ISSN 1516-5388

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

v. 5 – n. 2 – 2003

educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA v. 5 – n. 2 educ

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática

puc-sp

A ***Educação Matemática Pesquisa*** conta com o trabalho de pareceristas *ad hoc*.

Correspondência:

Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Rua Marquês de Paranaguá, 111 – CEP 01303-050 – Consolação – São Paulo – SP

Fone: (55-11) 3124-7200 / 7210

Fax: (55-11) 3159-0189

E-mail: edmat@pucsp.br e mpedmat@pucsp.br

http://www.pucsp.br/pos/edmat

Expediente: de segunda a sexta-feira das 9h às 12h e das 14h às 18h

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA

revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática
puc-sp

ISSN 1516-5388

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 5, n. 2, pp. 1-112, 2003

educ
2003

Catalogação na fonte – Biblioteca Reitora Nadir Gouvêa Kfouri / PUC-SP

Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - n. 1 (março de 1999) - São Paulo : EDUC, 1999 - semestral
ISSN 1516-5388

1. Educação Matemática Pesquisa - periódicos. I. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

EDUC – Editora da PUC-SP

Direção
Maria Eliza Mazzilli Pereira
Denize Rosana Rubano

Coordenação Editorial
Sonia Montone

Revisão
Sonia Rangel

Revisão de Inglês
Carolina Muniz Ventura Siqueira

Editoração Eletrônica
Digital Press

Capa
Sara Rosa

educ
Rua Ministro Godói, 1.197
Cep 05015-001 - São Paulo - SP
Telefax: (11) 3873-3359
E-mail: educ@pucsp.br
Site: www.pucsp.br/educ

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Associação Brasileira de Editores Científicos
ABEC

ABDR
EDITORA AFILIADA

Projeto Editorial

A revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, de regularidade semestral, constitui um espaço de divulgação de pesquisas científicas da área.

O projeto editorial da revista prioriza artigos científicos, inéditos no Brasil, da área de Educação Matemática. Mais particularmente os relacionados às linhas de pesquisa do Programa: A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores; História, Epistemologia e Didática da Matemática; e Tecnologias da Informação e Didática da Matemática. A prioridade dada às linhas descritas não é extensiva aos referenciais teóricos, ao contrário, procura-se contemplar a diversidade.

Serão acolhidos, também, artigos que favoreçam o diálogo entre Educação Matemática e áreas afins, como a Matemática, a Epistemologia, a Psicologia Educacional, a Filosofia, a História da Matemática e a História das Disciplinas, entre outras.

A seleção dos artigos faz-se mediante a aprovação de dois pareceristas do conselho editorial ou *ad hoc*. Os pareceres serão enviados aos autores.

Os artigos são apresentados sempre na versão original, com resumos bilingües (português e inglês ou francês).

O projeto editorial prevê, ainda, que os volumes da revista contenham uma ou mais modalidades, como análises ou relatos de pesquisa; comunicações (ciclo de palestras, conferências); entrevistas, depoimentos ou resenhas científicas.

Em cada número, haverá indicações sucintas das dissertações e teses produzidas no Programa, no semestre de edição.

Conselho Editorial

Editorial Project

The journal Educação Matemática Pesquisa *of the Post-Graduation Program in Mathematics Education of the Catholic University of São Paulo (PUC/SP) is published every semester with the aim of providing a space for disseminating scientific research in the area.*

The policy adopted by the editors is to prioritise scientific articles which have not been published in Brazil, related to Mathematics Education, particularly those addressing the lines of research of the program: Mathematics, curriculum structure and teacher training; History, Epistemology and Didactics of Mathematics; and Information Technology and the Didactics of Mathematics. The priority given to the described lines is not restricted to theoretical references; on the contrary, it is hoped that the journal will reflect the diversity that characterizes research in Mathematics Education.

The editors also encourage the submission of articles which open dialogues between Mathematics Education and related areas, such as Mathematics, Epistemology, Educational Psychology, Philosophy, History of Mathematics and its teaching, amongst others.

In order to be selected, articles should receive two favourable reviews. Referees will be chosen from the editorial committee or they will be ad hoc reviewers. Authors will receive copies of the reviews.

Articles will be presented always in the original language of the author along with abstracts in Portuguese and English or French.

The journal can also include works of various different types, such as: research reports, papers based on lectures or conferences, interviews, commentaries on issues pertaining to research, critiques of articles and books, literature reviews and theoretical analyses.

Each issue, will also include brief descriptions of the dissertations and theses produced in the Program during the semester of the edition.

Editorial Committee

Sumário

Editorial

Neste número, apresentamos um artigo de Josep Gascón, da Universidade Autônoma de Barcelona, que discute um modelo criado pela didática da matemática para estudar as diferentes formas de organizar o estudo da matemática nas instituições escolares, ou seja, as organizações didáticas possíveis, com destaque às oficinas de práticas matemáticas. O professor Gascón reivindica a "ambição irrenunciável de construir uma ciência que tenha, como objeto de estudo, as condições de criação e de difusão dos saberes matemáticos nas instituições sociais".

O segundo artigo é de autoria de Rosa María Farfán, do Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, sobre o tema "uma investigação em matemática educativa: da propagação do calor à noção de convergência", em que é apresentado um estudo epistemológico de uma investigação sobre convergência de séries e que tem como resultado o fato de que determinar o estado estacionário do sistema conduz, necessariamente, a um estudo da convergência de uma série trigonométrica infinita. É apresentada no artigo uma panorâmica de diversos estudos, dos quais derivam o projeto de uma linguagem gráfica e a reprodutibilidade de situações didáticas de uma perspectiva socioepistemológica.

O terceiro artigo foi elaborado pelo pesquisador Sthepen Lerman, da South Bank University, de Londres. Nele, Lerman examina projetos de pesquisa que consideram como o pensamento matemático é produzido na sala de aula e como diferentes formas de pedagogia têm diferentes impactos sobre diferentes grupos de aprendizes. E discute como perspetivas sociológicas e perspetivas psicológicas podem ser combinadas para subsidiar pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Finaliza este número o artigo escrito por Marcelo Bairral, do Instituto de Educação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Nele, Bairral se propõe investigar a contribuição de ambiente virtual para a formação continuada de professores em geometria.

Editores

Editorial

In this edition, we present an article by Professor Josep Gascón, from the Autonomous University of Barcelona, Spain, in which he discusses a model informed by didactics of mathematics, developed in order to analyse different forms of organising the study of school mathematics in institutions, that is, possible didactical organizations, with particular emphasis on workshops of mathematical practice. Professor Gascón argues for work motivated by the "irrefutable ambition of elaborating a kind of science that has as its main focus the conditions for elaboration and diffusion of mathematical knowledge in social institutions."

The second article is by Professor Rosa María Farfán, from the Educative Mathematics Department, Cinvestav-IPN Mexico, and describes an investigation relating physics and mathematics. The article presents an epistemological study of convergence of series which shows that determining the stationary state of a system necessarily leads to consideration of the convergence of an infinite trigonometric series. It also provides a panorama of other studies involving the production of didactic situations, integrating the use of graphic language within the social-epistemological approach that helped to shape the described project.

The third article is a contribution of Professor Stephen Lerman, from the South Bank University in London. He argues for the importance of including sociological analyses alongside psychological and epistemological approaches in order to understand learners' engagement in mathematical thinking. He also stresses the importance of determining complementary theories of sociology and psychology, suggesting that the ideas of Bernstein and Vygotsky might be combined to build an understanding of how mathematical thinking is regulated and produced in particular sociogenetic circumstances.

The fourth article, by Professor Marcelo Bairral, from the Federal Rural University of Rio de Janeiro, is entitled "Learning to learn geometry in virtual environments. An analysis of teachers' meanings for the notion of measure". It analyses a professional development distance-learning course for mathematics teachers in which the focus was on the meanings negotiated by the participants in the process of collaborative discussions about concrete situations of teaching practice. The semantic analysis, according to the author, presents aspects of this process and shows that it is possible for teachers to learn geometry when they share their doubts and experiences whilst critically reflecting upon them.

The Editors

La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas*

JOSEP GASCÓN**

Resumo

A luta para eliminar a *mentalidade mágica* tem se prolongado na cultura ocidental por milênios e, tem marcado o desenvolvimento de todas as disciplinas científicas. O processo de "desmagificação" tem ocorrido conjuntamente ao uso progressivo de *modelos* criados por uma dada disciplina. No que concerne à *didática das matemáticas*, dado que fazemos parte da geração fundadora dessa disciplina, podemos todavia dizer que estamos imersos em pleno processo de "desmagificação". Neste artigo, apresenta-se de forma muito esquemática um modelo criado pela didática das matemáticas para investigar as formas de organizar o estudo das matemáticas nas instituições escolares, isto é, *organizações didáticas* possíveis. Como fruto da utilização desse modelo, temos desenhado uma nova atividade de ensino e aprendizagem: as "Oficinas de Práticas Matemáticas".

Palavras-chave: teoria antropológica do didático (TAD); organização didática (OD); Oficinas de Práticas Matemáticas.

Abstract

The fight to eliminate the "magic mentality" *has been going on for millennia in the Western culture and has affected the development of all scientific disciplines. This process of "dismagicfication" has been occurring together with the progressive use of* models *created by a certain discipline. As for* didactics of mathematics, *as we belong to the founding generation of this discipline, we can say that we are still immersed in the process of dismagicfication. This paper presents, in a very summarised form, a model created by didactics of mathematics to investigate different forms of organising the study of mathematics in educational institutions, that is, the possible* didactic organisations. *The use of this model has brought on the design of a new teaching and learning activity: the "Workshop of Mathematical Practices".*

Key-words: *anthropologic theory of the didactic; Didactic organization; Workshop of Mathematical Practices.*

---

* Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT (MCT). Una versión provisional del mismo fue expuesta por el autor en las XI JAEM (Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas) celebradas en Tenerife y Gran Canaria los días 2 a 5 de julio de 2003.

** Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona. E-mail: gascon@mat.uab.es

Resumen
La lucha para eliminar la mentalidad mágica se ha prolongado durante milenios en la cultura occidental y ha marcado el desarrollo de todas las disciplinas científicas. Este proceso de "desmagificación" siempre ha ido acompañado de la utilización progresiva de modelos creados por la disciplina en cuestión. En lo que concierne a la didáctica de las matemáticas, y dado que formamos parte de la generación fundadora de esta disciplina, podemos decir que estamos todavía inmersos en pleno proceso de desmagificación. En este artículo se presenta, de forma muy esquemática, un modelo creado por la didáctica de las matemáticas para estudiar las formas de organizar el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares, esto es, las organizaciones didácticas posibles. Como fruto de la utilización de dicho modelo hemos diseñado una nueva actividad de enseñanza y aprendizaje: los "Talleres de Prácticas Matemáticas".
Palabras-clave: *Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); Organización Didáctica (OD); Talleres de Prácticas Matemáticas.*

La didáctica de las matemáticas, ¿ciencia o magia?

En su intervención en la Conferencia Científica internacional celebrada en Roma el año 2002, Umberto Eco habló sobre "La recepción de la ciencia por parte de la opinión pública y de los medios de comunicación". En esta alocución el semiólogo italiano sostiene que, aunque creemos que vivimos en la Edad de la Razón, dominada por la ciencia, en realidad seguimos sometidos a la *mentalidad mágica* que siempre resurge de sus cenizas y que se sustenta en la exigencia de la satisfacción inmediata de nuestros deseos.

> ¿Qué es la magia, qué ha sido durante los siglos y qué es, todavía hoy, aunque bajo una falsa apariencia? La presunción de que se podía pasar de golpe de una causa a un efecto por cortocircuito sin completar los pasos intermedios. Clavo un alfiler en la estatuilla que representa al enemigo y éste muere, pronuncio una fórmula y transformo el hierro en oro, convoco a los ángeles y envío a través de ellos un mensaje. La magia ignora la larga cadena de las causas y los efectos y, sobre todo, no se preocupa de establecer, probando y volviendo a probar, si hay una relación entre causa y efecto. De ahí su fascinación desde las sociedades primitivas hasta nuestro renacimiento solar y más allá, hasta la pléyade de sectas ocultistas omnipresentes en Internet. (Eco, 2002)

En este sentido Eco adjudica a la consideración popular de la *tecnología* un carácter mágico, puesto que la tecnología oculta la cadena de las causas y los efectos y así, por ejemplo, el usuario vive la tecnología del ordenador como pura magia.

En mi opinión, una diferencia esencial entre el *mago* y el *científico* consiste en que mientras el mago, en su soberbia, tiene la osadía de dar *respuestas definitivas*, el científico se esfuerza humildemente por plantear *preguntas* que sólo aceptarán *respuestas provisionales*. Mientras que las *teorías científicas* son modelos tentativos de ciertos aspectos de la realidad, la *magia* pretende captar la realidad en su totalidad para dominarla y someterla.

Toda teoría científica *modeliza* (algún aspecto de) un sistema o ámbito de la realidad. Los modelos científicos son instrumentos (máquinas) para producir conocimientos sobre el sistema estudiado que no pueden obtenerse trabajando directamente dentro del sistema. La magia, por el contrario, pretende *actuar* sobre la realidad de una manera *inmediata* y *directa* a partir de las acciones sobre ciertas representaciones simbólicas de la realidad (por ejemplo, "clavar un alfiler en la estatuilla que representa el enemigo" o "pronunciar unas palabras mágicas").

Según Max Weber el progreso científico podría describirse como un proceso de "desmagificación" que se ha prolongado durante milenios en la cultura occidental (Weber, 1959). Esta lucha para eliminar la *mentalidad mágica* en la explicación de los hechos ha estado presente a lo largo de la historia y se ha hecho especialmente visible en los periodos de emergencia y consolidación de las ciencias tanto "naturales" como "humanas". Es fácil rastrear huellas de esta lucha en los orígenes de la mayoría de las disciplinas; desde la física, la química, la biología y la medicina, hasta la psicología, la sociología, la ciencia política y la historia. En todos los casos esta desmagificación ha ido acompañada de la *modelización del sistema estudiado* que, como ya he dicho, sólo puede tomar en consideración algunos aspectos de dicho sistema.

En lo que concierne a la *didáctica de las matemáticas*, y dado que formamos parte de la generación fundadora de esta disciplina, podemos decir que estamos todavía inmersos en pleno proceso de *desmagificación*. Así, es habitual encontrarnos todavía con ilusionistas, no siempre desinteresados, que proponen soluciones "mágicas" a los problemas que los profesores de matemáticas nos planteamos. Dichas soluciones suelen presentarse en forma de *eslóganes pedagógicos* que, naturalmente, pretenden dar soluciones *inmediatas*, *directas* y *completas* a los problemas que el "sentido común" plantea utilizando las nociones aceptadas y vigentes en la cultura escolar.

Citaré a continuación algunas de las recetas mágicas que se proponen para responder a lo que considero que son genuinos *problemas docentes* y que, por lo tanto, merecen – los problemas subyacentes – ser analizados con más cuidado.

> R1. La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en (o girar en torno a) la actividad de *resolución de problemas.*
> R2. La *motivación* de los alumnos tiene una importancia crucial en el aprendizaje. El profesor debe proponer problemas *concretos* relacionados con la *vida cotidiana* (porque lo *concreto* es motivador y fácil, frente a lo *abstracto* que es aburrido y difícil).
> R3. El *juego* es un medio natural y eficaz para aprender matemáticas.
> R4. La enseñanza *interdisciplinar* es preferible a la enseñanza de las matemáticas aisladas.
> R5. Las *herramientas informáticas* son eficaces para enseñar y aprender matemáticas.
> R6. La educación matemática debe ser cada vez más *individualizada y personalizada* para responder a la exigencia creciente de *atención a la diversidad.*
> R7. Es preferible *innovar* que seguir con la *enseñanza tradicional* de las matemáticas.
> R8. A fin de superar sus preconceptos erróneos y resolver los problemas docentes, el profesor debe *reflexionar de manera descondicionada y colectiva.*

Si nos tomamos en serio los problemas que estas recetas pretenden resolver de un plumazo, veremos que cada uno de ellos merece un estudio científico serio y, por lo tanto, requiere la *utilización de modelos* que deberá elaborar la didáctica de las matemáticas. Aquí empezaré a responder a la *cuestión* que pretende zanjar el primero de los eslóganes citados y que puede formularse como sigue:

> *¿Cuál es el papel que juega o debería jugar la actividad de resolución de problemas en el proceso global de la enseñanza escolar de las matemáticas?*

Para responder a esta cuestión de una manera más fecunda y más útil que las recetas mágicas es imprescindible *elaborar un modelo* que nos permita analizar de manera sistemática y bajo ciertas hipótesis explícitas, los múltiples papeles que puede jugar la actividad de resolución de problemas en el sistema de enseñanza de las matemáticas. Éste será, por lo tanto, el objetivo principal de este trabajo. Mostraré, en resumen:

(1) Que la didáctica de las matemáticas, como toda ciencia teórico-experimental, construye y utiliza *modelos de la realidad* que estudia, no pretende manipular directamente la realidad misma, ni reproducirla fotográficamente.

(2) Que el eslogan "La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en la actividad de resolución de problemas" es, como todos, absolutamente inútil por su terrible ambigüedad. Veremos que existen múltiples maneras de "centrarse en la resolución de problemas", y que cada una de ellas asigna funciones muy diferentes y hasta contradictorias a la actividad de resolución de problemas.

Elementos de la teoría antropológica de lo didáctico

Para construir un modelo debemos situarnos en una teoría didáctica concreta. En nuestro caso nos situamos en la teoría antropológica de lo didáctico que se enmarca dentro del Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas. Este Programa nació como fruto de la convicción de que muchos de los problemas de la Educación Matemática tienen su origen en las propias *matemáticas enseñadas* y que, por tanto, se debe tomar la actividad matemática como objeto primario de estudio, esto es, como nueva "puerta de entrada" del análisis didáctico.[1] La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en el ámbito de dicho Programa, empieza proponiendo un modelo epistemológico general de

1 Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

las matemáticas en términos de *organizaciones matemáticas institucionales* (Chevallard, 1997, 1999, 2000, 2002a y 2002b). Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que *es* una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: *tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías.* Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o "*praxis*", $[T/\tau]$, formada por las *tareas*, T, y las *técnicas* matemáticas, τ; y el "*logos*", $[\theta/\Theta]$, constituido por el *discurso matemático* que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la *tecnología*, θ, que hace referencia directa a la práctica y la *teoría*, Θ, que constituye un segundo y último nivel de justificación de la práctica (o tecnología de la tecnología). Al unir las dos caras de la actividad matemática, *praxis* y *logos*, se obtiene la noción de *praxeología matemática*.

