

## Diálogo entre las teorías APOE y TAD

### Dialogue between APOE and ATD theories

---

MARÍA TRIGUEROS<sup>1</sup>

#### Resumen

*En este artículo se discute algunas consideraciones críticas acerca del uso de dos o más teorías, y se discute una forma de llevar a cabo un diálogo entre dos teorías, en este caso la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema y la teoría antropológica de lo didáctico que tome en cuenta los distintos componentes de una praxeología y, de esta manera, reformular los principios de una teoría sin violentar sus postulados básicos en términos de los elementos de otra teoría. Se presentan los resultados del diálogo de la teoría APOE con la teoría antropológica de lo didáctico consideradas como praxeologías de investigación y se ilustra su uso en el planteamiento y desarrollo de una investigación sobre un tema de álgebra lineal.*

**Palabras clave:** Teoría APOE, Teoría antropológica de lo didáctico, diálogo entre teorías, modelización, álgebra lineal.

#### Abstract

*This article discusses some critical considerations about the use of two or more theories, and discusses a way of carrying out a dialogue between two theories, in this case the theory Action, Process, Object and Scheme and the anthropological theory of didactic that takes into account the different components of a praxeology and, in this way, reformulate the principles of a theory without violating its basic postulates in terms of the elements of another theory. The results of the APOE theory dialogue with the anthropological theory of the didactic considered as research praxeology's are presented and its use in the approach and development of a research on a linear algebra theme is illustrated.*

**Keyword:** APOS theory, Didactic anthropological theory, dialogue between theories, modeling, linear algebra.

#### Resumo

*Este artigo discute algumas considerações críticas sobre o uso de duas ou mais teorias e discute uma maneira de dialogar entre duas teorias, neste caso a teoria Ação, Processo, Objeto e Esquema e a Teoria Antropológica de Didática que leva em conta os diferentes componentes de uma praxeologia e, assim, reformular os princípios de uma teoria sem violar seus postulados básicos em termos dos elementos de outra teoria. São apresentados os resultados do diálogo da teoria APOE com a Teoria Antropológica de didático consideradas praxeologias de investigação e ilustra seu uso na abordagem e desenvolvimento de uma pesquisa sobre um tema de álgebra linear.*

---

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas – ITAM - [mtrigueros@gmail.com](mailto:mtrigueros@gmail.com)

**Palavras-chave:** *Teoria APOE, Teoria antropológica do didático, diálogo entre teorias, modelização, álgebra linear.*

## **Résumé**

*Cet article traite de certaines considérations critiques sur l'utilisation de deux théories ou plus et discute une façon de dialoguer entre deux théories, dans ce cas, la théorie Action, Processus, Objet et Schème et la Théorie Anthropologique du Didactique qui prend en compte les différentes praxeologie et reformuler ainsi les principes d'une théorie sans violer ses postulats de base en termes d'éléments d'une autre théorie. Les résultats du dialogue de la théorie APOS avec la Théorie Anthropologique du Didactique, considérées comme praxéologies de investigação, illustrent son utilisation dans l'approche et le développement d'une recherche sur un thème de l'algèbre linéaire.*

**Mots-clés :** *Théorie APOS ; Théorie Anthropologique du Didactique ; Dialogue entre deux théories.*

## **Introducción**

La elección de un marco teórico es crucial en cualquier investigación científica y en particular en educación matemática. El marco teórico elegido permite la formulación del problema y las preguntas de investigación, dirige la metodología y permite llevar a cabo un análisis de los datos obtenidos objetivo y confiable. En ocasiones, sin embargo, encontramos investigaciones que toman conceptos de varias teorías y constituyen con ellos su propio marco teórico ¿Qué tan válido es hacer esto desde el punto de vista teórico y metodológico? Al llevar a cabo el diálogo entre las teorías Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE) y la antropológica de lo didáctico (TAD) se hizo una reflexión seria en torno a esta pregunta (Trigueros, Bosch & Gascón, 2011) y, si bien esa reflexión puede no ser la última palabra al respecto, en ella se ponen de manifiesto y sobre la mesa los problemas que pueden generarse al utilizar varios marcos teóricos de manera conjunta y que pueden ir desde la pérdida de la coherencia interna de la investigación hasta el encontrar resultados incompatibles e incluso contradictorios. Por ello consideramos que antes de tomar decisiones apresuradas que pueden conducir a problema teóricos y metodológicos serios es necesario reflexionar en esta cuestión. En esta conferencia se pretende reflexionar en primer término sobre lo que implica construir un diálogo entre dos teorías, los resultados que pueden obtenerse y se ejemplifica el uso de las dos teorías antes mencionadas en una investigación específica.

