Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele[1]

Some reflections on the Van Hiele Theory

MICHAEL DE VILLIERS[2]

Abstract
This paper gives a review of research on the Van Hiele Theory over the past 30 years and highlights and illustrates some important issues regarding theoretical implications for designing learning activities in dynamic geometry contexts. Outstanding and problematic issues for further research are suggested such as hierarchical class inclusion and the development of understanding of other functions of proof.
Keywords: *Van Hiele Theory; Dynamic Geometry; Functions of Proof*

Resumo
Este artigo apresenta uma retrospectiva ds pesquisas sobre a Teoria de Van Hiele nos últimos 30 anos. Destaca e ilustra alguns aspectos importantes sobre as implicações teóricas para a concepção de atividades de aprendizagem em contextos de geometria dinâmica. Problemas e questões para novas pesquisas são sugeridos tais como a inclusão hierárquica de classes e sobre o desenvolvimento da compreensão de outras funções da prova.
Palavras chave: *Teoria de Van Hiele; Geometria Dinâmica; Funções da Prova.*

Introdução

A teoria de Van Hiele teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Dina, infelizmente, morreu logo após concluir sua tese e Pierre foi quem, mais tarde, desenvolveu e disseminou a teoria em publicações posteriores.

Enquanto a tese de Pierre tentava, principalmente, explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender geometria (sob tal aspecto, ela era **explicativa** e **descritiva**), a tese de Dina versava sobre um experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais **prescriptiva** com relação à ordenação do conteúdo de geometria e atividades de aprendizado dos alunos. A principal característica da teoria é a distinção de cinco diferentes níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento da compreensão dos

[1] Tradução de Celina A. A. P. Abar – abarcaap@pucsp.br para publicação na Revista Educação Matemática Pesquisa, com permissão do autor, a partir da versão original apresentada no IV *Congresso de Professores de Matemática* da Sociedade Croata de Matemática, Zagreb,30 de junho a 02 de julho de 2010.
[2] Universidade de KwaZulu-Natal, África do Sul - profmd@mweb.co.za

alunos acerca da geometria. Quatro características importantes da teoria são resumidas da seguinte maneira por Usiskin (1982:4):

- **ordem fixa:** A ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível *n* sem ter passado pelo nível *n-1*.
- **adjacência:** Em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
- **distinção:** Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
- **separação:** Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra.

Os Van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o currículo era apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender! Embora a teoria de Van Hiele faça distinção entre os cinco diferentes níveis de pensamento, aqui nos concentraremos apenas nos quatro primeiros níveis, já que eles são os mais relevantes para a geometria do ensino médio. As características gerais de cada nível podem ser descritas da seguinte maneira:

> **Nível 1: reconhecimento**
>
> Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.
>
> **Nível 2: análise**
>
> Os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas.
>
> **Nível 3: ordenação**
>
> Os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe).
>
> **Nível 4: dedução**
>
> Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas.

Observe que, sob um determinado aspecto, a transição do Nível 1 para o Nível 2 envolve a transição de uma figura estática na manipulação de conceitos, para uma mais simbólica de acordo com os conceitos familiares de Bruner (1966). De maneira mais simples, a obtenção do Nível 2 envolve a aquisição da linguagem técnica por meio da qual as propriedades do conceito podem ser descritas. Contudo, a transição do Nível 1 para o Nível 2 envolve mais do que simplesmente a aquisição de linguagem, ela envolve o reconhecimento de algumas novas relações entre conceitos e o refinamento e a renovação de conceitos existentes.

Para que um aluno progrida do Nível 1 para o Nível 2 em um tópico específico (por exemplo, os quadriláteros), é necessário que ocorra uma reorganização significativa de relações e um refinamento de conceitos. Há, portanto, muito mais em tal transição do que apenas uma verbalização de conhecimento intuitivo, já que a verbalização anda lado a lado com a reestruturação do conhecimento.

Tal reestruturação deve ocorrer antes que os alunos possam começar a explorar as relações lógicas entre tais propriedades no Nível 3. Van Hiele (1973:94) expressa isso da seguinte maneira:

> A rede de relações no Nível 3 só pode ser estabelecida de maneira significativa quando a rede de relações no Nível 2 for estabelecida adequadamente. Quando a segunda rede de relações está presente de forma adequada tal que sua estrutura se torna aparente e alguém pode falar sobre ela com outras pessoas, é então que os elementos constituintes do Nível 3 estarão prontos.

O Nível 3 também representa uma rede de relações completamente diferente daquela do Nível 2. Enquanto a rede de relações do Nível 2 envolve a *associação de propriedades* a tipos de figuras e relações entre figuras de acordo com tais propriedades, a rede de relações no Nível 3 envolve as *relações lógicas* entre as propriedades das figuras. A rede de relações no Nível 3 não mais se refere a figuras concretas e específicas, e tampouco tais relações formam uma estrutura de referência na qual se pergunta se uma determinada figura possui determinadas propriedades. As perguntas típicas feitas no Nível 3 são relacionadas ao fato de uma determinada propriedade ser sequência de outra ou se ela pode ser deduzida a partir de um subconjunto específico de propriedades (ou seja, se ela poderia ser tomada como uma definição ou se é um teorema) ou se duas definições são equivalentes.

Portanto, as redes de relações do Primeiro e do Segundo níveis de pensamento são bastante diferentes (Van Hiele, 1973:90):

> O raciocínio acerca de um sistema lógico pertence ao Terceiro Nível de pensamento. A rede de relações, que se baseia em uma descrição verbal de fatos observados, pertence ao Segundo Nível de

> pensamento. Esses dois níveis têm suas próprias redes de relações, com uma sendo diferente da outra: ou alguém raciocina em uma rede de relações ou na outra.

As diferenças entre os três primeiros níveis podem ser resumidos da maneira exibida na Tabela 1 com relação aos objetos e à estrutura de pensamento em cada nível (adaptado de Fuys *et al*, 1988:6).

Tabela 1

Objetos de pensamento	**Figuras Individuais**	**Classes de Figuras**	**Definição de classes de figuras**
Estrutura de pensamento	Reconhecimento visual Nomeação Classificação. visual	Reconhecimento das propriedades como características de classes	Observação formulação de relações lógicas entre as propriedades
Exemplos	Todos os paralelogramos ficam juntos porque "*se parecem*" Retângulos, quadrados e losangos não são paralelogramos porque "*não se parecem com eles*"	Um paralelogramo tem: • 4 lados • ângulos opostos = • lados opostos = • lados opostos // • diagonais cortam-se no ponto médio; etc. Um retângulo não é um paralelogramo, já que possui ângulos de 90º, diferentemente de um paralelogramo.	• Lados opostos = implicam em lados opostos // • Lados opostos // implicam em lados opostos = • ângulos opostos = implicam em lados opostos = • diagonais que se cortam no ponto médio implicam em simetria de meia volta.

Ao usar entrevistas com base em tarefas, Burger & Shaughnessy (1986) caracterizaram os níveis de pensamento dos alunos nos primeiros quatro níveis de maneira mais completa como segue:

Nível 1

(1) Costumam usar propriedades visuais irrelevantes para identificar figuras, comparar, classificar e descrever.

(2) Normalmente se referem a protótipos visuais de figuras e são facilmente enganados pela orientação das figuras.

(3) Incapacidade de pensar em uma variação infinita de um tipo específico de figura (por exemplo, em termos de orientação e forma).

(4) Classificações inconsistentes de figuras, por exemplo, uso de propriedades incomuns ou irrelevantes para classificar as figuras.

(5) Descrições (definições) incompletas de figuras ao ver condições necessárias (normalmente visuais) como condições suficientes.

Nível 2

(1) Uma comparação explícita de figuras com relação às suas propriedades subjacentes.

(2) Evitam inclusões de classe entre as diferentes classes de figuras, por exemplo, quadrados e retângulos são considerados disjuntos.

(3) Classificação de figuras somente com relação a uma propriedade, por exemplo, propriedades dos lados, enquanto outras propriedades, como simetrias, ângulos e diagonais, são ignoradas.

(4) Exibem uma utilização não econômica das propriedades das figuras para descrevê-las (defini-las), em vez de usar apenas as propriedades suficientes.

(5) Rejeição explícita de definições fornecidas por terceiros, por exemplo, um professor ou livro, favorecendo apenas suas próprias definições pessoais.

(6) Abordagem empírica no estabelecimento da verdade de uma declaração, por exemplo, o uso de observação e medição com base em diversos rascunhos.

Nível 3

(1) Formulação de definições econômicas e corretas para as figuras.

(2) Capacidade de transformar definições incompletas em definições completas e uma aceitação e uso espontâneo de definições para novos conceitos.

(3) A aceitação de diferentes definições equivalentes para o mesmo conceito.

(4) Classificação hierárquica de figuras, por exemplo, quadriláteros.

(5) Uso explícito da forma lógica "se... então" na formulação e tratamento de conjecturas, além do uso implícito de regras lógicas, como modus ponens.

(6) Incerteza e falta de clareza com relação às respectivas funções de axiomas, definições e provas.

Nível 4

(1) Compreensão das respectivas funções (papéis) de axiomas, definições e provas.

(2) Realização espontânea de conjecturas e esforços iniciados por vontade

própria para verificá-los de maneira dedutiva.