Las organizaciones (o praxeologías) matemáticas más elementales se llaman *puntuales* y están constituidas alrededor de lo que en una determinada institución es considerado como un único tipo de tareas. Cuando una OM se obtiene por integración de cierto conjunto de OM *puntuales*, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico θ, diremos que tenemos una OM *local* caracterizada por dicha tecnología θ y la designamos mediante OM = $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Más allá de las OM locales, la TAD se habla también de OM "regionales" y "globales" (Chevallard, 1999).

Pero, ¿qué se necesita para elaborar una OM? Esto es, ¿cuáles son las condiciones que posibilitan el desarrollo de las actividades matemáticas institucionalizadas? O, en otros términos, ¿cuáles son los medios de que dispone el matemático investigador o el alumno de matemáticas para llevar a cabo una actividad matemática que cristalice en una OM que responda a ciertas cuestiones?

Ante todo hay que decir que, tanto el investigador como el alumno, cada uno en su nivel, utilizan *técnicas didácticas*, esto es, *técnicas de estudio*, cuya eficacia depende de su integración en un proceso, el *proceso de estudio* de una OM en el seno de una institución. Como toda actividad humana, la actividad de estudio (de las matemáticas) requiere de un discurso (en este caso "didáctico") más o menos explícito que justifique e interpreta la práctica. Paralelamente a la noción de OM surge así la noción de *organización* (o *praxeología*) *didáctica*, OD, con sus dos caras: "praxis" – formada por *tareas* y *técnicas didácticas* – y discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica – formado por *tecnologías* y *teorías didácticas*.[2]

La TAD completa este modelo epistemológico "estructural" del saber matemático y de su estudio con un modelo "funcional" de la *actividad didáctica* o *actividad de estudio* (de las matemáticas). Se trata de la *teoría de los momentos didácticos* que puede considerarse como un modelo funcional del proceso de estudio de las OM. La teoría de los *momentos didácticos* propone seis momentos o *dimensiones* del proceso de estudio. Según Chevallard (1999, pp. 250-255):

> El *primer momento* del estudio es el del *primer encuentro* con la organización O que está en juego. Un tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro – o de "reencuentro" – inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra O, es el que consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas T_i constitutivas de O. [...]
> El *segundo momento* es el de la *exploración* del tipo de tareas T_i y de la *elaboración de una técnica* τ_i relativa a este tipo de tareas. [...] En realidad, el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger: el estudio de un problema *particular*, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un *medio* para que la constitución de una técnica de resolución.
> El *tercer momento* del estudio es el de la *constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ_i. De una manera general, este momento está en interrelación estrecha con *cada uno* de los otros

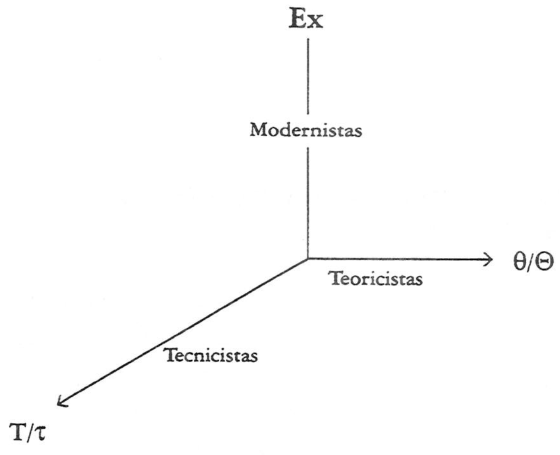
> global, a veces las estrategias de dirección de estudio tradicionales hacen en general de este tercer momento la *primera etapa* del estudio [...].
>
> El *cuarto momento* es el del *trabajo de la técnica*, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable (lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces), y acrecentar la maestría que se tiene de ella: este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular uno o unos corpus de tareas adecuados tanto cualitativamente como cuantitativamente. [...]
>
> El *quinto momento* es el de la *institucionalización*, que tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la OM elaborada, distinguiendo claramente, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no le hayan sido integrados y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la organización matemática considerada [...].
>
> El *sexto momento* es el de la *evaluación*, que se articula con el momento de la institucionalización [...]. En la práctica, llega siempre un momento en el que se debe "hacer balance": porque este momento de reflexión donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina lo que *vale* lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la Escuela, participa de hecho de la "respiración" misma de toda actividad humana.

En resumen, para elaborar una OM se necesita una OD que posibilite y gestione un *proceso de estudio* cuya dinámica puede ser descrita en términos de los seis momentos o dimensiones del mismo. Aunque, en realidad, la frontera entre lo matemático y lo didáctico no está establecida de una vez por todas, puesto que históricamente se ha producido una matematización creciente de lo didáctico y, muy en particular, de las técnicas de estudio de las matemáticas. Si, en principio, la *actividad de estudio* puede ser considerada como *emergente de una* OM (en tanto que actividad dirigida a responder las cuestiones problemáticas que la OM permite plantear), también debe considerarse como *productora de saber matemático* y, por tanto, de ciertas OM. Lo matemático y lo didáctico aparecen así como dos dimensiones de la realidad doblemente interdependientes. Lo didáctico, esto es, lo relativo al estudio de las matemáticas, supone la existencia de las OM, pero contribuye a su producción. Las OM son, a la vez, el *objeto* y el *producto* de la actividad de estudio.

Un modelo del espacio de las organizaciones didácticas posibles

Para empezar a caracterizar las *organizaciones didácticas* (en adelante OD), esto es, las maneras posibles de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en una institución docente concreta, necesitamos un punto de vista previo que nos proporcione criterios sobre qué debemos mirar y con qué nociones primitivas debemos describir lo que observamos. Esto es imprescindible para poner un poco de orden en las complejas *prácticas docentes del profesor de matemáticas*. En un trabajo anterior (Gascón, 2001) he utilizado la *teoría de los momentos didácticos* (que, como hemos dicho, es una parte integrante de la TAD) para elaborar una primera versión de un "sistema de referencia" que permite situar cada una de las OD posibles en correspondencia con algunas de las *dimensiones* o *factores* de la actividad matemática. Aquí describiré brevemente este modelo desarrollando esta metáfora geométrica en la dirección iniciada en Bosch y Gascón (2002).

Se trata de un hipotético espacio tridimensional cada uno de cuyos puntos representa una OD *ideal posible*. Los ejes del sistema de referencia que he seleccionado vienen representados por tres de los momentos o dimensiones de la actividad matemática: el momento *tecnológico-teórico*, θ/Θ, el momento del *trabajo de la técnica*, T/τ, y el momento *exploratorio*, Ex. En cada uno de estos ejes se sitúan OD ideales que llamamos *unidimensionales* porque se caracterizan por centrar el proceso de estudio en una única dimensión del proceso de estudio (la que corresponde al eje en cuestión) dándole a ésta una prioridad absoluta y olvidando, o asignando un papel muy secundario, a las restantes dimensiones. Aparecen así, respectivamente, las OD ideales ***teoricistas***, ***tecnicistas*** y ***modernistas***.



Entre las OD ideales que toman en consideración y empiezan a integrar dos momentos o dimensiones de la actividad matemática citaré otros tres tipos. Tenemos, en primer lugar, las OD ***clásicas***[3], que combinan los momentos *tecnológico-teórico*, θ/Θ, y del *trabajo de la técnica*, T/τ, y se caracterizan, entre otras cosas, por la trivialización de la actividad de resolución de problemas y por considerar que la enseñanza de las matemáticas es un proceso mecánico totalmente controlable por el profesor.

En segundo lugar tenemos las OD ***empiristas***[4], que pretenden integrar los momentos *exploratorio*, Ex, y del *trabajo de la técnica*, T/τ. Se caracterizan por la preeminencia que otorgan a la actividad de resolución de problemas dentro del proceso didáctico global y por considerar que el aprender matemáticas (al igual que aprender a nadar o a tocar el piano) es un proceso inductivo basado en la imitación y en la práctica.

Tenemos, por último, las OD ***constructivistas***[5], que toman simultáneamente en consideración los momentos *tecnológico-teórico*, θ/Θ, y *exploratorio*, Ex. Se caracterizan por contextualizar la actividad de

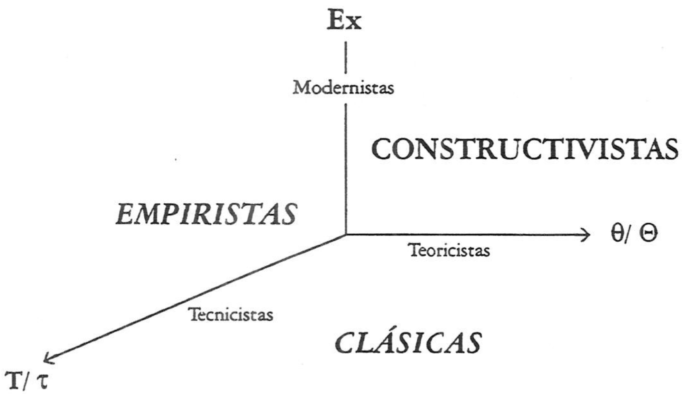
3 Las OD *teoricistas* y *tecnicistas* son organizaciones clásicas *extremas*, puesto que ambas son unidimensionales (Gascón, 2001).

4 Entre las OD *empiristas* analizaremos las *modernistas* (que son unidimensionales) y las *procedimentalistas* que toma en consideración dos dimensiones del proceso didáctico.

5 En lo que sigue analizaremos dos tipos particulares de OD constructivistas que hemos denominado, respectivamente, *constructivismo psicológico* y *constructivismo matemático*.

resolución de problemas situándola en una actividad más amplia y por considerar que el aprendizaje es un proceso activo de construcción de conocimientos que se lleva a cabo siguiendo unas fases determinadas y que depende esencialmente de los conocimientos adquiridos con anterioridad.