## **Reflexión en torno al diálogo entre dos teorías**

La historia de la Ciencia nos muestra que el diálogo entre teoría científicas rivales ha sido importante en la génesis y el desarrollo del conocimiento científico. La descripción de un diálogo exitoso entre teoría requiere la consideración de un modelo epistemológico de la actividad científica y de postular, como se hizo en la investigación antes mencionada (Trigueros, Bosch & Gascón, 2011), que cualquier cambio en una perspectiva teórica se manifiesta en la evolución simultánea de la teoría misma y de los problemas que estudia, así como que cualquier cambio en los problemas que una teoría estudia, se manifiesta en cambios en la perspectiva teórica de la misma.

Cualquier perspectiva teórica contiene compromisos ontológicos y normas metodológicas que es necesario considerar si se quiere establecer un diálogo entre teorías. Con ello nos referimos tanto a las estructuras conceptuales de cada una de ellas como a las relaciones entre dichas estructuras, al tipo de datos que es posible considerar y al tipo de respuestas que son admisibles en cada una de ellas. Distintas teorías abordan problemas desde distintas perspectivas, por ello es central considerar la unidad de análisis de cada una de ellas para utilizarlas de manera que sus compromisos y sus normas sean coherentes.

El diálogo entre las teorías requiere así de un análisis muy fino que tome en consideración tanto las componentes explícitas como la implícitas de cada teoría para así encontrar el sitio justo en el que puede establecerse un diálogo fructífero y útil entre ellas. Como es de esperarse, incluir la totalidad de una teoría en el diálogo es una tarea compleja y si se pretende usar una variedad de teorías la complejidad puede hacer el análisis un asunto difícil de superar. Para llevar a cabo este análisis en el diálogo entre la teoría APOE (Arnon, et., al. 2013) y la teoría Antropológica (Chevallard, 1992) de lo didáctico de una manera a la vez completa y ordenada nos referimos a las teorías como praxeologías de investigación (PI). Epistemológicamente, la evolución de la teoría es simultánea a la de los tipos de problemas que se tratan, es decir, la praxeología de investigación evoluciona como un todo.

## **Consideraciones sobre las teorías en diálogo**

Una vez que establecida la complejidad del diálogo entre teorías y, al mismo tiempo, la necesidad de llevarlo a cabo en la investigación, surgen una pregunta fundamental si se

desea iniciar un diálogo que evite los problemas de coherencia y consistencia entre las teorías en cuestión:

¿Cómo reinterpretar los principios básicos de una de las PI para desarrollar la lógica interna de la otra y viceversa, sin violentar su lógica interna?

La respuesta a esta pregunta puede, a primera vista, parecer imposible dada que las dos PI a dialogar pueden considerarse como “lejanas”. La teoría APOE (Arnon, et., al. 2013) está basada en la teoría de Piaget y busca comprender cómo se construye el conocimiento matemático. La TAD toma la matemática originada la institución productora del conocimiento y estudia la reconstrucción de las matemáticas para interpretar la actividad matemática escolar.

Con el fin de iniciar el diálogo consideramos en primer término las estructuras básicas de cada una de las teorías. En la TAD se consideran los fenómenos de transposición didáctica y la relatividad institucional del saber matemático como fundamentales en la problemática didáctica. Su objeto primario de estudio es la actividad matemática institucionalizada o la ecología de las organizaciones matemáticas y las organizaciones didáctica asociadas a ella.

Para lograr estos objetivos en la TAD se cuestionan y modelizan los procesos de génesis y difusión de la matemática como conocimiento generado por la sociedad. Se diseñan herramienta para analizar el papel de aquellas instituciones que condicionan el desarrollo del conocimiento en las instituciones de enseñanza y se cuestiona la forma en que se validan los procesos de producción, transmisión y difusión del saber en y entre instituciones con el fin de determinar sus potenciales y sus limitaciones y, a partir de ese análisis, proponer nuevas posibilidades (Chevallard, 1992).