1. Pesquisa Russa sobre o Ensino da Geometria

A geometria sempre foi uma parte proeminente do programa curricular de matemática na Rússia nos séculos XIX e XX. Essa clássica tradição foi, sem dúvida, influenciada pelas (e contribuiram para) realizações de diversos geômetras russos famosos (como Lobachevsky) nos dois séculos passados. Tradicionalmente, o programa de geometria da Rússia consistia de duas fases: uma fase *intuitiva* válida da 1ª à 5ª série e uma fase de *sistematização* (dedutiva) válida a partir da 6ª série (12/13 anos de idade).

No final da década de 60, os pesquisadores russos (soviéticos) realizaram uma análise abrangente das fases intuitivas e de sistematização para tentar encontrar uma resposta à perturbadora questão do porquê os alunos que iam bem em outras matérias, mostravam pouco progresso em geometria. A teoria de Van Hiele desempenhou um papel importante em tal análise. Por exemplo, descobriu-se que, ao final da 5ª série (antes do início da fase de sistematização, que requer uma compreensão de pelo menos Nível 3), apenas 10 a 15% dos alunos estavam no Nível 2.

A principal razão disso era a atenção insuficiente dedicada à geometria no ensino primário. Por exemplo, nos primeiros cinco anos, esperava-se que os alunos tomassem conhecimento, principalmente por meio de atividades de Nível 1, de pelo menos 12 a 15 objetos geométricos (e terminologia associada). Por outro lado, esperava-se que os alunos, no primeiro tópico tratado no primeiro mês da 6ª série, não apenas tomassem conhecimento de cerca de 100 novos objetos e terminologia, mas isso tudo era tratado no Nível 3 de compreensão (ou, não raro, o professor devia tentar apresentar o conteúdo novo em 3 níveis diferentes simultaneamente). Não é de se admirar que eles descreviam o período da 1ª à 5ª série como um *período prolongado de inatividade geométrica*!

Consequentemente, os russos criaram um currículo experimental de geometria de muito êxito com base na teoria de Van Hiele. Eles descobriram que um fator importante era a sequência e o desenvolvimento contínuo de conceitos a partir da 1ª série. Como relatado em Wirszup (1976:75-96), o aluno médio da 8ª série do currículo experimental demonstrou compreensão geométrica igual ou melhor do que os correspondentes alunos das 11ª e 12ª séries do currículo antigo.

2. O Currículo de Geometria do Ensino Fundamental e Médio

Os paralelos entre a experiência Russa e a África do Sul e outros países são óbvios. Na África do Sul, costumávamos ter um currículo de geometria carregado de geometria formal no fim do ensino médio, mas conteúdo relativamente fraco e apresentado informalmente no ensino fundamental, (por exemplo, pouca geometria de semelhaça ou de círculos é apresentada no ensino fundamental). Em media, o desempenho dos alunos em geometria na 12ª série Sul-Africana foi muito pior do que em álgebra. Por quê?

A teoria de Van Hiele permite uma importante explicação. Por exemplo, pesquisas de De Villiers & Njisane (1987) mostraram que cerca de 45% dos alunos pesquisados na 12ª série em KwaZulu havia dominado apenas o Nível 2 ou menos, enquanto o exame presumia o domínio de níveis a partir do Nível 3! Semelhantes baixos níveis de Van Hiele entre os alunos do ensino médio foram descobertos por Malan (1986), Smith & De Villiers (1989) e Govender (1995). Em especial, a transição do Nível 1 para o Nível 2 apresentava problemas específicos em alunos usando um segundo idioma, já que envolvia a aquisição da terminologia técnica por meio da qual as propriedades das figuras precisam ser descritas e exploradas. Isso requer tempo suficiente, o que não está disponível atualmente no currículo sobrecarregado do ensino médio.

Parece claro que nenhum tipo de esforço ou método de ensino extravagante no ensino médio terá sucesso a menos que realizemos uma profunda revisão do currículo de geometria do ensino fundamental seguindo os conceitos de Van Hiele. Assim, o futuro da geometria escolar no ensino médio depende da geometria do ensino fundamental!

No Japão, por exemplo, os alunos já começam na 1ª série com *tangram* estendido, além de outras pesquisas de planos e espaços (por exemplo, ver Nohda, 1992). Isso progride continuamente nos anos seguintes de modo que, na 5ª série, eles já estão lidando formalmente com os conceitos de congruência e semelhança, conceitos que são apresentados apenas nas 8ª e 9ª séries na África do Sul. Do mesmo modo em Taiwan, onde o ensino de geometria também começa cedo, há relatos, em um estudo por Wu & Ma (2006), que 28,3% dos alunos da 6ª série já estavam no Nível 3 de Van Hiele, enquanto a mesma porcentagem de alunos no Nível 3 de Van Hiele na África do Sul era atingida apenas na 11ª série (De Villiers & Njisane, (1987); De Villiers, (1987)). Mais recentemente, Feza & Webb (2005) descobriram que apenas 5 entre 30 (16,7%) dos alunos da 7ª série entrevistados na África do Sul haviam atingido o Nível 2 de Van

Hiele. Não surpreende que em estudos internacionais comparativos em anos recentes, os estudantes Japoneses e Taiwaneses foram consistentemente melhores do que os Sul-Africanos, assim como outros países.

Embora a recente introdução de mosaicos no ensino fundamental Sul-Africano seja muito bem-vinda, vários professores e autores de livros educacionais não parecem entender sua relevância no que se refere à teoria de Van Hiele. Embora os mosaicos tenham uma grande atração estética devido aos seus modelos intrigantes e artisticamente agradáveis, o motivo fundamental para a sua introdução no ensino fundamental é que ele proporciona um alicerce visual intuitivo (Van Hiele 1) para vários conteúdos geométricos, que depois podem ser tratados de maneira mais formal em um contexto dedutivo.

Por exemplo, em um modelo de mosaico triangular como o exibido na Figura 1, alguém poderia colocar as seguintes questões aos seus alunos:

(1) Identificar e colorir linhas paralelas

(2) O que você pode dizer sobre os ângulos A, B, C , D e E, e por quê?

(3) O que você pode dizer sobre os ângulos A, 1, 2, 3 e 4, e por quê?

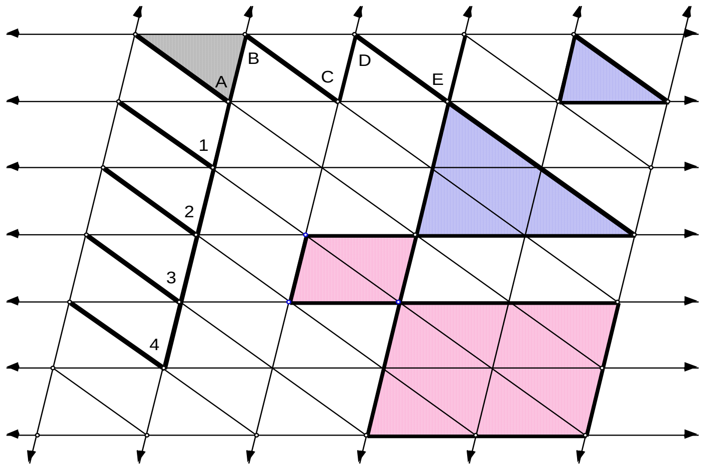

FIGURA 1: Visualização

Em tal atividade, os alunos perceberão que os ângulos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* são todos iguais, já que uma rotação de meia volta do triângulo cinza ao redor do ponto médio do lado *AB* projeta o ângulo A sobre o ângulo B, e assim por diante. Assim, os alunos podem ser apresentados, pela primeira vez, ao conceito de "*serras*" ou "*zigue-zagues*" (ângulos alternos). De maneira semelhante, os alunos devem perceber que os ângulos *A, 1, 2, 3* e *4* são todos iguais, visto que uma translação do triângulo cinza na direção dos ângulos *1,* *2*, *3* e *4*, consecutivamente, projeta o ângulo *A* sobre cada um desses ângulos. Assim, os alunos podem ser apresentados pela primeira vez ao conceito de "*escadas*" (ângulos correspondentes). Os alunos devem receber estímulo ainda maior para encontrar diferentes serras e escadas nesse e em outros mosaicos para aprimorar sua capacidade de visualização.

Como cada peça deve ser idêntica e pode ser encaixada perfeitamente sobre outra por meio de translações, rotações ou reflexões, fica mais fácil a introdução do conceito de congruência aos alunos. Também é possível pedir aos alunos que procurem formas diferentes em tais modelos de mosaicos, por exemplo, paralelogramos, trapézios e hexágonos. Além disso, eles podem ser estimulados a procurar por figuras maiores com o *mesmo formato*, assim apresentando a eles, e de forma intuitiva, o conceito de *semelhança* (como exibido na Figura 1 pelos triângulos e paralelogramos com hachuras semelhantes).

Os mosaicos também proporcionam um contexto adequado para a análise das propriedades de figuras geométricas (Van Hiele 2), além de sua explicação lógica (Van Hiele 3). Por exemplo, após os alunos terem construído um modelo de mosaico triangular como o exibido na Figura 2, alguém poderia colocar questões como segue:

(1) O que você pode dizer sobre os ângulos *A* e *B* em relação aos ângulos *D* e *E*? Por quê? O que você pode concluir a partir disso?

(2) O que você pode dizer sobre os ângulos *F* e *G* em relação aos ângulos *H* e *I*? Por quê? O que você pode concluir a partir disso?

(3) O que você pode dizer sobre o segmento *JK* em relação ao segmento *LM*? Por quê? O que você pode concluir a partir disso?