Cada uno de estos tres tipos de OD ideales bidimensionales: clásicas, empiristas y constructivistas, se sitúan en uno de los *planos coordenados* del sistema de referencia que hemos elegido en nuestro espacio de OD ideales posibles; el determinado por los dos ejes correspondientes a las dimensiones del proceso didáctico que cada uno de ellos toma en consideración.



Hemos mostrado que cada uno de esos tipos de OD se sustenta en un *modelo epistemológico general* de las matemáticas, esto es, en una forma particular y relativamente precisa de interpretar y describir la organización matemática escolar considerada como un todo. En concreto, las OD clásicas se sustentan en el ***euclideanismo***; las OD empiristas en los modelos epistemológicos ***casi-empíricos*** y las OD constructivistas en los modelos epistemológicos ***constructivistas***[6] (Gascón, 2001).

---

6 Los tipos de OD que hemos esquematizado muy brevemente son *tipos ideales* que *no han existido ni existirán nunca en estado puro* en ninguna institución escolar. Las OD efectivamente existentes en las instituciones escolares participan, en mayor o menor medida, de varios tipos de OD ideales, por lo que siempre tienen un carácter mixto y mucho más complejo.

Enseñar matemáticas es "mostrar" teorías cristalizadas: el teoricismo

Denominaremos *organizaciones didácticas teoricistas* o, simplemente ***teoricismo***, a las que se sustentan en una concepción del saber matemático que pone el acento en los conocimientos acabados y cristalizados en "teorías", al tiempo que se pone entre paréntesis la *actividad* matemática y sólo se toma en consideración el fruto final de esta actividad. Se trata de OD sustentadas en uno de los principales rasgos del *euclideanismo*, el que pretende que todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (*axiomas*) que pueden enunciarse utilizando únicamente términos perfectamente conocidos (*términos primitivos*).

Cuando en un sistema de enseñanza predomina el teoricismo se suele producir la concentración de los esfuerzos didácticos en el "*momento del primer encuentro*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) – esto es, en el momento en que el profesor presenta a los alumnos un cuerpo de conocimientos cristalizados en una teoría. La razón es sencilla: para el teoricismo, que identifica "*enseñar y aprender matemáticas*" con "*enseñar y aprender teorías*", el proceso didáctico empieza, y prácticamente acaba, en el momento en que el profesor "enseña" (en el sentido de "muestra") estas teorías a los alumnos (Gascón, 1994).

Tenemos, en resumen, el siguiente silogismo: dado que las teorías matemáticas se deducen por canales deductivos a partir de un conjunto de axiomas trivialmente verdaderos en los que sólo figuran términos perfectamente conocidos y dado que enseñar matemáticas es *mostrar estas teorías*, resulta que *la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debería ser, también, un proceso "trivial"*. Pero todos los datos empíricos disponibles contradicen esta conclusión y es especialmente paradójica en las instituciones en las que predomina el teoricismo. En estas instituciones es muy difícil dar razón de las enormes dificultades que tienen los estudiantes para *utilizar* adecuadamente un teorema, *aplicar* una técnica matemática o *comprobar* si un objeto matemático cumple o no cumple las cláusulas de una definición.

En cuanto a la resolución de problemas, hay que decir que en el teoricismo es considerada como una *actividad secundaria* dentro del proceso didáctico global y, en todo caso, como *auxiliar en el aprendizaje de las* *teorías*. Los problemas pueden utilizarse para *aplicar*, *ejemplificar* o *consolidar* los conceptos teóricos e, incluso, para *motivarlos*, *introducirlos* o *justificarlos* pero, en cualquier caso, la actividad de resolución de problemas no se considera" constitutiva del conocimiento matemático" propiamente dicho. En particular, se ignoran las tareas dirigidas a *elaborar estrategias de resolución* de problemas complejos y, por tanto, cuando aparece un problema que no puede resolverse mediante la aplicación inmediata de un teorema, entonces *el teoricismo trivializa los problemas mediante su descomposición en ejercicios rutinarios* (Gascón, 1989, p. 3 y ss.).

La característica esencial del teoricismo la situaremos, por tanto, en que ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y, en consecuencia, no concede ninguna importancia – epistemológica ni didáctica – a la *génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos*. Este prejuicio euclideanista que, contra toda evidencia empírica, presupone que el proceso de enseñanza de las matemáticas es un *proceso mecánico y completamente controlable por el profesor*, dificulta que la comunidad matemática nuclear (constituida por los productores del conocimiento matemático) pueda tomar seriamente en consideración los problemas didáctico-matemáticos como problemas científicos no triviales.

Entrenar en el uso de algoritmos: el tecnicismo

Dado que el teoricismo identifica "aplicar una técnica matemática" con "realizar una actividad absolutamente predeterminada por la teoría", resulta que en las instituciones docentes en las que impera este tipo de OD es muy difícil que se permita a los estudiantes trabajar tranquilamente una técnica hasta que ésta se desarrolle en sus manos. Este punto de vista puede provocar una catástrofe didáctica que es especialmente visible cuando afecta a los niveles más elementales de la enseñanza de las matemáticas. En la enseñanza primaria, en efecto, el menosprecio del dominio de las técnicas puede "vaciar" la enseñanza hasta el punto de que al final del proceso didáctico los alumnos no puedan mostrar ningún aprendizaje efectivo, ni siquiera el dominio de las operaciones aritméticas. En este punto parece natural el grito defensivo de ¡*volver a lo básico*! para no perderlo todo. Surgen así OD que enfatizan los aspectos más rudimentarios del *momento del trabajo de la técnica* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Las llamaremos OD *tecnicistas* o, más brevemente, ***tecnicismo***.

Las tendencias tecnicistas aumentan después de épocas fuertemente teoricistas (como la que marcó el apogeo de la "*matemática moderna*" en los años sesenta y setenta) y, en general, en periodos de fuerte contestación social al aumento del fracaso escolar en matemáticas. El hecho de que muchos profesores se vean abocados al tecnicismo debe ser considerado como un *fenómeno didáctico* esencialmente independiente de la voluntad y de la formación de los profesores.

Las OD tecnicistas identifican implícitamente "enseñar y aprender matemáticas" con "*enseñar y aprender técnicas* (*algorítmicas*)" con el reduccionismo que esto implica. En particular, al enfatizar las técnicas "simples", el tecnicismo tiende a olvidar los "auténticos" problemas que son aquellos cuya dificultad consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución". En este sentido puede decirse que el tecnicismo comparte con el teoricismo la *trivialización de la actividad de resolución de problemas*, aunque la naturaleza de la "trivialización" es diferente. En el tecnicismo se parte de ciertas técnicas algorítmicas y se proponen únicamente aquellos ejercicios que sirven como "entrenamiento" para llegar a dominarlas; de esta forma se excluyen del repertorio de técnicas las estrategias de resolución que no son algorítmicas. La *trivialización de los problemas* no proviene aquí de una descomposición abusiva del problema, ni de adjudicar a la actividad de resolución de problemas un papel auxiliar, sino de una fijación en las técnicas elementales y algorítmicas que impide tomar en consideración problemas matemáticos no rutinarios.

Las OD teoricistas y tecnicistas comparten una *concepción psicologista ingenua* del proceso didáctico que tiene en el *conductismo* su referente más claro. En ambos casos se concibe el proceso de enseñanza como un *proceso mecánico y trivial totalmente controlable por el profesor*: el teoricismo tiende a concebir al alumno como una "*caja vacía*" que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar, paso a paso, a los sistemas conceptuales más complejos; el tecnicismo, por su parte, considera al alumno como un "*autómata*" que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición que proporciona un entrenamiento concienzudo. Hemos llamado *clásicos* a ambos tipos de OD, así como a todas las OD posibles que reducen el proceso de estudio a un juego entre el momento tecnológico teórico (característico del teoricismo) y los aspectos más rudimentarios del momento del trabajo de la técnica (característico del tecnicismo).

Para acabar de caracterizar el papel que juega la actividad de resolución de problemas en las OD clásicas, hay que decir que uno de los defectos más graves que comparten es el de tratar los problemas matemáticos como si éstos estuviesen *aislados* y *descontextualizados*. Esto significa, por una parte, que los problemas se tratan individualmente y nunca como representantes de ciertas *clases de problemas* y, por otra, que se tiende a presentar los problemas separados de su contexto, *sin ninguna conexión con el sistema* (matemático o extramatemático) a partir del cual surgen en el seno de una actividad matemática.

Aprender mediante una exploración *libre* y *creativa:* el modernismo

En las instituciones docentes en las que predominan las OD clásicas aparecen dificultades para gestionar el proceso de estudio de las matemáticas que tienen su origen del *engaño* que consiste en "motivar" y "justificar" la introducción de nuevos conceptos mediante problemas que están destinados a desaparecer de la escena, de la *trivialización* de los problemas, de la excesiva *algoritmización* de los conocimientos evaluables y, en definitiva, del *fracaso absoluto* de los alumnos cuando se enfrentan con problemas matemáticos no estandarizados.