Para poner en práctica la TAD se requiere explicitar un modelo epistemológico de referencia (MER) cuyo objetivo es servir de guía en el análisis de la actividad matemática en una institución. Estos modelos se describen en términos de praxeologías tanto matemáticas como didácticas. En particular en la TAD se considera que las prácticas personales están fuertemente condicionadas por el tipo de actividad o práctica que es posible llevar a cabo en una institución en relación al mismo ámbito de las matemáticas. Por su parte, la actividad matemática se considera una actividad humana institucionalizada que puede describirse en términos de praxeologías matemáticas; éstas están organizadas en dos niveles, el primero corresponde a la práctica que se realiza (praxis) y el segundo a la arte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad (logos).

En la TAD las nociones fundamentales de transposición didáctica y de praxeología didáctica organizadas como las matemáticas en los niveles de praxis, el hacer, y logoi, el saber, forman el núcleo de la teoría. Las praxeologías son modelos que permiten analizar por una parte la actividad que genera conocimiento matemático en la institución y por otra los recursos para llevar a cabo las actividades materiales y de enseñanza de manera eficiente. Las praxeologías no pueden considerarse como unidades aisladas pues al estar situadas en el contexto social es necesario considerar el nivel de determinación de las praxeologías y tomar en cuenta la codeterminación entre las organizaciones matemática y las organizaciones didácticas.

La actividad de construcción y reconstrucción institucional de praxeologías matemáticas constituye la dinámica del modelo epistemológico de referencia propuesto. Cuando se analizan diversos procesos de construcción matemática se pueden detectar aspectos invariantes que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática y se denominan momentos didácticos. Cualquier proceso de estudio de las matemáticas se puede situar en un espacio determinado por seis momentos didácticos (BOSCH & GASCÓN, 2005).

Por su parte la teoría APOE se interesa en el aprendizaje de la matemática como construcción del conocimiento en un contexto social y toma en consideración una posible organización de la didáctica de las matemáticas basada en la construcción de conceptos o temas que se interrelacionan entre sí a distintos niveles de análisis (ARNON et al., 2013). El objetivo central de esta teoría es el estudio de la forma en que la matemática se aprende y la forma en la que puede enseñarse de manera efectiva. El nivel de análisis al que esta teoría se sitúa es el de aprendizaje de un concepto o un tema. Si bien hay otros problemas que se consideran importantes, como por ejemplo la pertinencia o no de un currículo particular o el análisis de la enseñanza de algún tema, se trata de hacer un recorte de la realidad para estudiarlo con mucho detalle. Así, con esta teoría es posible modelar el paso de un nivel a otro de conocimiento respecto a algún concepto o tema de las matemáticas. Las estructuras que se utilizan para ello son la Acción o Acciones que se realizan sobre Objetos previamente construidos para transformarlos y que se percibe por el sujeto que las lleva a cabo como algo externo, algo memorizado o como un procedimiento constituido por pasos que se deben seguir. El Proceso que es el resultado del mecanismo de reflexión abstractiva sobre las Acciones que se realizan. Cuando éstas se transforman en algo que puede considerarse como interno, es decir, se han interiorizado en un Proceso y, en este caso es posible llevar a cabo el Proceso inverso. Los Procesos pueden construirse mediante el encadenamiento de varias Acciones o mediante la coordinación de distintos

Procesos en uno nuevo. La reflexión sobre un proceso conduce a la necesidad de considerarlo como una totalidad. El Proceso se encapsula en un Objeto sobre el cual es posible ejercer Acciones, por ejemplo, aquéllas que permiten encontrar o analizar sus propiedades o compararlo con otros Objetos. Un Objeto puede revertirse en el o los Procesos que le dieron origen. Un Esquema está conformado por una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros esquemas que están relacionados entre sí y que forman un marco coherente para trabajar con ciertas clases de problemas. En el proceso de construcción de conocimiento los Esquemas se modifican continuamente mediante sea mediante la construcción de relaciones entre ellos o mediante la asimilación o la acomodación en ellos de nuevas estructuras. Utilizando las estructuras teóricas se diseña un modelo explícito que describe las construcciones que los investigadores, basados en resultados de investigación, en la epistemología del concepto, en la historia de la matemática y/o en su propia experiencia, consideran necesarias para aprender un concepto o tema. Este modelo se conoce como descomposición genética y se utiliza para desarrollar instrumentos de investigación, para analizar los resultados obtenidos en ella y para desarrollar actividades de enseñanza. La descomposición genética se pone a prueba mediante investigación experimental. Si los resultados que se obtienen verifican las construcciones predichas por el modelo, la descomposición se valida, en caso contrario se refina a través de ciclos de validación hasta que se obtienen los resultados previstos o se rechaza.