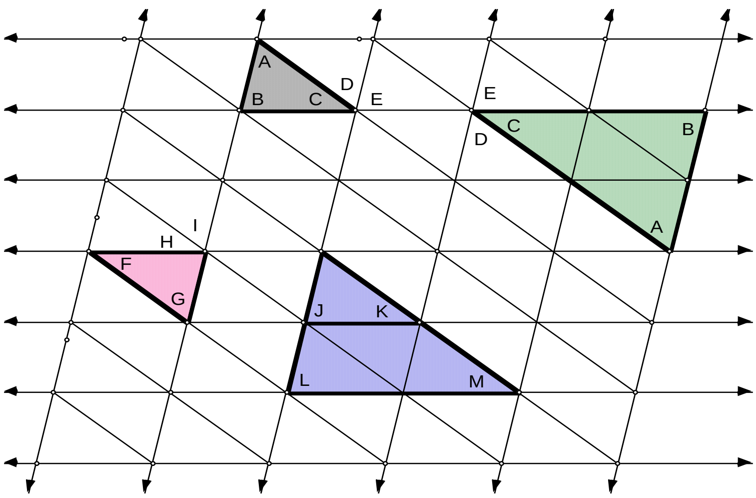

FIGURA 2: Análise

No primeiro caso, os alunos podem, mais uma vez, ver que o ângulo A = ângulo D devido à formação de uma serra. Além disso, o ângulo B = ângulo E devido a uma escada. Portanto, é fácil para eles observarem que, como os três ângulos C,D e Eficam sobre uma linha reta, a soma dos ângulos do triângulo ABC deve ser igual a 180°. Eles também podem observar que isso é verdade para qualquer vértice, para qualquer tamanho de triângulo ou orientação, permitindo assim a generalização. No segundo caso, o teorema do ângulo externo é apresentado e, no terceiro caso, o teorema do ponto médio. Claramente, tais análises estão apenas a um pequeno passo de distância das explicações geométricas padrão (provas), e tudo de que precisam agora é alguma formalização. Na Figura 3, os três níveis são ilustrados para a descoberta e explicação de que os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.

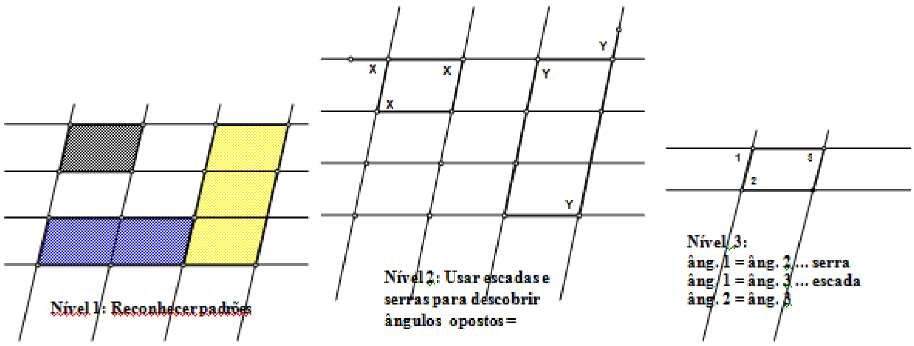

FIGURA 3: Três Níveis

3. Estruturação Conceitual

Um aspecto muito importante da teoria de Van Hiele é que ela enfatiza que atividades informais nos Níveis 1 e 2 deveriam fornecer as "*subestruturas conceituais*" adequadas para as atividades formais do nível seguinte. Embora diferente, essa ideia é um pouco semelhante à ideia de *andaimes* (*scaffolding*, em inglês) instrutivos promovida por Wood, Bruner & Ross (1976).

Os professores costumam deixar que seus alunos meçam os ângulos de um triângulo com um transferidor e então deixá-los somar os ângulos (normalmente desconsiderando os "desvios" de erros experimentais) para "descobrir" que eles sempre totalizam 180º.

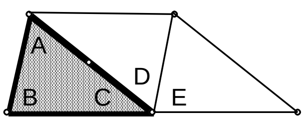

FIGURA 4: Usando Transformações para a Descoberta.

Contudo, do ponto de vista de Van Hiele, isso é totalmente inadequado, já que não proporciona uma subestrutura conceitual apropriada na qual a explicação lógica eventual (prova) está implicitamente embutida. Por outro lado, uma atividade com peças de papelão ou o software *Sketchpad* como a seguinte de De Villiers (2003) proporciona tal subestrutura. Por exemplo, transladar um triângulo *ABC* pelo vetor *BC*, e rotacionar o triângulo *ABC* ao redor do ponto médio de *AC* (ver Figura 4). Deixe que os alunos percebam, ao movimentar as peças, que os três ângulos C, D e E sempre estão sobre uma reta. Então, pergunte aos alunos o que eles podem dizer sobre os ângulos A e B em relação aos ângulos D e E em termos das transformações ocorridas. Como o ângulo B se projeta sobre o ângulo E pela translação, e o ângulo A se projeta sobre o ângulo D pela rotação de meia volta, os ângulos B e A são iguais aos ângulos D e E, respectivamente. Isso obviamente proporciona uma estrutura conceitual muito mais adequada para uma eventual explicação (prova) do que simplesmente deixar os alunos medir alguns ângulos dos triângulos.

De maneira semelhante, a ação de medir os ângulos da base de um triângulo isósceles é conceitualmente inadequada, mas dobrá-lo sobre seu eixo de simetria prepara o caminho para uma posterior prova formal. O mesmo se aplica à investigação das propriedades dos quadriláteros. Por exemplo, é conceitualmente inadequado medir os ângulos opostos de um paralelogramo de modo a permitir que os alunos descubram que eles são iguais. É muito melhor permitir que eles rotacionem o paralelogramo para descobrir que os ângulos (e lados) opostos se projetam uns sobre os outros, já que isso geralmente se aplica a todos os paralelogramos e contem as bases conceituais para uma prova formal.

Recentemente, conversei com um professor que repudiou a introdução de outro professor aos mosaicos e que deixou seus alunos primeiramente usarem pequenas peças de papelão. Esse professor concluiu que os mosaicos produziam padrões desorganizados, eram ineficazes e consumiam tempo, e que alguém deveria começar dando aos seus alunos grades prontas de quadrados e triângulos e mostrar a eles como era fácil desenhar padrões de mosaicos organizados (ver Figura 5). Embora tais grades sejam uma maneira útil e eficaz de desenhar padrões organizados, é extremamente importante, no aspecto conceitual, que os alunos tenham pelo menos um pouco de experiência com o manuseio físico de peças, ou seja, rotações, translações e reflexões das peças *manualmente* (ou, no mínimo, com o auxílio de softwares de geometria dinâmica, ilustrando ou animando as transformações subjacentes).

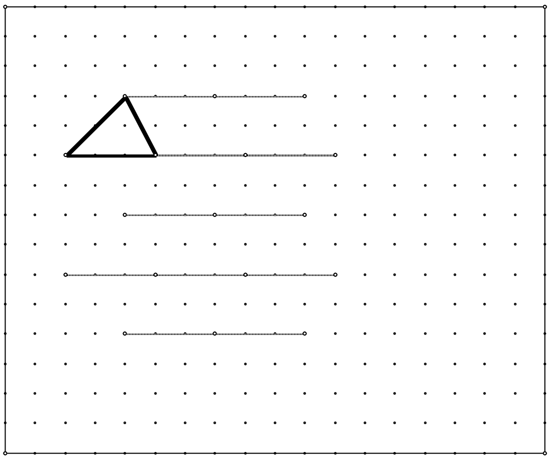

FIGURA 5: Utilizando Grades para construir Mosaicos

O primeiro problema é que é possível desenhar padrões de mosaicos em tais grades sem que haja qualquer compreensão clara das isometrias subjacentes por meio das quais eles podem ser criados. Isometrias, por sua vez, são conceitualmente importantes para analisar as propriedades geométricas embutidas no padrão e, eventualmente, para formalizá-las em provas.

Ainda mais importante, de acordo com Bruner (1966), este nível *inativo*, no qual a criança manipula materiais diretamente, é um **pré-requisito** fundamental (assim como na teoria de Van Hiele) para o nível *estático*, no qual a criança começa a lidar com imagens mentais de objetos e não precisa mais manipulá-los de forma direta.

4. Definir e Classificar

Tradicionalmente, a maioria dos professores e autores de livros escolares simplesmente fornece aos alunos conteúdo pronto (definições, teoremas, comprovações, classificações, etc.) para que eles meramente tenham de assimilá-lo e regurgitá-lo em testes e provas. Esse tipo de ensino tradicional de geometria pode ser comparado a uma aula de culinária na qual o professor simplesmente mostra aos alunos bolos (ou pior, apenas fotos de bolos) sem jamais mostrar a eles o que vai dentro do bolo e como ele é preparado. E mais, eles nem mesmo têm a oportunidade de tentar cozinhar por si próprios!

Matemáticos e educadores de matemática criticam bastante o ensino direto de definições de geometria sem ênfase no processo subjacente da definição. O conhecido matemático Hans Freudenthal (1973:416-418) também teceu fortes críticas à prática tradicional de simplesmente fornecer definições de geometria como segue:

> ... O didático socrático se recusaria a apresentar os objetos geométricos por definições, mas em qualquer circunstância na qual a inversão didática prevalece, o ato de deduzir começa com definições.
>
> ... A maioria das definições não é preconcebida, mas sim o toque final da atividade organizadora. Esse privilégio não deveria ser roubado da criança... O bom ensino da geometria pode significar muitas coisas: aprender a organizar um assunto e aprender o que é organizar; aprender a conceituar e o que é conceituar; aprender a definir e o que é uma definição. Isso significa deixar os alunos compreenderam o porquê certas organizações, conceitos e definições são melhores do que outros.