Esta situación puede llevar a la necesidad de *rescatar la actividad de resolución de problemas* en sí misma, escandalosamente ignorada en las OD clásicas, y a tomarla como eje y finalidad de la actividad matemática y, por tanto, de todo el proceso didáctico. Denominaremos OD *modernistas* o, simplemente ***modernismo***, a esta forma de considerar el proceso didáctico que surge inicialmente como reacción a las evidentes limitaciones de las OD clásicas. En las instituciones docentes en las que predomina el modernismo se tiende a identificar la actividad matemática con la *exploración de problemas no triviales*, esto es, con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución (tantear técnicas diversas, aplicar algún resultado conocido, buscar problemas semejantes, formular conjeturas, buscar contraejemplos o intentar resolver un problema un poco diferente). En otras palabras, el modernismo se caracteriza por conceder una preeminencia absoluta al ***momento exploratorio*** (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); esto significa que identifica "aprender matemáticas" con *aprender la actividad exploratoria de problemas no triviales*.

Así, el *modernismo* reacciona contra la visión simplista de la enseñanza considerada como un proceso trivial, mecánico y totalmente controlable por el profesor. Traslada el centro de gravedad del proceso didáctico al *aprendizaje* y considera que dicho *proceso de aprendizaje* es un *proceso de descubrimiento inductivo y autónomo*.

Una forma de caracterizar los problemas "no triviales" es mediante la noción de *"problemas tipo olimpiadas"*. Callejo (1991) les adjudica las siguientes propiedades:

(a) Para resolverlos se debe utilizar una *combinación original de técnicas*.
(b) Es habitual tener que trabajar sobre ellos durante *largo tiempo*.
(c) No es habitual encontrar problemas semejantes en los *libros de texto*.
(d) Se trata de problemas que aceptan *varias estrategias de resolución*.

Incluso suelen ser resolubles en *más de un dominio matemático*.

El modernismo persigue explícitamente que la exploración sea realmente "libre" – también de las teorías y de las técnicas matemáticas – para que sea más *creativa*, en el sentido cultural de "no repetitiva", "sorprendente" y "original". Por ello el *aislamiento* y la *descontextualización* de los problemas, que ya era preocupante en las OD clásicas, se agravan todavía más en el modernismo.

Tenemos, en resumen, que teoricismo, tecnicismo y modernismo constituyen tipos de OD *extremadamente reduccionistas*. Cada uno de ellos *enfatiza una única dimensión de la actividad matemática*, ignorando las restantes (Gascón, 1994).

Aprender a utilizar una "directriz heurística": el procedimentalismo

El modernismo pretende *destrivializar la actividad matemática* ocultando las clases de problemas que constituyen el contexto en el que se sitúan los problemas y fingiendo que no existen técnicas matemáticas, esto es, maneras de hacer sistemáticas y compartidas que pueden ser enseñadas en la institución. Esta ocultación se realiza con la intención de asegurar que la exploración sea "libre" (de las técnicas matemáticas potencialmente útiles, para que éstas no disminuyan la libertad del "explorador") y "creativa" en el sentido cultural ingenuo de "sorprendente" y "no rutinaria", antes citado.

Pero existen otras maneras de *destrivializar el uso de las técnicas matemáticas*. Por ejemplo, acotando una clase de problemas suficientemente amplia y utilizando las *técnicas simples* para elaborar una *estrategia compleja* de resolución de problemas útil para abordar los problemas de dicho clase. Llamaremos OD *procedimentalistas*[7] o, mejor, ***procedimentalismo***, a las formas de organizar el estudio de las matemáticas que sitúan como principal objetivo del proceso didáctico el *dominio de sistemas estructurados de técnicas heurísticas* (en el sentido de no algorítmicas). Es en este sentido que el procedimentalismo completa y mejora la *destrivialización del conocimiento matemático* iniciada por el modernismo. Además, el procedimentalismo puede ser interpretado como la *completación del tecnicismo* puesto que desarrolla el trabajo de la técnica mucho más allá de las técnicas simples. Por todo ello podemos considerar que el procedimentalismo es una OD de *segundo orden*, puesto que relaciona funcionalmente dos dimensiones (o momentos) de la actividad matemática: el *momento exploratorio* y el *momento del trabajo de la técnica* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

En aquellas instituciones didácticas en las que predomina el procedimentalismo, la resolución de problemas se utiliza como una estrategia didáctica encaminada a que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de técnicas matemáticas o *patrones de resolución* en el sentido de Polya (1945, 1954 y 1962-65). Este punto de vista comporta necesariamente trabajar con "clases de problemas" y pone de relieve una cuestión central: ¿cómo determinar, en cada caso, *la amplitud más adecuada de la clase de problemas* que se tomará como dominio de validez de la estrategia de resolución que se quiere enseñar? (Gascón, 1989).

7 Dentro del espacio de las OD posibles descrito anteriormente, las OD procedimentalistas se sitúan en el plano de las OD *empiristas* porque integran dos dimensiones del proceso de estudio: el momento exploratorio (**Ex**) y el momento del trabajo de la técnica (**T**/ τ).

Génesis cognitiva de conocimientos: constructivismo psicológico

Analizaremos, para acabar, dos nuevas *OD* ideales que, por sustentarse en la epistemología constructivista, denominaremos respectivamente ***constructivismo psicológico*** y ***constructivismo matemático***. Mostraremos que ambas relacionan – aunque sea parcialmente – el *momento exploratorio*, esto es, la dimensión exploratoria de la actividad matemática, con el *momento tecnológico-teórico*, es decir, aquel momento de la actividad matemática en el que se elaboran justificaciones e interpretaciones de la práctica matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Incluiremos dentro de las OD ***constructivistas*** todas aquellas maneras de interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje que identifican "enseñar matemáticas" con posibilitar que los estudiantes *"construyan" los conocimientos matemáticos*.

Cuando no se hace ninguna referencia explícita a la naturaleza matemática de la propia actividad de construcción ni al contexto en el que se realiza dicha construcción y cuando se supone que se trata de un *proceso psicológico* y no de una actividad con relevancia matemática en sí misma, hablaremos de OD próximas al ***constructivismo psicológico***. Dentro de esta forma de constructivismo, se utiliza la resolución de problemas como un *simple medio* para "construir" conocimientos nuevos.

Hay que decir que existe una enorme variedad de maneras diferentes de entender la "construcción" de los conocimientos matemáticos así como el papel que desempeña la resolución de problemas en esa construcción. Aquí describiremos únicamente las dos variantes ideales extremas que hemos citado empezando por el *constructivismo psicológico*.

Para simplificar, tomaremos la descripción que hacen algunos autores de lo que denominan una "*situación problema*" (Arsac y otros, 1988). Esta caracterización nos servirá para entender mejor el papel que juega la actividad de resolución de problemas en el constructivismo psicológico.

(i) El alumno ha de poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder discernir lo que es una *solución posible*.

(ii) Los conocimientos del alumno deben ser, en principio, *insuficientes* para resolver el problema.

(iii) La "situación problema" debe permitir al alumno decidir si una solución determinada es *correcta o no*.

(iv) El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ("construya") debe ser la *herramienta más adecuada* para resolver el problema propuesto, en el nivel de los conocimientos del alumno. La construcción de este conocimiento constituye el objetivo fundamental del constructivismo psicológico.

El constructivismo psicológico relaciona funcionalmente dos dimensiones diferentes de la actividad matemática: el *momento exploratorio* y el *momento tecnológico-teórico*, dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas aunque sólo sea como *instrumento de la génesis de los conceptos*. Por esta razón no puede considerarse una OD "unidimensional". Continúa ignorando, sin embargo, la función del *trabajo de la técnica* en el aprendizaje de las matemáticas en general y en la resolución de problemas en particular.

Dado que las "*situaciones-problema*" se eligen en función del concepto o "conocimiento" que se quiere que el alumno "construya", resulta que el constructivismo psicológico está (en el espacio de las OD posibles) más cerca del teoricismo que del tecnicismo. El constructivismo psicológico presenta los problemas matemáticos tan aislados como el teoricismo y el tecnicismo y casi tanto como el modernismo. Pero el *sistema conceptual* en el que el concepto a construir ocupará su lugar, constituye un cierto contexto de la situación-problema que se ha elegido como instrumento de construcción de dicho concepto y permite decir que los problemas se presenten bastante más contextualizados que en las OD unidimensionales descritas anteriormente.

Génesis de conocimientos mediante modelización: constructivismo matemático

Llamaremos OD *modelizacionistas* o, simplemente, ***modelizacionismo***, a las formas de organizar el estudio de las matemáticas que interpretan "aprender matemáticas" como un proceso de construcción de conocimientos matemáticos (relativos a un *sistema* matemático o extramatemático) que se lleva a cabo mediante la utilización de un *modelo matemático* de dicho sistema. En estas OD la descontextualización de los problemas desaparece hasta el punto de llegar a identificarse el *objetivo de* *la resolución de los problemas*, con la *obtención de conocimientos sobre el sistema modelizado*. La actividad de resolución de problemas se engloba, por tanto, en una actividad más amplia que podemos llamar *actividad de modelización matemática* y que esquematizaremos en cuatro estadios, sin entrar en detalles ni querer prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos (Chevallard, 1989).

Primer estadio: El punto de partida o primer estadio de la modelización matemática lo constituye una *situación problemática* en la que pueden formularse preguntas y conjeturas, normalmente con poca precisión, y en la que se pueden llegar a detectar y formular provisionalmente algunos problemas matemáticos. Aunque tradicionalmente se han considerado preferentemente *sistemas extramatemáticos* (principalmente físicos, pero también biológicos, económicos, informáticos o lingüísticos, entre otros) como candidatos a ser modelizados matemáticamente, la propia historia de las matemáticas nos muestra que la *modelización matemática de sistemas matemáticos* ha sido y continúa siendo uno de los motores principales del desarrollo del saber matemático.

