las construcciones necesarias para aprender un concepto, mientras que el modelo epistemológico de referencia se basa en el análisis y diseño de organizaciones didácticas en una institución. Ambos modelos son relativos y provisionales situados en distintos niveles de análisis. Se presentaron a continuación las posibles reformulaciones que surgieron del análisis de las praxeologías de investigación partiendo de la componente teórica.

Después de esta presentación se organizó una nueva discusión en pequeños grupos para responder las preguntas que guiaron en el estudio del diálogo a partir de la componente técnico- tecnológica de las teorías:

- ¿Cómo se podrían reformular las técnicas de TAD utilizando las estructuras de APOE?
- ¿Podría el esquema de un estudiante genérico de una institución reflejarse en su práctica matemática?
- ¿Qué información podría obtenerse si se considerara la DG de un concepto o tema matemático como relativa a una institución que no se obtendría de otra manera?
- ¿Cómo se podría utilizar la organización didáctica en la institución cuando se hace una planificación con la teoría APOE?

Estas preguntas resultaron difíciles para los participantes pues requieren de un conocimiento más profundo de las teorías, en particular de la teoría APOE, pero a pesar de ello surgieron propuestas interesantes que se compararon con las propuestas por los autores del diálogo entre estas teorías.

Finalmente, comentando respecto al diálogo comenzando desde los problemas de investigación que dos teorías se pueden usar complementariamente cuando el problema a tratar demande precisiones que han sido tratadas en la otra teoría, pero que para evitar problemas de consistencia teórica es necesario hacer una reinterpretación de una teoría en términos de la otra y que un diálogo en los términos propuestos por la investigación discutida en el taller podría beneficiar a ambas teorías.

Para terminar el segundo taller se planteó a los participantes la siguiente actividad en la que es importante notar que lo que se pretende es la modificación de la pregunta en términos de la otra teoría y no la respuesta a la pregunta en sí:

Elegir una de las siguientes opciones propuestas para discutir y responder:

1) Tomar la pregunta de investigación de APOE: ¿Cómo se construyen las relaciones entre los conceptos que intervienen en un problema de optimización de funciones de variable real?

¿Qué modificación se tendría que hacer para formularla en términos de la TAD?

2) Tomar la pregunta de investigación de TAD: ¿Es la organización matemática que se presenta en un libro de texto completa?

¿Qué modificación se tendría que hacer para formularla en APOE?

Se cerró la sesión comentando las respuestas a estas preguntas, formulando un resumen de las ideas importantes presentadas en la misma y mostrando un ejemplo de reformulación de las preguntas específicas de una investigación respecto a las funciones de dos variables y del uso de algunos de los resultados del uso de las herramientas que emergieron del diálogo entre la teoría APOE y la TAD.

Tercera sesión: Regreso al diálogo entre las teorías APOE y TAD desde la práctica

Se inició la tercera sesión del taller revisando y discutiendo lo que se hizo en las sesiones anteriores y proponiendo como agenda de trabajo aplicar una parte de lo discutido en las sesiones anteriores. Los participantes mostraron particular interés por profundizar en cómo se diseña y cómo se usa una descomposición genética. Se convino en proponer una actividad matemática específica, analizarla en términos de la descomposición genética y discutir con qué momento de estudio se podría hacer corresponder dicha actividad si se utilizara en la sala de aula. Se propuso además discutir el potencial de la descomposición genética (Vázquez, 2017) para detectar fenómenos que serían difíciles de detectar sin un modelo como el propuesto.

Se mostró una descomposición genética propuesta para la transformación matricial para discutirse con todo el grupo:

- El Proceso conjunto y el Proceso vector, construidos anteriormente, se coordinan para construir un conjunto de vectores como Proceso, de modo que el estudiante pueda

reconocer posteriormente al conjunto de vectores como el dato de entrada de una transformación.

- Se coordina una construcción Proceso de conjunto de vectores con el Proceso función (en el sentido de regla que produce un dato de salida a partir de un dato de entrada), construido anteriormente por los estudiantes, lo que permite la asimilación de una función vectorial T al Esquema de función de una variable real, $f: R \rightarrow R$ específico, obteniendo así vectores que están en R^n para algún n específico. Estas acciones se interiorizan en un Proceso, en el que, sin hacer los cálculos directos, el alumno puede saber que un vector de n entradas se transforma bajo la función en un vector de m entradas.
- El Proceso transformación T se coordina con el Proceso conjunto de vectores en un nuevo Proceso que permite al alumno considerar el conjunto dominio y el conjunto codominio de la transformación T . Este Proceso incluye el dominio R^n y el codominio R^m .
- Se coordina el Proceso transformación con el Proceso matriz en un nuevo Proceso transformación matricial o T_A , que permite identificar a transformaciones cuya regla de correspondencia es el producto de matriz por vector, como transformaciones vectoriales, es decir $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$.
- Los Procesos matriz y vector se coordinan con el Proceso T_A para relacionar el tamaño de la matriz A de $m \times n$ con la dimensión de los vectores en el dominio y en el codominio de T_A .
- El Proceso función inversa se coordina con el proceso T_A para identificar T_A^{-1} como una transformación matricial representada por una matriz $B=A^{-1}$.
- Para construir la transformación inversa (revertir el proceso de encontrar la imagen de un vector v bajo la transformación T_A) se realizan Procesos en los que, para una T_A específica y un vector $w=T_A(v)$ se encuentra v . Esto se logra coordinando los Procesos T_A y sistema de ecuaciones, en un Proceso que permite calcular, dado w las entradas de la matriz B tal que $v=Bw$.
- Estas Acciones al realizarse sobre diferentes matrices se interiorizan en un Proceso T_A^{-1} que permite interpretar que para ciertas matrices es posible calcular la imagen inversa bajo T_A de un vector y que permite preguntarse qué condiciones de la matriz A determinan la posibilidad de encontrar la imagen inversa de un vector específico.
- La coordinación del Proceso T_A^{-1} con el Proceso sistema de ecuaciones Bx resulta en un Proceso que permite determinar las condiciones que debe cumplir B para que T_A^{-1} exista.
- Al coordinarse este último con propiedades del Proceso matriz –tales como la independencia lineal de los vectores columna- se construye un Proceso por el cual es posible identificar las condiciones de invertibilidad de la matriz A .
- El Proceso T_A^{-1} se encapsula en un Objeto sobre el cual se pueden hacer Acciones como comparar diferentes T_A en términos de la existencia de T_A^{-1} para una matriz específica A .
- Las Acciones de comparación se interiorizan en un Proceso que permite considerar T_A para cualquier A y determinar si T_A^{-1} existe.