O simples fato de saber a definição de um conceito não garante a compreensão do conceito. Por exemplo, embora possam ter ensinado a um aluno, e ele seja capaz de dizer, a definição padrão de um paralelogramo como um quadrilátero com lados opostos paralelos, o aluno pode ainda não considerar retângulos, quadrados e losangos como paralelogramos, já que a imagem conceitual que os alunos têm de um paralelogramo é que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais.

De acordo com a teoria de Van Hiele, a compreensão de definições formais fornecidas por livros se desenvolve apenas no Nível 3, e proporcionar tais definições aos alunos diretamente nos níveis inferiores está fadado ao fracasso. Além disso, se levarmos a sério a teoria construtivista de aprendizado (ou seja, de que o conhecimento simplesmente não pode ser transferido diretamente de uma pessoa a outra e que o conhecimento significativo precisa ser (re)construído de maneira ativa pelo aprendiz), os alunos devem estar envolvidos na ação de definir e terem a chance de selecionar suas próprias definições em cada nível. Isso implica em permitir os seguintes possíveis tipos de definições significativas para um retângulo em cada nível de Van Hiele:

Van Hiele 1

Definições *visuais*, por exemplo, um retângulo é uma figura que parece com isso (desenha ou identifica um quadrilátero cujos ângulos têm 90º e que possui dois lados curtos e dois lados longos).

Van Hiele 2

Definições *não econômicas*, por exemplo, um retângulo é um quadrilátero com lados opostos paralelos e iguais, todos os ângulos têm 90º, diagonais iguais, simetria de rotação, dois eixos de simetria pelos lados opostos, dois lados longos e dois lados curtos, etc.

Van Hiele 3

Definições *econômicas e corretas*, por exemplo, um retângulo é um quadrilátero com dois eixos de simetria pelos lados opostos.

5. Definições Hierárquicas vs. Particionadas

Embora as crianças mais jovens sejam capazes de compreender inclusões de classe como "*gatos e cachorros são animais*", parece substancialmente mais difícil conseguir isso com figuras geométricas. Geralmente, as definições espontâneas de alunos nos Níveis de Van Hiele 1 e 2, tal como demonstrado acima, também tenderiam a ser *particionadass*, ou seja, não permitiriam a inclusão de quadrados entre os retângulos (por meio da declaração explícita de dois lados longos e dois lados curtos). Por outro lado, de acordo com a teoria de Van Hiele, as definições do Nível 3 são tipicamente *hierárquicas*, o que significa que permitem a inclusão dos quadrados entre os retângulos, e não seriam compreendidas por alunos nos níveis inferiores.

No ensino tradicional, as crianças são, em sua maioria, apresentadas a retângulos, losangos, paralelogramos, entre outros, como *objetos geométricos estáticos*. Por exemplo, um retângulo pode ser introduzido por meio da comparação com a forma de uma porta ou figura estática de um livro, mas uma porta ou uma figura de um livro não podem ser transformadas em um quadrado (a menos que partes sejam cortadas). Assim, o retângulo conceitual é introduzido, desde o início, como um conceito completamente dissociado de um quadrado. Infelizmente, tal esquema de classificação particionada se torna arraigada e fossilizada ao longo do tempo, tornando-se muito resistente a mudanças.

A dificuldade conceitual da inclusão de classes geométricas já foi demonstrada por Mayberry (1981), que descobriu que apenas 3 em cada 19 professores de matemática não conhecedores de tal conceito indicavam que quadrados também eram retângulos em uma folha com alguns quadriláteros. Embora possam ser levantadas críticas válidas contra algumas das questões usadas por Mayberry, assim como por Usiskin (1982) para a avaliação do raciocínio hierárquico, já que dado um conjunto de diferentes quadriláteros, os alunos podem simplesmente marcar o quadrilátero mais geral (por exemplo, um paralelogramo) ao pedir que o marquem, simplesmente *não sabendo ou percebendo que a intenção* da pergunta era de que todos os casos especiais (por exemplo, retângulos, losangos e quadrados) também deveriam ser marcados.

Em uma pesquisa realizada por De Villiers & Njisane (1987) com 4015 alunos de KwaZulu (África do Sul) usando algumas questões modificadas para a avaliação do raciocínio hierárquico (ver a Figura 6, por exemplo), observou-se uma pequena melhoria. No entanto, descobriu-se que houve pouquíssimo progresso em seu raciocínio hierárquico da 9ª à 12ª série, com taxa de sucesso variando apenas de 0,5% a 5,1% com um critério de 50% em itens de testes avaliando o raciocínio hierárquico. Isso contrasta significativamente com os níveis de proficiência de Van Hiele 3 em deduções de uma e duas etapas, que melhoraram, respectivamente, de 2,5% e 0,2% na 9ª série para 63,3% e 42,6% na 12ª série. Descobertas mais recentes de Atebe & Schäfer (2008) com um grupo de Nigerianos e Sul-Africanos mostraram, de maneira semelhante, que foram quase nulas as inclusões de classes de quadriláteros entre o grupo investigado da 10ª à 12ª série.

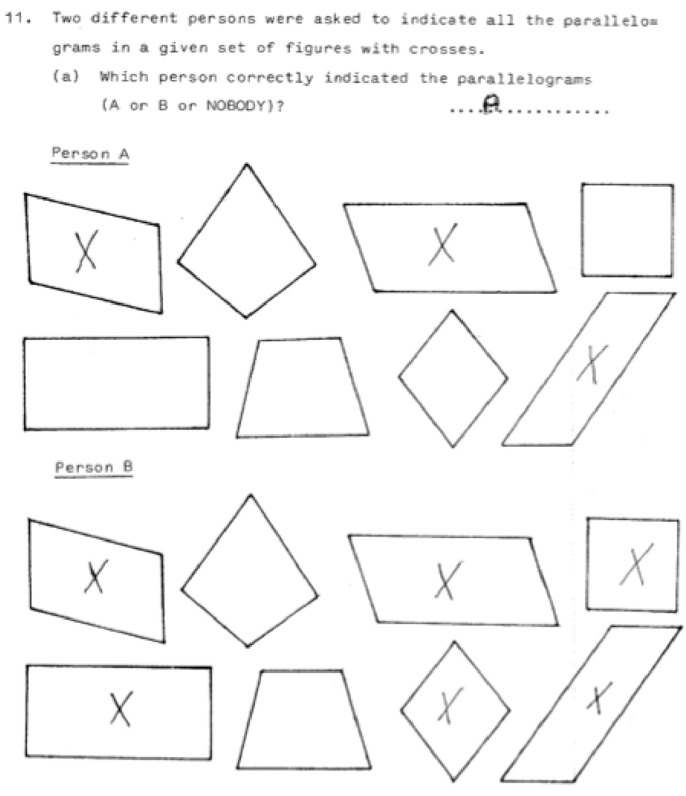

FIGURA 6: Teste da Inclusão de Classes

As definições formais do Nível 3 de Van Hiele em livros escolares costumam ser precedidas por uma atividade na qual os alunos devem comparar diversas propriedades dos quadriláteros em uma tabela, cujo objetivo é auxiliar os alunos a ver que quadrados, retângulos e losangos têm todas as propriedades de um paralelogramo e que eles, portanto, poderiam ser considerados casos especiais. Conduto, pesquisas relatadas em De Villiers (1994) demonstram que muitos alunos, mesmo após fazer tais comparações na tabela e outras atividades, ainda preferiam definir quadriláteros de forma *particionada* (em outras palavras, por exemplo, ainda preferiam definir um paralelogramo como um quadrilátero com ambos os pares de lados opostos paralelos, mas sem que todos os ângulos ou lados fossem iguais).

Por tal motivo, parece que os alunos deveriam receber a oportunidade de formular suas próprias definições independentemente delas serem particiondas ou hierárquicas. Na aula, ao comparar e falar sobre as vantagens e desvantagens relativas desses dois diferentes modos de classificação e definição de quadriláteros (ambos os quais são matematicamente corretos), os alunos podem ser orientados a perceber que há algumas vantagens em aceitar uma classificação hierárquica. Por exemplo, se pedirem aos alunos para comparar as duas seguintes definições para paralelogramos, eles podem perceber que a primeira é mais **econômica** do que a segunda:

> *hierárquica:* um paralelogramo é um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos são paralelos.
>
> *particionada:* um paralelogramo é um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos são paralelos, mas nem todos os ângulos ou lados são iguais.

Obviamente, as definições particionadas são mais longas, já que precisam incluir propriedades adicionais para garantir a exclusão de casos especiais. Outra vantagem de uma definição hierárquica para um conceito é a de que todos os teoremas provados para tal conceito automaticamente se aplicam aos seus casos especiais. Por exemplo, se provarmos que as diagonais de um paralelogramo se cortam no ponto médio, podemos concluir imediatamente que o mesmo também é verdade para retângulos, losangos e quadrados. Por outro lado, se os classificarmos e definirmos de modo particionado, teríamos de provar isso separadamente para cada caso – paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados. É óbvio que reproduzir todas essas provas não é nada econômico. Parece claro que, a menos que o papel e a função de uma classificação hierárquica seja tratada de maneira significativa na aula, vários alunos terão dificuldade para entender o porquê suas definições intuitivas e particionadas não são usadas.