La teoría APOE incluye, además de la componente de investigación, una componente didáctica. La enseñanza en término de esta teoría consiste en ciclos de: actividades elaboradas a partir de la descomposición genética y que se trabajan colaborativamente en equipos de tres o cuatro personas, discusión en clase con el grupo y el profesor para reflexionar colectivamente sobre el trabajo en las actividades y ejercicios para trabajar individual o colectivamente fuera de clase. Este ciclo, conocido como ciclo ACE constituye una aportación importante de la teoría que se considera su componente social.

### **Modalidades de diálogo entre las teorías**

En el análisis del diálogo entre teorías (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011) consideradas como PI se consideró que es necesario ponerla a dialogar comenzando por las distintas componentes de la praxeología para considerar todos los aspectos que intervienen en cada una de ellas, compararlas y determinar los posibles elementos que son susceptibles de

reformulación. Es así como pueden considerarse tres modalidades de diálogo: comenzando desde la teoría, comenzando desde las componentes técnica y tecnológica y comenzando desde el problema de investigación. Es decir, antes de poner juntos en un marco teórico elementos de dos PI diferentes es necesario establecer en qué forma podrían reinterpretarse los principios teóricos de cada una de ellas para hacerlos teóricamente compatibles; analizar cuidadosamente las diferencias metodológicas para encontrar una metodología que sea coherente con los nuevos principios teóricos de manera que permita una interpretación consistente de los resultados y replantear o reformular los problemas de tal forma que sean consistentes con los principios teóricos y la metodología reformulada.

### **Diálogo entre la teoría APOE y la TAD desde la componente teórica**

Como se mencionó anteriormente, tratar de enriquecer una PI mediante la integración de otra PI diferente puede conducir a dificultades pues las nociones construidas dentro de cada una de las PI tienen significados diferentes. Por otra parte, si únicamente se toma en consideración la componente teórica de cada PI, se dejan de lado las otras componentes que se verán necesariamente afectadas por los cambios en la componente teórica y, por último, si bien es importante y necesario contrastar y comparar los postulados teóricos de cada teoría tomando en consideración sus respectivas unidades de análisis, ello no basta debido a que las otras dos componentes están implicadas de entrada en su definición y por ello se verán también afectadas.

Para hacer posible la reinterpretación de los principios básicos de las teorías en diálogo es necesario dar un paso hacia atrás y cuestionar cómo se pueden reinterpretar los principios básicos de cada una de las teorías para desarrollar la lógica interna de la otra sin violentar su lógica interna. La respuesta a este cuestionamiento podría indicar que esto no es posible, pero si lo es, un verdadero diálogo entre las teorías puede iniciarse.

En el caso de las teorías de interés en este reporte se encuentra que tanto la teoría APOE como la TAD incluyen un análisis fino de las matemáticas escolares en su problemática. Ambas teorías cuestionan la forma en que el currículo, los textos o las escuelas describen las matemáticas a enseñar y proponen nuevas alternativas, aunque el para qué se hace el análisis, así como la forma de llevarlo a cabo puede diferir. Estas dos teorías tienen distintas posturas epistemológicas.

Como se mencionó anteriormente la teoría APOE estudia las construcciones que se requieren para construir los conceptos matemáticos y las posibles restricciones en el

aprendizaje del currículo escolar, mientras que la TAD estudia la condiciones que hacen posible o que restringen la emergencia, el desarrollo y la difusión de las praxeologías matemáticas en las instituciones. Los modelos epistemológicos de cada una de estas teorías también son distintos: la descomposición genética constituye un modelo a priori de construcción del conocimiento y de enseñanza del mismo mientras que el modelo epistemológico de referencia se basa en el análisis y en el diseño de organizaciones didácticas en una institución dada. A pesar de ello, se encuentra un paralelismo entre la descomposición genética y el modelo epistemológico de referencia como modelos relativos y provisionales situados en distintos niveles de explicación. La TAD se sitúa en el nivel institucional de la construcción del conocimiento, mientras que la teoría APOE se sitúa en el nivel personal de dicha construcción, aunque podría considerarse que el estudiante al que hace referencia esta teoría es en realidad un “estudiante genérico” en una institución. Por otra parte, la TAD subraya la preeminencia explicativa de la relación institucional a los objetos matemáticos mientras que en la teoría APOE se enfatiza la relación dialéctica entre el sujeto que aprende y el objeto de conocimiento, aunque la teoría APOE incluye una componente institucional, el ciclo ACE y la TAD considera la posición del sujeto al considerar que su actividad está condicionada por las prácticas institucionales.