Segundo estadio: Engloba la *definición o delimitación del sistema* subyacente a la situación problemática (mediante la elección de las variables que se consideran "relevantes") y la *elaboración del modelo matemático* correspondiente. El lenguaje y las técnicas propias del modelo matemático permitirán formular con precisión los problemas enunciados provisionalmente en el estadio anterior.

Tercer estadio: Incluye, además del *trabajo técnico* dentro del modelo, la *interpretación* de este trabajo y de sus resultados *dentro del sistema modelizado*. En este punto no hay que olvidar que, cuando se trata de modelizar un sistema matemático, entonces éste puede ser considerado, a su vez, como el modelo de su modelo.

Cuarto estadio: En este último estadio de la actividad de modelización matemática se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya resolución permitirá responder a cuestiones, relativas al sistema, difícilmente formulables antes de la elaboración del modelo matemático. Además, en este estadio los problemas formulables dentro del modelo pueden independizarse del sistema inicial dando origen a nuevas organizaciones matemáticas (nuevos tipos de problemas, nuevas técnicas y nuevas teorías).

Resulta, en definitiva, que en las OD *modelizacionistas* el objetivo de la actividad matemática – y, por tanto, el de la enseñanza de las matemáticas – es la *obtención de conocimientos relativos a un sistema modelizado* que, en principio, puede ser tanto matemático como extramatemático. Los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema; así la resolución de un problema pasa siempre por la construcción explícita de un *modelo del sistema subyacente* y tiene como objetivo la producción de conocimientos relativos a dicho sistema. Sus limitaciones más importantes tienen relación, de nuevo, con el *olvido del momento del trabajo de la técnica* y del papel del *desarrollo de las técnicas matemáticas* en la actividad matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

De la modelización matemática al estudio de campos de problemas

Hemos visto que en la *modelización matemática* culmina el proceso de contextualización de la actividad de resolución de problemas, puesto que:

(a) Contextualiza las *teorías matemáticas* al tomarlas como instrumentos de modelización de un sistema;

(b) Contextualiza la *actividad exploratoria* que aparece en los primeros estadios de la modelización;

(c) Contextualiza el *trabajo técnico* que se realiza dentro del modelo, mediante la *interpretación* del mismo en el lenguaje del sistema modelizado.

La principal limitación de las OD constructivistas (incluyendo el constructivismo matemático) radica en que no permiten un desarrollo suficiente del trabajo de la técnica. Subsanar esta limitación constituirá, por lo tanto, el punto de partida para diseñar OD más complejas y relativamente más completas que integren las tres dimensiones de la actividad matemática que definen nuestro espacio de OD posibles. Para ello se requerirá dar cabida, con toda normalidad y sin las cortapisas y los prejuicios culturales habituales, al trabajo de la técnica como una dimensión más de la actividad matemática.

Una estrategia didáctica que va en la dirección de completar el modelizacionismo consiste en partir de los tipos de problemas que emergen en la cuarta etapa de la modelización matemática y llevar a cabo con ellos un *estudio profundizado* (Bosch y Gascón, 1992, 1993 y 1994) lo que provocará que éstos acaben independizándose del sistema modelizado. De esta manera *el modelo se autonomiza* y toma vida propia, con la consiguiente aparición de *nuevos campos de problemas* y el *desarrollo de las técnicas matemáticas* en manos de los estudiantes.

Pero si en lugar de partir del modelizacionismo nos situamos en una OD empirista (por ejemplo, procedimentalista) podemos plantear problemas que estén en la frontera y más allá del dominio de validez de las estrategias de resolución (o técnicas matemáticas no algorítmicas) de las que se dispone. De esta manera se podrían de manifiesto las limitaciones de cualquier técnica matemática lo que provocaría la necesidad de plantear cuestiones tecnológicas sobre el *alcance*, *la economía*, la *pertinencia* y la *eficacia* de las técnicas matemáticas. Se utilizarían entonces los problemas para analizar el *dominio de validez y las limitaciones de las técnicas* matemáticas, en lugar de utilizar las técnicas únicamente para resolver los problemas.

Cualquiera de las dos estrategias didácticas descritas provocará un *desarrollo de las técnicas* matemáticas iniciales – ya sea mediante variaciones de las técnicas antiguas o combinaciones de éstas – y la emergencia de "nuevas" técnicas, con la consiguiente necesidad de *interpretarlas y justificarlas*, lo que acarreará *nuevas necesidades "teóricas"* con lo que se abre el camino para el diseño de OD menos reduccionistas.

Las OD que completen, a la vez, a las OD *clásicas*, a las OD *empiristas* y a las OD *constructivistas*, son OD generadas por el *estudio de campos de problemas*. Se trata de OD que, en nuestro modelo tridimensional de las OD posibles, tienen las tres componentes no nulas. Para que esto sea posible, de manera institucionalizada, hemos diseñado el *Taller de Prácticas Matemáticas* (Bosch y Gascón, 1992, 1993 y 1994) cuyas funciones didácticas son:

(a) Hacer vivir de manera normal el *momento de la técnica* en la institución docente.

(b) Rescatar al alumno de su *incertidumbre radical* y permitirle que llegue a ser un verdadero "*experto*".

(c) *Integrar el proceso de estudio*, muy atomizado en las actuales instituciones docentes, conectando la exploración con el entorno tecnológico-teórico.

(d) *Crear nuevos objetos matemáticos*: técnicas, problemas, nociones y justificaciones.

(e) *Cuestionar* sistemáticamente el *alcance*, la *eficacia* y la *pertinencia* de las *técnicas*.

(f) *Retomar* las *clases de problemas* ya estudiadas (incluso en cursos anteriores) para *ampliarlas* y *reinterpretarlas*.

La didáctica de las matemáticas como ciencia relativamente autónoma

Una vez descrito brevemente, a título de ejemplo, un modelo construido por la didáctica de las matemáticas para producir conocimientos relativos a las posibles formas de organizar el estudio de las matemáticas en las instituciones docentes, quiero volver sobre la cuestión inicial.

- ¿En qué punto nos encontramos dentro del proceso de "*desmagificación*" de la didáctica de las matemáticas?
- ¿Cuál es el «estatus» actual del "*saber didáctico*"?[8]
- ¿Basta con el "sentido común", la "reflexión" y la "opinión" para resolver los problemas docentes del profesor de matemáticas?
- ¿Cuál es el ámbito en el que se sitúa el "objeto de estudio" de la didáctica de las matemáticas?
- ¿Es este ámbito relativamente autónomo del resto de las disciplinas científicas?
- ¿Existen fenómenos didáctico-matemáticos no reducibles a sus aspectos *semióticos*, *biológicos*, *psicológicos* y *sociólogicos*?

Para empezar a responder a estas cuestiones quizá sea útil recordar cómo eran considerados por la cultural los hechos y los fenómenos físicos en los albores de la constitución de la física experimental como disciplina científica.

8 En Gascón (1993 y 1998) se analiza con cierto detalle la génesis y el desarrollo de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Antes de que la física clásica pasara a formar parte de nuestra cultura, muchos episodios cotidianos como, por ejemplo, la salida del sol, el vuelo de las aves, el movimiento de las estrellas y la caída de los cuerpos, no tenían ninguna relación entre sí. El fenómeno de la *gravitación universal* era *invisible* y, por tanto, los citados episodios eran *transparentes*, no se cuestionaba su origen y no se sospechaba que pudiesen tener una explicación común. A lo sumo se daba, para cada uno de ellos y de forma completamente independiente, una "explicación" obvia basada en el sentido común o en la "naturaleza de las cosas".

Ésta es, aún hoy día, la situación en la que nos encontramos con los hechos didáctico-matemáticos: que los alumnos persistan en sus errores incluso después de reconocerlos como tales; que no se hagan responsables de los resultados matemáticos que obtienen o que, a un nivel más concreto, no acepten que los cuadrados son, a la vez, rombos y rectángulos, o no sepan para qué sirven las fracciones, siguen siendo considerados en la cultura escolar como hechos aislados que no tienen ninguna relación entre sí. Se les considera como episodios *no problemáticos* que pueden zanjarse echando mano a nociones del sentido común tales como "*motivación*", "*capacidad*" e "*interés*" de los alumnos, junto a la supuesta *inadecuada formación* de los profesores y la excesiva *abstracción* de las matemáticas enseñadas.

Todavía prevalece la *opinión* de los que se autoproclaman "expertos" y *trivializan los problemas de la Educación Matemática* porque ignoran la existencia y la "resistencia" de los fenómenos didáctico-matemáticos. Proponen *soluciones inmediatas* y oportunistas apelando a la "buena voluntad" de los actores. Alimentan la ilusión del *profesor omnipotente* al que se supone, ingenuamente, completamente *libre* de las restricciones inherentes a la relación didáctica.

Esta mentalidad precientífica, mágica, hace *recaer sobre el profesor* (sobre su formación, su vocación y su capacidad) *toda la responsabilidad* de la educación matemática. Esta tendencia a la *personalización* y *trivialización* de la problemática didáctica, que muchas veces es una tendencia interesada, constituye en mi opinión, el mayor peligro para el futuro de la Educación Matemática.

Para dominar los *fenómenos económicos* y para que los *aviones vuelen* no basta con la buena voluntad ni con el sentido común; hemos necesitado *una ciencia* y el desarrollo de una *tecnología asociada*. Los fenómenos ligados a la creación y difusión de los conocimientos matemáticos, ¿son acaso más sencillos que los fenómenos físicos o más fáciles de dominar que los fenómenos económicos?