Envolver os alunos na definição de conceitos geométricos como os quadriláteros também proporciona uma oportunidade valiosa para que os alunos aprendam a construir contraexemplos para definições incompletas ou erradas criadas por eles mesmos. Por exemplo, ser capaz de demonstrar que *uma pipa é um quadrilátero com diagonais perpendiculares* é uma definição incompleta para encontrar um quadrilátero com diagonais perpendiculares que não seja uma pipa.

Uma dificuldade comum dos alunos ao produzir as contraexemplos corretos para definições incompletas é que eles costumam tentar rejeitar uma definição com um caso especial. Por exemplo, para a definição incorreta, *um retângulo é qualquer quadrilátero com diagonais congruentes*, alguns alunos fornecem um quadrado como contraexemplo. Mas é óbvio que um quadrado não é um contraexemplo válido, já que um quadrado *é* um retângulo.

Assim, os alunos já deveriam ter desenvolvido uma compreensão sólida de uma classificação hierárquica (inclusiva) de quadriláteros antes de se envolverem com a definição formal dos quadriláteros (Craine & Rubenstein, 1993; Casa & Gavin, 2009). Esse desenvolvimento pode ser alcançado pelo uso de softwares interativos de geometria, figuras criadas com fios flexíveis ou modelos de quadriláteros feitos em papel. Realmente, ao trabalhar com um grupo de cinco alunos de 6ª série usando modelos com fios flexíveis e de papel, Malan (1986) descobriu que todos eles eventualmente conseguiam obter sucesso ao fazer inclusões de classes hierárquicas dos quadriláteros. Além disso, verificou que a linguagem usada para descrever as inclusões de classes era um fator importante (por exemplo, chamar um quadrado de retângulo *especial*).

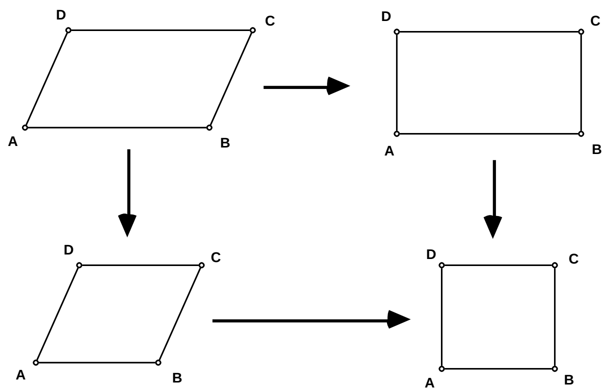

FIGURA 7: Transformação Dinâmica de Paralelogramo

Especificamente, a natureza dinâmica de figuras geométricas construídas em softwares dinâmicos como o *Sketchpad* podem facilitar a aceitação de uma classificação hierárquica dos quadriláteros nos níveis inferiores de Van Hiele. Por exemplo, caso os alunos construam um quadrilátero com lados opostos paralelos, eles perceberão que seria fácil movimentá-lo de modo a assumir a forma de um retângulo, losango ou quadrado, como exibido na Figura 7. Na verdade, parece bem possível que pelo menos alguns alunos conseguiriam aceitar e compreender isso até mesmo no Nível 1 de Van Hiele (Visualização), mas a realização de mais pesquisas nessa área específica se faz necessária. Também é bastante possível que as dificuldades dos alunos com a inclusão hierárquica de classes seja, em grande parte, decorrente de práticas instrutivas tradicionais, algo já observado por Mayberry (1981:8) quando ela escreveu: *É concebível que os níveis observados sejam um artefato do currículo atual ou da instrução dada aos alunos …*

A autora desenvolveu um aplicativo experimental em Java, disponível em http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/quadclassify.html, no qual os quadriláteros mais comuns não são apresentados por meio da definição formal, mas simplesmente apresentados de forma visual. Nas ações guiadas de movimentar, imagina-se que uma criança no Nível 1 de Van Hiele possa, por exemplo, desenvolver mais facilmente uma *imagem conceitual dinâmica* de um retângulo como algo que pode se transformar em um quadrado quando todos os seus lados ficam iguais. Professores e pesquisadores estão convidados a experimentar tais atividades e qualquer *feedback* e relatos são bem-vindos.

6. Construção e Medida

Primeiro se deve destacar que determinados tipos de atividades de construção (com software de geometria dinâmica ou com lápis e papel) são inadequados no Nível 1 de Van Hiele. Por exemplo, recentemente se ouviu alguém em uma conferência comentando que estava desanimada com a dificuldade encontrada por crianças na tarefa de construir um quadrado *dinâmico* com o *Sketchpad*. Contudo, se as crianças ainda estavam no Nível 1 de Van Hiele, isso não seria nenhuma surpresa: como elas podem construir um quadrado se nem conhecem suas propriedades (Nível 2) e que algumas propriedades são suficientes e outras, não (ou seja, conhecem as relações lógicas entre as propriedades - Nível 3)?

Na verdade, no Nível 1 de Van Hiele, seria muito mais adequado fornecer às crianças esboços já prontos de quadriláteros em um software de geometria dinâmica, que elas então poderiam manipular facilmente e investigá-los primeiro de maneira visual. Em seguida, elas poderiam começar a usar as ferramentas de medidas do software para analisar as propriedades (e aprender a terminologia adequada) para permitir que atinjam o Nível 2. Somente então seria apropriado incentivá-las a construir esses quadriláteros dinâmicos sozinhas, o que auxiliará na transição para o Nível 3.

Em outras palavras, ainda não se pode esperar que os alunos que estão, predominantemente, no Nível 2 de Van Hiele consigam fazer a verificação lógica de suas próprias descrições (definições) de quadriláteros, mas se deve permitir que eles o façam por meio de uma cuidadosa construção e medidas. Por exemplo, os alunos poderiam avaliar as seguintes tentativas de descrições (definições) de um losango por meio da construção e medidas, como exibido na Figura 8:

(1) Um losango é um quadrilátero com todos os lados iguais.

(2) Um losango é um quadrilátero com diagonais perpendiculares e que se cortam no ponto médio.

(3) Um losango é um quadrilátero com diagonais que se cortam no ponto médio.

(4) Um losango é um quadrilátero com um par de lados adjacentes iguais e ambos os pares de lados opostos paralelos.

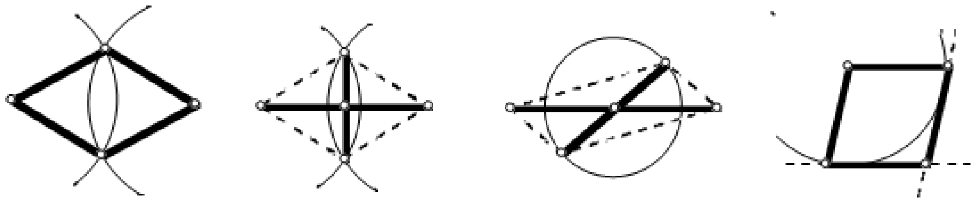

FIGURA 8: Construção e Medidas

No primeiro exemplo, os alunos devem construir um quadrilátero de modo que todos os quatro lados sejam iguais e então observar que as diagonais sempre se cortam nos pontos médios perpendicularmente, independente de como eles o movimenta. Isso mostra claramente que a propriedade de *diagonais perpendiculares que se cortam no ponto médio* é uma consequência dos alunos construírem *todos os quatro lados iguais*. Por outro lado, tal tarefa também mostra quando uma descrição (definição) está incompleta (contém propriedades insuficientes), como no terceiro exemplo acima.

Conceitualmente, construções como essas são extremamente importantes para ajudar na transição do Nível 2 de Van Hiele ao Nível 3 de Van Hiele, pois ajudam a desenvolver uma compreensão da diferença entre uma *premissa* e *conclusão* e sua relação causal, ou seja, da estrutura lógica de uma declaração *se-então*. Por exemplo, a afirmação 4 poderia ser reescrita pelos alunos como: "**Se** um quadrilátero tem um par de lados adjacentes iguais e ambos os pares de lados opostos paralelos, **então** ele é um losango (ou seja, possui todos os lados iguais, diagonais perpendiculares que se cruzam no ponto médio, etc.)". Smith (1940) relatou melhoria significativa na compreensão dos alunos nas afirmações *se-então* após deixá-los criar construções para avaliar declarações geométricas como segue:

> Os alunos viam que quando faziam determinadas coisas ao criar uma figura, ocorriam outras coisas específicas. Eles aprenderam a sentir a diferença de categoria entre as relações que **colocavam** em uma figura – as coisas sobre as quais tinham controle – e as relações **resultantes** sobre as quais eles não tinham nenhuma influência. Por fim, a diferença nessas duas categorias foi associada à diferença entre as condições **dadas** e a **conclusão**, entre a parte-*se* e a parte-*então* de uma sentença.