De esta primera comparación aparecen las primeras posibilidades de reformulación. Es posible asimilar al “alumno genético de la institución” y al “sujeto en posición de alumno de la institución” en la teoría APOE. También es posible considerar descomposiciones genéticas relativas a la institución y así establecer una posible relación entre la descomposición genética y el modelo epistemológico de referencia. Se observa de esta manera que el nivel institucional está presente en ambas teorías y que no están tan alejadas como pareciera en un primer acercamiento, ya que ambas parten de una posición epistemológica y toman la matemática como punto de partida.

### **Diálogo entre la teoría APOE y la TAD desde la componente técnico- tecnológica**

En una praxeología las técnicas se describen, se justifican, se interpretan y se generan a partir de los resultados tecnológicos formulados por cada PI. Es a partir de ellos que se proponen las metodologías específicas de cada una de ellas. Los resultados que se obtienen de la aplicación de dichas metodologías dan lugar, en general, a lo que se conoce en la disciplina científica como leyes, fenómenos o regularidades. Para iniciar un diálogo desde la componente técnico- tecnológica se parte de comparar y contrastar los resultados



de las PI en consideración y determinar si es posible reinterpretar las estructuras de una PI en términos de la otra.

Un muy minucioso análisis de los resultados entre la Teoría APOE y la TAD en los términos mencionados anteriormente, en el diálogo entre estas dos PI condujo a las siguientes reinterpretaciones de cada una de las teorías:

### ***Reinterpretación de las estructuras de la TAD en términos de la de la teoría APOE***

#### *Desarrollo institucional de las técnicas de la TAD.*

Se considera una *técnica Acción* en una institución a una sucesión de acciones arbitrarias o a una técnica rígida o aplicada a actividades aisladas pre- establecidas.

Una *técnica Proceso* en una institución consiste en una técnica interpretada y justificada mediante un discurso tecnológico pertinente; este tipo de técnica es flexible y se puede articular con otras técnicas.

Una *técnica Objeto* en una institución es aquella que se describe como un objeto de estudio en sí misma en la institución.

#### *Desarrollo institucional del Esquema*

Es posible considerar que un Esquema del estudiante genérico se manifiesta a través de su práctica matemática y que evoluciona a través de la misma. Esta práctica se puede describir en términos de una praxeología del estudiante genérico en una institución. Así, los niveles de evolución del Esquema que propone la teoría APOE, Intra-, Inter- y Trans-, se pueden relacionar con la amplitud de las praxeologías que describen la práctica matemática asociada a los niveles de desarrollo de una praxeología en una institución particular, de manera que podría hablarse de Praxeología Intra-, Praxeología Inter- y Praxeología Trans-

### ***Reinterpretación de las estructuras de la Teoría APOE en términos de la de la TAD***

#### *Relatividad institucional de la Descomposición Genética*

La descomposición genética en la teoría APOE no tiene un carácter universal, no solamente no se pretende que sea única sino además, considerando los resultados de la TAD, es posible considerar que es posible desarrollar y utilizar una descomposición genética de un concepto o tema matemático en una institución para obtener información sobre la viabilidad de la misma en una institución dada; para describir las construcciones del estudiante genérico en distintos niveles educativos o en distintas instituciones; para

comparar las construcciones de estudiantes genéricos del mismo nivel educativo con la misma descomposición genética y relacionar las construcciones con las restricciones institucionales.

#### *Los momentos de estudio del ciclo ACE*

La descripción de la organización didáctica en términos de los momentos didácticos de la TAD puede reinterpretarse para complementar el punto de vista de la teoría APOE pues se encuentra que son útiles en el diseño de las actividades desarrolladas para el ciclo de enseñanza y para la puesta en práctica de dicho ciclo en una institución determinada.