Después de discutir detalladamente la descomposición genética se trabajó en pequeños grupos en el análisis de las siguientes actividades (Vázquez, et. al., 2016) en términos de la descomposición genética:

1. vector $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ se le aplica la transformación matricial T_A con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, produciendo el vector $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$ ¿Es posible encontrar una transformación matricial que revierta el efecto de T_A
 - a. ¿Qué utilidad tendría encontrar esta nueva transformación?
 - b. Supongamos que la nueva transformación está representada con la matriz B . El efecto que se busca entonces es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$ ¿De qué tamaño debería ser B ?
 - c. ¿Cómo podría encontrarse B ?
 - d. Si denotamos por $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a la matriz que nos interesa encontrar. Si sabemos que $T_B \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ¿se puede encontrar B con esta información? ¿Cómo?
 - e. Para esta matriz B , se cuenta con una información adicional: el vector $v = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \end{pmatrix}$ se transforma bajo T_B en el vector $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, ¿Es posible determinar B con estos datos?
 - f. Si se consideran otros pares de datos (vectores y sus imágenes bajo A), ¿la matriz B sigue funcionando para revertir el efecto en todos ellos? La matriz B encontrada, ¿es única?
2. Consideren que para $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se cuenta con las siguientes dos opciones de datos. ¿Cuál elegirían para encontrar B más rápidamente?
 - Opción 1: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - Opción 2: $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

¿Qué relación hay entre los datos de entrada x y la matriz inversa de A ?
3. Considerando las conclusiones de la pregunta anterior, encuentren la inversa de la matriz A .
4. Para cada matriz encuentren la matriz inversa, cuando sea posible hacerlo. ¿Qué característica tienen las matrices para las cuales no es posible encontrar la matriz inversa?
 - a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$
 - b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
 - c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
 - d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
5. ¿Qué pueden decir de la posibilidad de existencia de la transformación matricial inversa? ¿Qué pueden decir de las condiciones para que exista la matriz inversa?
6. Analicen lo que hicieron en el caso de la matriz del inciso e) del ejercicio anterior ¿pueden representar la transformación T_A como un sistema de ecuaciones para cada caso de los vectores unitarios canónicos? Si su respuesta es afirmativa, ¿cómo la representarían?
7. Resuelvan los sistemas encontrados utilizando el método de Gauss-Jordan; recuerden que pueden resolver varios sistemas simultáneamente.
8. Comparen con lo que obtuvieron para responder el inciso e) del problema anterior ¿hay alguna relación entre la solución del sistema y la matriz B ?

9. Analizar alguna de las construcciones previstas en la descomposición genética y proponer una actividad para apoyar dicha construcción por parte de los estudiantes y considerar a qué parte de una praxeología podría pertenecer al considerar su relación con la institución.

Reflexión final

Al cabo de las tres sesiones de taller los alumnos tuvieron oportunidad de entender la teoría APOE con mayor profundidad, así como de darse cuenta de las implicaciones que el uso simultáneo de dos o más teoría implica y tomar consciencia de que es posible poner distintas teorías a dialogar y que los resultados pueden ser fructíferos siempre que se haga un análisis como el mostrado a lo largo de los talleres.

La oportunidad de profundizar en el diálogo de dos teorías muy potentes y aparentemente distantes una de otra condujo a los participantes del taller a concluir que las teorías son menos distantes de lo que parecía y que las herramientas surgidas de la reformulación de los principios de cada teoría en términos de la otra que surgen del análisis pueden resultar poderosas en el estudio de problemas formulados consistentemente en los términos del diálogo entre ellas.

Referencias

TRIGUEROS, M., BOSCH, M., Y GASCÓN, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz O., M. Artaud, A. Bronner, Y, CHEVALLARD, G. CIRADE, C. LADAGE, M. LARGUIER. *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*. Centre de Recerca Matemática, Barcelona, España, pp. 77-116. ISSN: 2014-2323 (printed edition) ISSN: 2014-2331 (electronic edition).

VÁZQUEZ, R (2017). Diseño de actividades didácticas basadas en modelación para la formación matemática de futuros ingenieros. *Tesis doctoral*. CICATA-IPN. México.

VÁZQUEZ, R., ROMO V. A, TRIGUEROS, M. ROMO V. R. (2016b). A model from signal analysis to design linear algebra activities. In Nardi Elena; Winslow Carl; Hausberger Thomas (Dir.). *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in Mathematics*, INDRUM 2016, pp. pp. 241-250, Université de Montpellier, INDRUM Montpellier, 2016 ISSN: 2496-1027.