7. Fases de Prova no Ensino da Geometria

De acordo com a teoria de Van Hiele, para que o aprendizado seja significativo, os alunos devem se familiarizar e explorar o conteúdo de geometria em fases que correspondam aos Níveis de Van Hiele. Uma falha grave da teoria de Van Hiele, no entanto, é que não há distinção explícita entre as diferentes possíveis funções de prova. Por exemplo, o desenvolvimento do raciocínio dedutivo surge primeiro dentro do contexto de *sistematização* no Nível 3 de Van Hiele (Ordenação). Pesquisas empíricas de De Villiers (1991) e Mudaly & De Villiers (2000) parecem indicar, contudo, que as funções de prova, tais como *explicação*, *descoberta* e *verificação*, podem ser significativas para alunos fora de um contexto de sistematização, ou seja, nos Níveis de Van Hiele inferiores ao Nível 3 de Van Hiele, contanto que os argumentos sejam de natureza intuitiva ou visual, por exemplo, o uso de simetria ou dissecção. Com base na experiência, também parece que uma demora prolongada nos Níveis 1 e 2 de Van Hiele antes da introdução da prova realmente dificulta ainda mais a sua introdução posterior como uma atividade significativa. Abaixo estão quatro exemplos de atividades ordenadas para não apenas corresponder aos níveis de Van Hiele, mas também para incorporar uma distinção entre algumas diferentes funções de prova nesses níveis.

Atividade 1: *Exploração das propriedades de uma pipa.*

Nesta atividade, os alunos usam o Sketchpad para, em primeiro lugar, construir uma pipa usando reflexão e, em seguida, explorar suas propriedades (por exemplo, ângulos, lados, diagonais, circunferência). Ao movimentar os alunos também exploram casos especiais (losango, quadrado).

- envolve o Nível 1 de Van Hiele (visualização) e o Nível 2 de Van Hiele (análise e formulação de propriedades)
- proporciona a oportunidade para inclusão de classes de losangos e quadrados por meio de ações de movimentar
- as propriedades da pipa são *explicadas* (comprovadas) em termos de simetria reflexiva como na figura 9.

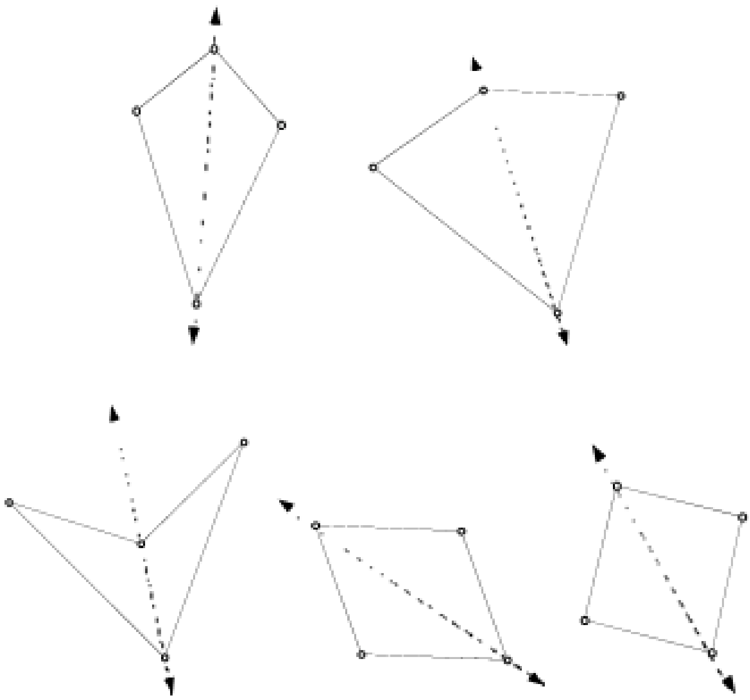

FIGURA 9: Simetria Reflexiva

Construir

1. Desenhar uma reta por dois pontos e, em seguida, um ponto fora da reta.
2. Refletir o ponto "externo" em relação à reta.
3. Conectar os pontos correspondentes para obter um quadrilátero.

Investigar

1. Criar conjecturas com relação às seguintes propriedades das figuras acima:

(a) lados

(b) ângulos

(c) diagonais

(d) círculo inscrito ou circunscrito

2. A figura acima pode, às vezes, ser um paralelogramo, retângulo, losango ou quadrado?

3. De maneira lógica, explicar suas conjecturas da questão 1 em termos de simetria.

Atividade 2: *Construção de pontos médios dos lados da pipa*

Os alunos constroem os pontos médios dos lados de uma pipa dinâmica e exploram o tipo de figura formada (levando à conjectura de que se trata de um retângulo). Que pontos médios formam um retângulo é algo explicado em termos da perpendicularidade de diagonais, levando à *descoberta* de que isso seria verdade para qualquer quadrilátero com diagonais perpendiculares.

Construir e conectar os pontos médios dos lados de uma pipa como na figura 10 abaixo.

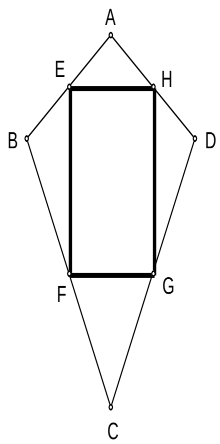

FIGURA 10: Pipa

1. Investigar o tipo de quadrilátero formado pelos pontos médios de seus lados.
2. De maneira lógica, explicar sua conjectura.
3. Com base na questão 2, você pode encontrar / construir outro tipo mais geral de quadrilátero que terá a mesma propriedade de ponto médio?

O resultado é generalizado a qualquer quadrilátero com diagonais perpendiculares.

Atividade 3: *Descrição (definição) de uma pipa*

Os alunos selecionam diferentes subconjuntos das propriedades de uma pipa como descrições (definições) possíveis e verificam primeiro se são necessárias e suficientes usando-as em uma construção no Sketchpad e, em seguida, por meio de raciocínio lógico (prova).

• envolve o Nível 3 de Van Hiele (ordenação local)

• a função explícita de prova aqui é a *sistematização* (ou seja, a organização dedutiva das propriedades de uma pipa).

• envolve o processo matemático de definição *descritiva*

A *pipa* possui as seguintes propriedades:

a. (Ao menos) um eixo de simetria ao longo de um par de ângulos opostos

b. Diagonais perpendiculares (com pelo menos uma cortando a outra no ponto médio)

c. (Ao menos) um par de ângulos opostos iguais

d. Dois (diferentes) pares de lados adjacentes iguais

e. (Ao menos) uma diagonal cortando um par de ângulos opostos no ponto médio

f. Círculo inscrito

1. Como você explicaria, pelo telefone, o que são "pipas" para alguém que não sabe o que são? (Tente usar a descrição mais breve possível, mas certifique-se de que a pessoa tenha informações suficientes para desenhar o quadrilátero corretamente).

2. Tente formular três descrições alternativas. De qual das três você mais gosta? Por quê?

Os resultados de Govender & De Villiers (2002), De Villiers (1998, 2004) e Sáenz-Ludlow & Athanasopoulou (2007) indicam uma certa melhoria e ganhos positivos na compreensão do aluno acerca da natureza das definições, assim como em sua capacidade de definir conceitos geométricos como os próprios quadriláteros.

Atividade 4: *Generalização ou especialização de uma pipa*

Os alunos generalizam abandonando algumas das propriedades e se especializam acrescentando mais propriedades. As propriedades dos objetos recém-definidos então são exploradas por meio da construção no Sketchpad e/ou por meio do raciocínio dedutivo.

• envolve o Nível 4 de Van Hiele (ordenação global)

• envolve o processo matemático de definição *construtiva*

1. Generalizar o conceito de "pipa" de diferentes maneiras abandonando, alterando ou generalizando algumas de suas propriedades.

Uma possibilidade é generalizar para um 2n-gono, ou seja, um polígono com pelo menos um eixo de simetria pelo par de ângulos opostos. Outras possibilidades são generalizar para um quadrilátero com pelo menos um par de lados adjacentes iguais, para um com uma diagonal cortada no ponto médio pela outra, ou para um quadrilátero circunscrito ao redor de um círculo.

2. Especializar o conceito de "*pipa*" de diferentes maneiras por meio do acréscimo de mais propriedades.

Possibilidades consideradas são uma pipa inscrita em um círculo, uma pipa com pelo menos três ângulos iguais, ou uma pipa com outro eixo de simetria pelo par de ângulos opostos – um losango.

As atividades resumidas acima têm como objetivo servir de exemplos de como os alunos podem se envolver em provas em níveis inferiores ao Nível 3 de Van Hiele. Exemplos de atividades mais desenvolvidas de provas e definição podem ser encontradas em De Villiers (2003 e 2009). A definição de quadriláteros também fornece um contexto excelente para a introdução e desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca das condições necessárias e suficientes discutidas e ilustradas em De Villiers *et al* (2009). O estudo de Atebe & Schäfer (2008), por exemplo, mostrou como os alunos frequentemente confundiam condições necessárias com suficientes no contexto dos quadriláteros.

8. Níveis de Van Hiele em outras Áreas

O objetivo desta seção é apresentar alguns exemplos da aplicação dos níveis de raciocínio de Van Hiele em geral em outras áreas de matemática, tal como sugerido por Hoffer (1981).

Análogo ao modelo de Van Hiele para geometria (Van Hiele, 1973), as seguintes conjecturas de níveis de raciocínio para *Álgebra Booleana* evoluíram de um curso experimental de Álgebra Booleana que foi desenvolvido no período de 1978 a 1985 (De Villiers, 1986).

Nível 1. Interpretação e representação de circuitos elétricos.

As crianças são capazes de conectar interruptores em circuitos em série e/ou paralelos a partir de diagramas e vice-versa. Contudo, elas ainda não são capazes de discernir ou simbolizar qualquer uma das propriedades dos circuitos elétricos, como a propriedade distributiva, as leis de De Morgan, leis de absorção, etc.