En particular, los momentos de estudio del ciclo ACE en una institución son útiles para analizar las actividades en términos de las construcciones deseadas y de su papel en el proceso de estudio; asimismo permiten determinar el balance de los momentos al elaborar y revisar las actividades diseñadas para el ciclo ACE y prever y validar su viabilidad institucional; analizar la discusión en clase y elegir o elaborar los ejercicios a incluir.

### **Diálogo desde los problemas de investigación**

Los problemas que investiga una PI, como se ha mencionado desde el inicio, no pueden estudiarse desde la perspectiva de otra PI dado que los hechos empíricos no son independientes de las praxeologías de investigación dado que se construyen dentro de ellas. Sin embargo, es posible reinterpretar los problemas específicos de una PI dada con las herramientas que proporciona la otra PI dando un paso hacia atrás. Este proceso conduce a la construcción de un nuevo problema que puede ser estudiado desde la perspectiva de esta otra teoría.

La reformulación del problema de investigación es indispensable y no es posible hacerlo en general. Para lograr una reformulación adecuada para usar complementariamente una teoría con otra u otras cuando la investigación del problema demande precisiones que pueden ser tratadas con otra teoría es necesario hacer una reinterpretación de una teoría en términos de la otra y de esta manera el diálogo entre teorías puede beneficiar a ambas praxeologías de investigación.

En resumen, podemos concluir que el establecer un verdadero diálogo entre dos teorías es una tarea compleja. Requiere en primer término de tener una idea clara de la unidad de análisis de cada una de ellas; explicitar sus hipótesis; establecer un diálogo desde cada una de las componentes de la teoría considerada como praxeología de investigación y reinterpretar o modificar el o los problemas de investigación a considerar.

## Un ejemplo: Una investigación en el contexto del álgebra lineal

Con el objetivo de ilustrar la aplicación de los resultados del diálogo entre la teoría APOE y la TAD se muestra, a continuación, un ejemplo de investigación utilizando ambas teorías mediante el uso de los resultados del diálogo entre las teorías (Vázquez, et al., 2015; Vázquez, et al., 2016a; Vázquez et al., 2016b; Vázquez, 2017). Esta investigación se llevó a cabo en una institución universitaria situada en la Ciudad de México en el contexto de un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de segundo semestre del primer año de estudio inscritos en las carreras de Ingeniería en telecomunicaciones y en Ingeniería en computación.

En primer término, se planeó un modelo epistemológico (MER) de referencia utilizando la modelación matemática y partiendo de un problema real sobre el uso de la tecnología para obtener información útil desde la información proporcionada por un encefalograma. Con el objeto de plantear el MER se analizó el problema de referencia y se llevó a cabo un proceso de transposición didáctica para transformarlo en un problema que pudiera ser utilizado en la institución (Vázquez et al., 2016). Se consideró para ello la praxeología de la separación ciega de señales considerando, en particular, la hipótesis de la independencia lineal de las señales que esta praxeología incluye y se consideró el problema como un problema en el que se presenta una transformación matricial en la forma  $As = x$  en la que  $A$  es la matriz de mezcla,  $s$  son los datos de la fuente del encefalograma, es decir, la información cerebral y  $x$  son los datos que se obtienen del encefalograma. Es importante destacar que tanto  $s$  como  $x$  son desconocidos. En términos matemáticos este problema corresponde a una transformación  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de la forma  $T(x) = Ax$  tal que si  $T(s) = x$  entonces  $s = T^{-1}(x)$ , es decir  $s = A^{-1}(x)$  si la matriz  $A$  es no singular. Surgen de aquí las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las matemáticas a enseñar en un primer curso de Álgebra Lineal para ingeniería que aparecen en esta técnica?

¿Cómo se puede construir una estrategia didáctica para enseñar esas matemáticas a los estudiantes de ingeniería?

Para responder a la primera pregunta se requiere establecer qué tipo de funciones se considerarán como señales, es decir, decidir si se considerarán funciones discretas o continuas para las ondas registradas que satisfacen el principio de superposición, cuando con lo que se cuenta es un muestreo de los datos reales, así como tomar en cuenta que la hipótesis de independencia lineal de las señales se traduce matemáticamente en este caso en un mapeo lineal.