Quiero acabar reivindicando con fuerza, ante la comunidad de educadores matemáticos y ante la comunidad matemática en su conjunto, la ambición irrenunciable de construir una ciencia que tenga como objeto de estudio las *condiciones de creación y difusión de los saberes matemáticos en las instituciones sociales*.[9]

Referencias

ARSAC, G. et alii (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Irem de Lyon.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1992). Una nova activitat docent: les pràctiques a la llicenciatura de matemàtiques. *Jornades sobre innovació en la docència universitària*. Universitat Autònoma de Barcelona, abril.

_______ (1993). "Prácticas en matemáticas: el trabajo de la técnica". In: FILLOY, E.; PUIG, L. y ROJANO, T. (eds.). *Historia de las ideas algebraicas. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Valencia.

_______ (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 12, n. 3, pp. 314-332.

_______ (2002). "Organiser l'étude. 2. Théories et empiries". In: DORIER, J.-L. et alii (eds.). *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques. Corps 21-30 août 2001*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

BOSCH, M.; ESPINOZA, L. y GASCÓN, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 23, n. 1, pp. 79-136.

9 La obra de Guy Brousseau constituye la piedra angular de esta ambición. En Brousseau (1998) se recogen sus principales trabajos publicados entre 1970 y 1990.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990*. N. Balacheff; M. Cooper; R. Sutherland y V. Warfield (eds.). La pensée sauvage: Grenoble [versión inglesa: *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer, 1997].

CALLEJO, M. L. (1991). *Las representaciones gráficas en la resolución de problemas de tipo olimpiadas*. Tesis Doctoral. Universidad Paris VII.

CHEVALLARD, Y. (1989). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'Irem Aix-Marseille.

______ (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 17, n. 3, pp. 17-54.

______ (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 19, n. 2, pp. 221-266.

______ (2000). "La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes". In: BAILLEUL, M. (ed). *Actes de la xe École d'été de didactique des mathématiques (Houlgate, 18-25 août 1999)*. Caen, ARDM et IUFM de Caen.

______ (2002a). "Organiser l'étude 1. Structures et fonctions". In: DORIER, J.-L. et alii (eds.). *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

______ (2002b). "Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation". In: DORIER, J.-L. et alii (eds.). *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori. Barcelona [traducción al portugués: *Estudar matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre, Artmed, 2001].

ECO, U. (2002). "El mago y el científico". *El Pais*, 15 de diciembre de 2002, pp. 13 y 15. [Resumen de la intervención del autor titulada "La recepción de la ciencia por parte de la opininión pública y de los medios de comunicación", en la Conferencia Científica Internacional, celebrada en Roma].

GASCÓN, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

_______ (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 13, n. 3, pp. 295-332.

_______ (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, v. 6, n. 3, pp. 37-51.

_______ (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 18, n. 1, pp. 7-34.

_______ (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*Relime*), v. 4, n. 2, pp. 129-159.

POLYA G. (1945). *How to Solve It*. Doubleday, Princeton [Trad. española de Julián Zugazagoitia. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1981].

_______ (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton, NJ, Princeton University Press.

_______ (1962-65). *La découverte des mathématiques*. Paris, Dunot.

WEBER, M. (1959). *Politik als Beruf, Wissenschaft als Beruf*. Berlin/Munich, Verlag Duncker [Trad. española de Francisco Rubio Llorente. *El político y el científico*. Madrid, Alianza Editorial, 2002].

Recebido em dez./2001; aprovado em mar./2002

Uma pesquisa em Educação Matemática. Da propagação do calor à noção de convergência*

ROSA MARÍA FARFÁN**

Resumo

Neste artigo, apresentamos o estudo epistemológico de uma pesquisa sobre convergência de séries reportada amplamente em Farfán (1997) e cujo resultado se pode sintetizar como: *determinar o estado estacionário do sistema conduz, necessariamente, a um estudo da convergência de uma série trigonométrica infinita.* Assim, oferecemos uma panorâmica dos diversos estudos que derivam, em especial, do projeto de uma linguagem gráfica e a reprodução de situações didáticas sob uma perspectiva socioepistemológica. Com ele pretendemos ilustrar o trabalho realizado em educação matemática.

Palavras-chave: socioepistemologia; convergência de séries; linguagem gráfica.

Abstract

In this article we present the epistemological study of a research on convergence of series reported in detail in Farfán (1997) and whose result can be summarized as follows: determining the stationary state of a system leads, necessarily, to a study of the convergence of an infinite trigonometric series. *Thus, we offer a panoramic view of the several studies that derive from the project of graphic language and reproduction of didactic situations under a socio-epistemological perspective. With it we intend to illustrate the work carried out in mathematics education.*

Key-words: *socio-epistemology; convergence of series; graphic language.*

Introdução

A propagação do calor foi uma questão sobre a qual tanto a mecânica racional como a análise matemática do século XVIII não deram

---

* Este artigo é parte dos resultados de pesquisa do projeto financiado pelo Conselho Nacional de Ciência e Tecnología: *Construcción Social del Conhecimento Matemático Avanzado. Estudios sobre la reproducibilidad e la obsolescencia de situações didáticas: De la pesquisa al aula.* Chave U41740-S.

** Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México. E-mail: rfarfan@mail.cinvestav.mx

resposta, e dela surge a histórica controvérsia suscitada a propósito da corda vibrante. Ao lado desse desenvolvimento, encontramos o surgimento da engenharia matemática em contraste com a prática tradicional e o papel substancial que a École Polytechnique, uma instituição de educação superior, teve para sua posterior consolidação. Assim, a origem do problema matemático que nos ocupa, o estudo da convergência de séries infinitas, é o ambiente fenomenológico no qual sucedeu, a condução do calor, em estreita relação com a engenharia, graças à conjunção de inúmeras variáveis, dentre as quais destacamos como antecedentes o cálculo algébrico e o surgimento da engenharia no século XVIII.

O surgimento do conceito de convergência, que data do século XIX, dá-se em um ambiente fenomenológico de singular relevância para a engenharia matemática: a propagação do calor onde a variação está presente e a equação na qual tal variação tem significado é:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

No início do desenvolvimento da humanidade, quando as diversas experiências ocorreram pela primeira vez, buscou-se a intuição predominante no fenômeno, seja calórico, que é o nosso caso, seja do ímpetus ou do éter, entre outros. Desse modo, é com o calórico que se realiza melhor a condução ou com o ímpetus que se dá o movimento. Foi necessária uma revolução do conhecimento científico para agrupar em uma unidade fundamental o conhecimento e a maneira de percebê-lo.

Com a obra de Biot (1774-1802), a experiência se dirige à medida e ao cálculo, rejeitando a explicação do fenômeno mediante o calórico, valendo-se das indicações fornecidas por termômetros, obtendo-se assim a primeira equação diferencial que rege o fenômeno. Ainda assim, os coeficientes constantes não foram analisados, não se distinguiu entre o que é próprio do corpo específico daquilo que persiste independentemente. Em especial, os parâmetros de condutibilidade, de densidade, de calor específico permanecem em um só coeficiente empírico. A tarefa construtiva culmina com a Théorie Analytique da Chaleur (1822), de

Joseph Fourier (1768-1830), na qual se analisa o problema da propagação do calor nos sólidos, que consiste em descrever o comportamento do fenômeno de propagação buscando aquele estável e permanente, que se conserva inalterável com o fluir do tempo. Isto é, a equação que governa o comportamento do sistema.

Como Fourier chega, finalmente, à equação diferencial de Biot, que recebeu a sanção da experiência, pode-se dizer que o método de Fourier alcançou a construção matemática completa do fenômeno. De imediato se rompem ou, melhor ainda, negam-se os conceitos fundamentais da análise matemática do século XVIII, como o de função, o papel da álgebra, o contínuo real, assim como a interpretação física das soluções, e se inicia o estudo da convergência de séries infinitas, pilar fundamental da análise matemática moderna. É possível destacar a importância singular da obra de Fourier, tanto para a engenharia como para a análise matemática. Como resultado da revisão da obra de Fourier, formulamos nossa hipótese central de pesquisa, a qual defende que, *para a construção da noção de convergência de séries infinitas, necessita-se ambiente fenomenológico estreitamente relacionado com a estabilidade de sistemas fluidos*. De sorte tal que determinar o estado estacionário do sistema conduz, necessariamente, a um estudo da convergência de uma série trigonométrica infinita.

Uma vez determinada a fenomenologia intrínseca do conceito de convergência em sua gênese, desenhamos um modelo experimental a fim de estudar os processos desenvolvidos por professores de matemática (nível superior) ante problemas, por um lado físicos, similares aos abordados por Fourier e, por outro, assentados em um contexto matemático. Em ambos os casos, recorremos a um questionário. No primeiro, retomamos um experimento de Fourier a fim de analisar as idéias intuitivas dos professores sobre a condução do calor, assim como aspectos referidos à representação matemática do fenômeno. No segundo exploramos dois aspectos: um sobre a definição de convergência e o outro acerca do limite de uma série de funções, dada por Abel em 1826. Elaboramos um processo de pesquisa e ensino controlado, que nos permitiu um seguimento da população, constituindo-se assim como parte do modelo experimental. Os resultados da pesquisa se detalham em Farfán (1997): neste espaço abordaremos uma síntese do estudo epistemológico.