Nível 2. Análise das propriedades dos interruptores.

As crianças agora começam a analisar e se conscientizar acerca das diversas propriedades estruturais de circuitos elétricos e são capazes de verbalizar ou simbolizá-las. São capazes de aplicar essas propriedades na resolução de propriedades práticas, como a simplificação de circuitos elétricos ou a criação de novos. Contudo, neste nível, elas ainda não são capazes de ver as relações lógicas (implicações) entre as diferentes propriedades. O significado de prova é a *justificação*, por exemplo, verificar a validade de propriedades não óbvias como $f + (f'. g) = f + g$ por meio de verificação experimental ou a consideração de todas as possibilidades por meio do preenchimento de tabelas verdade.

Nível 3. Implicação lógica: dedução.

Agora as crianças se conscientizam das relações lógicas entre as diferentes propriedades dos interruptores, ou seja, que determinadas propriedades podem ser derivadas de outras. A capacidade de realizar provas dedutivas, axiomatizar e sistematizar, e o desenvolvimento de uma compreensão da importância de axiomas caracterizam este nível. A prova agora assume um novo significado, aquele da *sistematização* de afirmações matemáticas em um sistema lógico.

Por meio das investigações do desenvolvimento da linguagem dos alunos para a descrição de funções e da história da descrição de movimento e do desenvolvimento do cálculo, Isoda (1996) propôs os seguintes níveis de pensamento de *linguagem relacionada a funções.*

Nível 1.Nível de linguagem cotidiana.

Os alunos descrevem as relações presentes em fenômenos usando linguagem cotidiana de forma confusa. Eles conseguem falar sobre as alterações em números usando cálculos, mas suas descrições costumam ser feitas usando ou com foco em uma variável fisicamente evidente, a *variável dependente*. Mesmo se estiverem cientes da co-variação, é difícil para eles explicá-la adequadamente usando duas variáveis, já que suas descrições de relações são feitas de forma confusa, usando linguagem cotidiana. Assim, é difícil para eles comparar os diferentes fenômenos de uma só vez adequadamente.

Nível 2. Nível de aritmética.

Os alunos descrevem as regras das relações usando tabelas. Eles criam e exploram as tabelas usando a aritmética. Suas descrições de relações em fenômenos são muito mais precisas com as tabelas do que com unicamente a linguagem cotidiana usada no Nível 1. Os alunos possuem conceitos gerais sobre algumas regras das relações, por exemplo, a proporção. Os alunos conseguem comparar os diferentes fenômenos usando tais regras. Eles descrevem as regras de relações como co-variação e, ao lerem tabelas, sua interpretação da co-variação de variáveis é, pelo menos, tão forte quanto sua interpretação de correspondência. Os alunos também podem usar fórmulas e gráficos para representar regras e relações, mas não é fácil para eles fazerem a tradução entre notações.

Nível 3. Nível de álgebra e geometria.

Os alunos descrevem funções usando equações e gráficos. Para explorar as funções, eles fazem a tradução entre as notações de tabelas, equações e gráficos e usam álgebra e geometria. Neste nível, sua noção de funções, que eles já entendem bem, envolve a representação de diferentes notações já integradas como a imagem mental. Por exemplo, é fácil para eles encontrar a equação resultante do gráfico, e o gráfico resultante da equação.

Nível 4. Nível de cálculo.

Os alunos descrevem e investigam o comportamento de funções usando o cálculo. No cálculo, as funções são descritas em termos de funções *derivadas* ou *primitivas*. Por exemplo, para descrever as características de uma função, usamos sua função derivada, que eles já aprenderam. A teoria do cálculo é uma teoria generalizada de tal tipo de descrição.

Nível 5. Nível de análise.

Um exemplo de linguagem usada para descrição é a análise funcional, que é uma meta-teoria do cálculo. A justificativa deste nível se baseia no desenvolvimento histórico e ainda não foi investigada.

As seguintes hipóteses de níveis de compreensão de Van Hiele para a *trigonometria* foram criadas por mim mesmo e uma aluna de mestrado, Janneshla Jugmohan, fazendo uma analogia a partir dos níveis de geometria e têm como objetivo serem usadas como uma possível trajetória de aprendizado.

Nível 1. Visualização.

O aluno é capaz de reconhecer um triângulo retângulo em diferentes orientações e diferenciar entre triângulos retângulos, escalenos e isósceles, além de identificar um triângulo retângulo no círculo unitário. É demonstrada capacidade para reconhecer corretamente os lados "opostos", "adjacentes" e "perpendiculares" em diversas orientações, além da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Nível 2. Análise

O aluno já percebe que, em um triângulo retângulo, para um ângulo fixo, as relações entre dois lados quaisquer permanecem as mesmas, independente do tamanho do triângulo (que é o conceito de *semelhança*). Reciprocamente, é desenvolvida a compreensão da função inversa, por exemplo, sin $x = ½ \therefore x = ?$

Os alunos já são capazes de começar a resolver alguns problemas práticos e teóricos relacionados aos triângulos retângulos usando razões trigonométricas.

Nível 3.Definição primitiva.

As descobertas mencionadas acima agora são formalizadas como definições em termos das razões entre os lados dos triângulos retângulos. Os alunos desenvolvem a compreensão da natureza crescente ou decrescente das funções trigonométricas para ângulos de até 180º, além das funções inversas associadas.

Nível 4. Definição de círculo.

A compreensão da definição abstrata de trigonometria como uma função no domínio dos números reais é desenvolvida em termos do círculo unitário. A definição de círculo unitário define as funções trigonométricas em termos de coordenadas x e y, e basicamente se tornam independentes do triângulo retângulo. Os alunos desenvolvem a compreensão da *periodicidade* e da representação *gráfica* das funções trigonométricas, além das *identidades* trigonométricas e da capacidade de prová-las.

Nível 5. Trigonometria esférica, etc.

O progresso pode ser estendido ainda mais até a trigonometria esférica, que é a trigonometria sobre a esfera, e pode ser estendido a outras superfícies, funções hiperbólicas, por exemplo, *sinh*, *cosh*, além do tratamento analítico das funções trigonométricas, como funções transcendentais, etc. Isso pode incluir as definições de funções trigonométricas como diferentes séries infinitas, assim como a aplicação de

Fourier e outras séries a diferentes partes da matemática e da física.

Land (1990) refletiu sobre a aplicação da teoria de Van Hiele ao ensino de *funções exponenciais e logarítmicas*, enquanto Nixon (2002) criou hipóteses sobre os níveis de aprendizado e compreensão de *sequências e séries*. Com base na análise do desenvolvimento histórico da álgebra abstrata, Nixon (2005) criou a hipótese da seguinte possível trajetória de aprendizado em espiral para a álgebra abstrata:

Nível 1. Perceptivo.

O foco recai sobre o aprendizado de diferentes métodos para a solução de determinados tipos de equação, por exemplo, polinômios lineares, quadráticos e cúbicos por meio de um equilibrio no estudo de algoritmos, fatoração, quadrados perfeitos, etc.

Nível 2. Conceitual.

Aqui ocorre um distanciamento da análise de métodos de solução individuais rumo à consideração das relações ou transformações entre eles. Por exemplo, perceber que todos os métodos de solução de polinômios envolvem a redução algébrica da equação original e a consideração das diversas maneiras em que isso é possível. A álgebra complexa, o teorema fundamental da álgebra e o trabalho de Gauss sobre a composição de formas estão acessíveis aos alunos neste nível.

Nível 3. Abstrato.

Neste nível, o conceito de grupo pode ser introduzido como uma maneira de compreender e organizar as simetrias de um polinômio e de diferenciar quais equações polinomiais podem ser resolvidas de forma algébrica. Anéis e corpos já podem ser introduzidos como extensões de modos de investigar e comparar as diferentes estruturas algébricas.

Gutierrez *et tal* (2004) também desenvolveram caracterizações de níveis de raciocínio de Van Hiele de alunos em *geometria tridimensional* para analisar as respostas de 299 alunos da 7ª à 11ª série (12 a 17 anos de idades) em New South Wales (Austrália). Curiosamente, alguns alunos apresentaram dificuldades para ver um cubo como um prisma retangular da mesma maneira em que tiveram dificuldades para perceber um quadrado como um retângulo. Além disso, vários confundiram uma afirmação com sua recíproca e pouquíssimos foram capazes de produzir provas formais.

Comentários Finais

A ordem fixa hierárquica de progressão por meio dos níveis de Van Hiele (ou seja, um aluno não pode estar no nível *n* sem ter passado pelo nível *n-1*) foi confirmada estatisticamente usando a análise de Guttman em diversos estudos, por exemplo, em Mayberry (1981), Usiskin (1982) e De Villiers (1987). Um estudo comparativo realizado por Smith & De Villiers (1989) com o teste de Usiskin (1982) e o teste da Universidade de Stellenbosch (1984) confirmou não apenas a natureza hierárquica dos três primeiros níveis, mas também indicou que classificações melhores dos níveis de pensamento dos alunos foram obtidas quando perguntas mais variadas e itens menos limitados foram utilizados.

Pegg & Davey (1989) realizaram um estudo comparativo da teoria de Van Hiele e da Taxonomia SOLO e descobriram que os descritores da segunda descreviam com maior precisão os níveis de raciocínio geométrico dos alunos. Contudo, ainda se discute se tal ganho de "precisão" obtido é válido com complexidade maior da Taxonomia SOLO.