Es importante destacar que, si bien el problema real elegido es un problema de mezcla de señales específico, el problema matemático tiene una gran variedad de aplicaciones a distintos campos de la física y la ingeniería, incluyendo los algoritmos SCS (separación ciega de señales) y la computación que pueden extenderse a otros cursos, como el de estadística, el de procesamientos de señales y el de álgebra lineal avanzada.

La respuesta a la segunda pregunta requiere de la toma de algunas decisiones. En este caso se decidió que las cuestiones a desarrollar en el curso antes mencionado debían ser aquellas que permitieran la construcción de una teoría adecuada y la experimentación sobre un sistema a elegir con el fin de construir una praxeología articulada con el modelo que pudiera describir el sistema y las matemáticas asociadas a él. Así, se decidió elaborar un problema que llamamos problema de espías como un modelo de señales: En una

habitación se reunirá un grupo de personas importantes para tomar decisiones. Nos interesa saber qué discuten y qué decisiones se toman y para ello instalamos micrófonos en distintos lugares en la habitación y escuchamos la conversación en otra habitación. El problema que tenemos es que no sabemos dónde se sentará cada persona y que las voces nos llegan mezcladas. ¿Cómo podríamos identificar qué dice cada persona a partir de la señal que recibimos como espías?

Otra decisión tomada, que se encuentra en relación con la técnica de separación ciega de señales es la de función y la de linealidad, que se traducen en el uso de una transformación matricial como función sin hacer énfasis en las condiciones que hacen de ella una transformación lineal. De esta manera, el problema es encontrar la transformación inversa que, por la forma en que se plantea el problema implica encontrar la matriz inversa de la matriz dada. Estos conceptos son los que, desde el punto de vista de la teoría APOE se desean enseñar. Se tomó además la decisión de introducir el problema una vez que los alumnos habían sido introducidos al producto matriz- vector pero no al producto de matrices.

Desde el punto de vista didáctico, el encuentro con el problema de modelación se llevó a cabo recreando la situación mediante el uso de teléfonos celulares y se discutió una posible representación gráfica de tonos puros y mezclas. Fueron los propios alumnos quienes eligieron, para simplificar la situación, el uso de sonidos puros que exploraron en términos de su amplitud y frecuencia utilizando Matlab. Los investigadores decidieron introducir la noción de configuración para que los alumnos exploraran con varias posiciones de las fuentes de sonido y de posición de los micrófonos, es decir, de las observaciones y con diferentes números de fuentes y observaciones. Surgió en esta exploración la importancia de considerar la distancia entre fuentes y micrófonos en la posibilidad de separar la información proveniente de las fuentes y la posibilidad de considerar un único momento en el tiempo para el análisis. De esta manera se seleccionaron las componentes del problema y los estudiantes pudieron proponer modelos matemáticos para trabajar con el problema que se discutió en la siguiente discusión grupal.

Desde el punto de vista del marco teórico APOE-TAD se diseñó una descomposición genética en el sentido de APOE pero considerándola específica a la institución y al sujeto genérico de la institución en la que se trabaja y, con base en ella y lo que se espera obtener de la modelación se elaboró un modelo epistemológico de referencia. Se esperaba, como se mencionó anteriormente, que surgiera un modelo de tipo matricial y esto sucedió en dos equipos que fueron capaces de explicar la relación de los elementos de la matriz con las distancias en la configuración dada. La discusión en grupo con el modelo permitió introducir la transformación matricial y el carácter funcional del modelo matemático y establecer con los alumnos las posibles preguntas derivadas de la pregunta inicial. Es importante subrayar que la idea de configuración se convirtió en un instrumento que se utilizó durante todo el trabajo en la situación para construir argumentos y hacer preguntas del tipo ¿Para cuál configuración (entre varias presentadas) es más fácil resolver el problema?

A partir de la descomposición genética y el modelo epistemológico de referencia asociado se diseñaron actividades para el trabajo colaborativo con el fin de construir una praxeología del estudiante de nivel Inter- Transformación. Entre ellas se incluyeron actividades específicas para construir una praxeología relacionada con la representación

matricial. Todas las actividades se evaluaron utilizando los momentos de estudio del ciclo ACE. Se diseñaron asimismo actividades con la descomposición genética para reconocer y trabajar un problema inverso, es decir, para construir una praxeología del estudiante a nivel Inter-Transformación- Matriz inversa. En particular, las actividades incluyeron el desarrollo de una técnica proceso-objeto basada en la descomposición genética desarrollada para encontrar una matriz inversa y la tecnología asociada a ella, incluyendo su existencia y sus propiedades mediante la transformación aplicada a vectores elementales. Estas actividades se evaluaron mediante los momentos de estudio del ciclo ACE.