Mais pesquisas são necessárias sobre como o uso de softwares de geometria dinâmica pode aprimorar, ou prejudicar, o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Idris (2009) relata que o uso de softwares de geometria dinâmica com um grupo experimental de alunos Malaios os auxiliou a atingir níveis mais altos de Van Hiele do que um grupo de controle que receberam ensino tradicional sem acesso a geometria dinâmica.

Uma das principais preocupações no ensino da geometria em todo o mundo é o contínuo baixo nível de raciocínio geométrico entre os próprios professores, e até que tal problema seja tratado adequadamente, provavelmente haverá pouco progresso na qualidade do ensino de geometria. Por exemplo, Van Putten (2008) descobriu, em um pós-teste, que apenas 45% dos professores da 10ª à 12ª série haviam atingido o Nível 3 de Van Hiele (embora houvesse melhoria significativa em relação ao pré-teste).

Tradicionalmente, observa-se a ocorrência do desenvolvimento da *capacidade de provar* a partir do Nível 3 de Van Hiele. Contudo, o modelo de Van Hiele vê a prova, principalmente, como um meio de *verificação,* e permanece sendo uma questão aberta para pesquisa se outras funções de prova, como a *explicação,* podem ou não serem utilizadas e desenvolvidas nos Níveis 1 e 2, visual e analítico, respectivamente (por exemplo, Mudaly & De Villiers (2000); De Villiers, 2004). Provas e argumentos visuais mais explicativos por simetria (reta, rotação, ponto) podem ser desenvolvidos e compreendidos por crianças em estágios anteriores?

E por fim, parece que um dos principais problemas pendentes de pesquisa sobre a teoria de Van Hiele é aquele do raciocínio hierárquico (inclusões de classes). O raciocínio particionado é consequência das estratégias tradicionais do ensino de geometria? E o raciocínio hierárquico poderia ser desenvolvido nos níveis 1 e 2 de Van Hiele por meio de diversas estratégias e do uso de ferramentas como softwares de geometria dinâmica?

Referências

ATEBE, H.U. & SCHÄFER, M. (2008). As soon as the four sides are all equal, then the angles must be 90°. Children's misconceptions in geometry. *African Journal of Research in Science, Mathematics e Technology Education*, 12(2), 47-66.

BRUNER, J.S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*. New York: Norton.

BURGER, W.F. & SHAUGHNESSY, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.

CASA, T.M. & GAVIN, M.K.(2009). Advancing Elementary School Students' understanding of quadrilaterals. In Craine, T. e Rubenstein, R. (2009). *Understanding Geometry for a Changing World*. 71st Yearbook, Reston, VA: NCTM, pp. 205-219.

CRAINE, T.V. & RUBENSTEIN, R.N. (1993). A Quadrilateral Hierarchy to Facilitate Learning in Geometry. *Mathematics Teacher* 86 (January), 30–36.

DE VILLIERS, M. (1986). *Boolean Algebra at school*. University of Stellenbosch: RUMEUS.

_________ (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele Theory: Some critical comments*. University of Stellenbosch: RUMEUS. (Disponível em: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHieleCritique-87.pdf)

_________ (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras*, 26, 18-27. (Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/needs.pdf)

_________ (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18. (Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/classify.pdf)

_________ (1998). To teach definitions or teach to define? In Olivier, A. e Newstead, K. (Eds). *Proceedings of PME 22*, Vol 2, 248-255. (Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/define.htm)

_________ (2003). *Rethinking Proof with Sketchpad 4*. Key Curriculum Press, USA.

_________ (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *The International Journal of Mathematical Education in Science e Technology*, 35(5), 703-724. (Disponível em: http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vanhiele.pdf)

_________ (2009). *Some Adventures in Euclidean Geometry*. Lulu Publishers. (Disponível em: http://www.lulu.com/content/7622884

DE VILLIERS, M. & NJISANE (1987). The Development of Geometric Thinking among Black High School Pupils in KwaZulu (R.S.A.), Proceedings of the Eleventh PME-conference, Montreal: Vol.3, pp.117-123, July 1987.

DE VILLIERS, M.; GOVENDER, R. & PATTERSON, N. (2009). Defining in Geometry. In Craine, T. e Rubenstein, R. (2009). *Understanding Geometry for a Changing World*. 71st Yearbook, Reston, VA: NCTM, pp. 189-203.

FEZA, N. & WEBB. P. (2005). Assessment standards, Van Hiele levels, and grade seven learners' understandings of geometry. *Pythagoras*, 62 (December), 36-47.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

FUYS, D., GEDDES, D. & TISCHLER, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *JRME Monograph No. 3*, NCTM.

GOVENDER, R. & DE VILLIERS, M. (2002).Constructive evaluation of definitions in a Sketchpad context. Proceedings of AMESA 2002. 1-5 July 2002, University of Natal, Durban, pp. 30-40. (Disponível em:http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/rajen.pdf

GOVENDER, M. (1995). Pupils' proof-writing achievement in circle geometry. Unpublished B.Ed. dissertation, University of Durban-Westville.

GUTIERREZ, A., PEGG, J. & LAWRIE, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proving abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th PME Conference*, Vol. 2, pp. 511-518.

HOFFER, ALAN. (1981). Geometry is More Than Proof. *Mathematics Teacher*, 74 (January):11- 18.

IDRIS, N. (2009). The impact of using Geometer's Sketchpad on Malaysian students' achievement and Van Hiele geometric thinking. *Journal of Mathematics Education*, Dec, Vol. 2, No. 2, pp. 94-107.

ISODA, M. (1996). The development of the language of function: An application of Van Hiele's levels. In Puig, L. e Gutierrez, A. *Proceedings of PME 20*, Vol. 3, 105-112.

LAND, J.E. (1990). Appropriateness of the Van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning. Ann Arbor, Mi. UMI Dissertation Services.

MAYBERRY, J.W. (1981). An Investigation of the Van Hiele levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. Unpublished doctoral dissertation, Univ. of Georgia, Athens.

MALAN, F.R.P. (1986). Onderrigstrategieë vir die oorgang van partisie denke na hierargiese denke in die klassifikasie van vierhoeke: enkele gevallestudies. [Teaching strategies for the transition of partition thinking to hierarchical thinking in the classification of quadrilaterals.] (Internal report no. 3). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Research Unit of Mathematics Education (RUMEUS).

MUDALY, V. & DE VILLIERS, M. (2000). Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. Pythagoras, 52 (August). 20-23. (Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf)

NIXON, E.G. (2002). An investigation of the influence of visualization, exploring patterns and generalization on thinking levels in the formation of concepts of sequences and series. Unpublished Masters thesis. Pretoria: UNISA.

NIXON, E.G. (2005). Creating and learning abstract algebra: Historical phases and conceptual levels. Unpublished DPhil Dissertation. Pretoria: UNISA.

NOHDA, N. (1992). Geometry teaching in Japanese school mathematics. *Pythagoras*, 28, April, 18-25.

PEGG, J. & DAVEY, G. (1989). Clarifying level descriptors for children's understanding of some basic 2-D geometric shapes. *Mathematics Education Research Journal* 1 (1): 16- 27.

SÁENZ-LUDLOW, A. & ATHANASOPOULOU, A. (2007). Investigating properties of isosceles trapezoids with the GSP: The case of a pre-service teacher. In Pugalee, D; Rogerson, A e Schinck, A, (Editors). *Proceedings of the 9th International Conference: Mathematics Education in a Global Community*, University of North-Carolina, September 7-12, 2007, pp. 577-582. (Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_SaenzLudlow-AthanasopoulouPaperEdit.pdf)

SMITH, E. & DE VILLIERS, M. (1989). A comparative study of two Van Hiele testing instruments. Poster presented at the 13th International Conference of PME, Paris. (Disponível em: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHiele-test-comparison.pdf)

SMITH, R. R. (1940). Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. *The Mathematics Teacher*, 33, 99-134, 150-178. The Mathematical Association of South Africa. (1978). *South African Mathematics Project: Syllabus Proposals*. Pretoria: MASA. (Now Wits: AMESA).

UNIVERSITY OF STELLENBOSCH. (1984). *Levels of thinking in geometry: Tests 1 e 2*. Unit for Research in mathematics Education, Researchers: P.G. Human e M.D. de Villiers. (Disponível, respectivamente, em: http://www.scribd.com/Geometry-Levels-of-Thinking-Test-1-1984/d/30882207 e http://www.scribd.com/doc/30882101/Geometry-Levels-of-Thinking-Test-2-1984

USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Final report of the CDASSG Project. Chicago: Univ. of Chicago.

VAN HIELE, P.M. (1973). *Begrip e Inzicht*. Muusses: Purmerend.

VAN PUTTEN, S. (2008). Levels of Thought in Geometry of Pre-service Mathematics Educators according to the van Hiele Model. Unpublished Master's thesis, University of Pretoria. (Disponível em: http://upetd.up.ac.za/thesis/available/etd-05202008-130804/unrestricted/dissertation.pdf

WOOD, D., BRUNER, J.S., & ROSS, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Psychology and Psychiatry*. 17.

WIRSZUP, I. (1976). Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry. In J.L. Martin (Ed.). *Space and Geometry*. Columbus, Ohio: Eric Centre.

WU, D. & MA, H. (2006). The distribution of Van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In Novotna, J. *et al*, *Proceedings of PME 30*, Vol 5, pp. 409-416. Prague: PME.