Una vez terminada esta experiencia didáctica se llevó a cabo el análisis del trabajo en clase y algunas preguntas de evaluación incluidas en un examen mediante instrumentos diseñado con el marco teórico APOE-TAD. Los resultados indicaron que los mostraron claridad en el objetivo y uso de la técnica de separación de señales y de su relación con la matemática a emplear. Además, se encontró que la discusión entre los alumnos fue rica en argumentos sobre las relaciones entre la transformación matricial y el producto matriz-vector y que los alumnos fueron capaces de desarrollar por ellos mismos la propiedad de linealidad de la transformación a través de la comparación de configuraciones. En términos generales se concluyó que los estudiantes mostraron la construcción del esquema mediante la praxeología para el sujeto genérico de la institución, relacionada con la descomposición genética.

### **Reflexiones finales**

La experiencia de uso del marco teórico surgido del diálogo entre las dos teorías en la actividad de modelización de la separación ciega de señales permitió hacer frente a la desarticulación entre los sistemas lineales, las transformaciones, la transformación inversa y la matriz inversa encontrada en el análisis inicial. El contexto contribuyó al desarrollo de herramientas para la modelización con estudiantes de ingeniería mediante la relación entre el recorrido de modelización y el desarrollo de las praxeologías relacionadas con la descomposición genética. Un resultado importante fue que se propuso una forma alternativa de construir un procedimiento para encontrar la matriz inversa que tiene sentido cuya razón de ser cobra sentido.

Esta experiencia permitió además establecer un diálogo entre la teoría APOE y la TAD desde un problema específico y mostró la riqueza de las herramientas elaboradas a través del diálogo entre ellas. Se pone en evidencia que la propuesta del diálogo entre teorías consideradas como praxeologías de investigación tomando en cuenta todas sus componentes permite diseñar y analizar experiencias de investigación interesantes y fructíferas en las que los resultados que se obtienen hubieran sido imposibles de lograr si se hubiera utilizado únicamente una de las dos teorías.

\* Este trabajo es el resultado de la colaboración de la autora con Marianna Bosch, Josep Gascón, y Rita Vazquez, Avenilde Romo y Rebeca Romo.

### **Referencias**

ARNON, I., COTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA, S., TRIGUEROS, M., & WELLER, K. (2013). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer Verlag. ISBN: 978-1-4614-7965-9, DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6, 254 pp.

- BOSCH M. & GASCÓN, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Coord.), *Balises en didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- TRIGUEROS, M., BOSCH, M., Y GASCÓN, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz O., M. Artaud, A. Bronner, Y, CHEVALLARD, G. CIRADE, C. LADAGE, M. LARGUIER. *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*. Centre de Recerca Matemática, Barcelona, España, pp. 77-116. ISSN: 2014-2323 (printed edition) ISSN: 2014-2331 (electronic edition).
- VÁZQUEZ, R (2017). Diseño de actividades didácticas basadas en modelación para la formación matemática de futuros ingenieros. *Tesis doctoral*. CICATA-IPN. México.
- VÁZQUEZ, R., ROMO V. A, TRIGUEROS, M. ROMO V. R. (2016a). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática*, 28(2), 31- 57. México.
- VÁZQUEZ, R., ROMO V. A, TRIGUEROS, M. ROMO V. R. (2016b). A model from signal analysis to design linear algebra activities. In Nardi Elena. Dir. ; Winslow Carl. Dir. Hausberger Thomas Dir. (Eds.). *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in Mathematics*, INDRUM 2016, pp. pp. 241-250, Université de Montpellier, INDRUM Montpellier, 2016 ISSN: 2496-1027.
- VÁZQUEZ, R., ROMO V. A, TRIGUEROS, M. ROMO V. R. (2015). Un contexto de modelación para la enseñanza de las matemáticas en ingeniería. En P. Scott y A. Ruiz G. García (Eds.) Comité Interamericano de Educación Matemática. *Educación Matemática en las Américas 2015. Volumen 16: Modelación*, pp. 171- 181. República Dominicana.