A engenharia didática como metodologia *ad hoc*

O termo engenharia didática surge no seio da escola francesa por analogia ao "que fazer" em engenharia, embora este não se realize apenas apoiando-se em resultados científicos, mas envolva também tomada de decisões e controle sobre os diversos componentes inerentes ao processo. Assim, a engenharia didática se constitui como metodologia de pesquisa que se aplica aos produtos de ensino baseados ou derivados dela, mas também como uma metodologia de pesquisa para guiar os experimentos em sala de aula. Seu sustento teórico provém da teoria da transposição didática e da teoria das situações didáticas,[1] pois de ambas se desprende a necessidade de dotar o estudo do fenômeno didático de um acirramento sistêmico. Com a primeira se alcança uma dimensão global, porém, a segunda é de caráter local. Nesse sentido, a elaboração de metodologias de ensino de matemática para estudantes não é um processo de

---

1 A teoria de situações didáticas, introduzida na didática por G. Brousseau (1983), baseia-se em uma hipótese sobre a construção do significado de uma noção: "(...) uma noção aprendida não é utilizável se não na medida em que ela é relacionada com outras, essas relações constituem seu significado, sua etiqueta, seu método de ativação. No entanto, não é aprendida se não é utilizável e utilizada efetivamente, ou seja, só se é a solução de um problema. Tais problemas, junto com as restrições sobre as quais a noção responde, constituem o significado da noção (pp. 169-171)". De onde se infere que o significado de uma noção não pode ser dado ao aluno; ele deve construí-lo a partir de um conjunto de problemas no qual tal noção funciona de maneira mais ou menos local. Em conseqüência, o professor, em vez de proporcionar ao estudante o conhecimento, deve propor uma *situação* planejada de forma tal que esse conhecimento seja necessário para a solução otimizada. O aluno aprenderá adaptando-se a um *meio,* fator de dificuldades e desequilíbrios. Se se adapta à situação e chega à *solução*, estará proporcionando evidência de haver se apropriado do saber em questão, isto é, aprendeu. Para o planejamento dessas *situações fundamentais* (que contemplam todos os aspectos fundamentais de um conceito), Brousseau (1986) define três tipos de situações *a-didáticas* (pp.75-85) que induzem os alunos a transitar por diversas etapas próprias da atividade matemática: a ação, a formulação e a validação. Em síntese, a teoria de situações dispõe de uma explicação na qual a construção do significado de um conceito passa por sua mobilização dentro de um espaço limitado de problemas e, se colocada em cena, ela é necessária para a solução única ou otimizada. Ao mesmo tempo, dota de elementos para o controle de situações de ensino. Os sistemas didáticos considerados distinguem três componentes mutualmente interrelacionados: o mestre, o estudante e o saber matemático em questão.

elementarização do conhecimento em qualquer contexto, nem de adaptá-lo a um conhecimento prévio e às habilidades cognitivas do estudante. Ele é percebido como uma tarefa didática que requer uma maior análise global de caráter sistêmico (Artigue, 1992).

Um aspecto relevante é concernente à validação de resultados, que, no caso da pesquisa, apóia-se em um assunto interno fundamentado na confrontação entre a análise *a priori* da situação construída e a análise *a posteriori* da mesma situação, sob o princípio de que a conduta do estudante só pode ser entendida se é relativa à situação observada. Essa situação e seu potencial cognitivo devem ser caracterizados de antemão, comparando a análise *a priori* com o observado. Essa posição de validação só pode ter lugar se as situações que envolvem a engenharia são estritamente controladas no que se refere aos conteúdos tratados, sua execução, o papel do professor, a administração do tempo, etc., já que a validação de uma engenharia de produção satisfaz as condições clássicas do trabalho de engenharia, isto é, efetividade, potência, adaptabilidade a diferentes contextos, etc.

Uma descrição, grosso modo, dessa metodologia é a seguinte – em essência se contemplam três grandes fases:

- Análise preliminar da situação a abordar, envolvendo três componentes: a didática acerca do estado de ensino; a componente epistemológica quanto à explicação do conteúdo matemático em jogo, assim como seu funcionamento e diversas formulações; e a componente cognitiva da população que vai ser submetida à engenharia.
- Uma segunda fase constitui o planejamento da engenharia, assim como a eleição das variáveis macro e microdidáticas que vão estar em jogo (por exemplo, determinação do tratamento do conteúdo, incorporação de estratégias de resolução de problemas, uso de tecnologia, maneira de conduzir a classe, textos a usar, etc.).
- Finalmente, a execução e a análise de resultados.

Cabe ressaltar que um aspecto crucial para o planejamento de uma engenharia é a precisão da análise preliminar dos seus componentes epistemológicos, cognitivos e didáticos. Isto é, do diagnóstico sobre o funcionamento do sistema de ensino, dos efeitos que produzem nas concepções dos estudantes e um aspecto substancial: a natureza intrínseca do saber matemático que se apresenta na situação escolar.

A dimensão epistemológica

De início diremos que a análise epistemológica permite ao investigador tomar distância e controlar as representações epistemológicas da matemática induzida pelo ensino, de forma que:

• Provê de historicidade os conceitos matemáticos que o ensino usual apresenta como objetos universais, tanto em tempo, como em espaço. Esses se concebem, com sua mediação, como suscetíveis de evolução perdendo essa categoria de verdades em si.

• Provê de historicidade as noções metamatemáticas e protomatemáticas, tais como o rigor, contribuindo para mostrar que a concepção de um rigor eterno e perfeito das matemáticas é só uma ficção.

• Possibilita a observação das disparidades entre o saber científico e o ensino, contribuindo para desmascarar outra das ficções da escola, isto é, a concepção de que os objetos de ensino são cópias simplificadas, mas fiéis aos objetos da ciência. A análise epistemológica nos permite compreender o que governa a evolução do saber científico e tomar consciência da distância que separa esses sistemas. Nesse sentido, a noção de transposição didática toma em conta essas diferenças.

Assim, a análise epistemológica permite à didática desprender-se da ilusão de transparência dos objetos que manipula no nível do saber e, em conseqüência, auxilia-a no manejo das representações errôneas induzidas pelo ensino.

A epistemologia também tem um papel de protagonista no nível teórico e metodológico da disciplina, a partir da consideração da noção de obstáculo epistemológico, retomada de Gaston Bachelard em sua explicação sobre a construção do conhecimento científico. Em *A formação do espírito científico*, publicado em 1938, ele diz[2]:

> (...) Quando buscamos as condições psicológicas do progresso da ciência, chegamos à convicção de que é em termos de obstáculos que se deve colocar o problema do conhecimento científico... é no mesmo ato de conhecer, intimamente, que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, os retrocessos e os problemas...

2 Tradução livre e intercalada do original (pág. 13).

> O conhecimento nunca é imediato e pleno. As revelações da natureza são sempre recorrentes. A realidade nunca é "o que poderíamos crer" mas é sempre aquilo que deveríamos pensar... encontramos a verdade em um verdadeiro arrependimento intelectual. Com efeito, vamos contra um conhecimento anterior, destruindo os conhecimentos malfeitos, sobrepassando aquele que, no mesmo espírito, constitui um obstáculo à inteligência...[3]

A introdução da noção de obstáculo epistemológico em didática se deu em 1976, como um meio para mudar o *status* do erro. Assim foi possível mostrar que

> (...) O erro não é só o efeito da ignorância, da incerteza ou do azar, como o concebem as teorias conductistas; mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, que inclusive tendo logrado êxito se apresenta como falso ou inadaptado. (Brousseau, 1976)[4]

Então, origina-se um novo paradigma, do qual surge a didática como disciplina científica, abandonando o empirismo.

Essa noção de "construir apoiando-se em... e ir contra ao que se apoiou" é o que permitiu, na minha opinião, o surgimento da didática como disciplina independente daquelas nas quais se apoiou no início (epistemologia, psicologia, sociologia, lingüística, etc.), construindo suas próprias referências de explicação, como a teoria de situações; a de transposição didática; os conceitos de dialética ferramenta/objeto; o jogo de contextos e situação adidática.

Também no terreno metodológico encontramos essa noção de que as relações entre observador e observado não se estabelecem natural e

---

3 Assim mesmo identifica, a partir de exemplos históricos, algumas grandes categorias de obstáculos, como: a primeira experiência, o conhecimento geral, o obstáculo verbal, a utilização abusiva de imagens familiares, o conhecimento unitário e pragmático, o obstáculo substancialista, o obstáculo realista, o obstáculo animista e todo aquele que concerne o conhecimento quantitativo.

4 Distinguindo três tipos fundamentais de origem de obstáculos no ensino: isto é, um de origem *ontológica,* ligado às capacidades cognitivas dos estudantes e vinculado a um processo de ensino; de origem *didática,* como conseqüência do sistema de ensino, e um de origem propriamente *epistemológica,* ligado à resistência de um saber mal adaptado, no sentido de Bachelard.

ingenuamente fora da problemática que lhes é consubstancial; a observação se constrói *contra* o sistema observado.

Na tarefa de planejar uma engenharia didática, é de fundamental importância a noção de obstáculo epistemológico, pois é necessário decidir quais se podem (ou devem) evitar, quais não se devem evitar. E, em conseqüência, como serão superados. Ao que se adiciona o assunto do significado a escolher, já que os problemas que motivaram a introdução (o surgimento) de tal conceito, assim como os que têm governado sua evolução, são constituídos da significação de tal conceito, e o educador matemático, em sua análise, confronta-se necessariamente com o problema da significação do conceito que resolverá com a análise epistemológica.

De lado da análise conceitual, a epistemologia intervém em um nível mais geral que o do ensino. Já que assumimos que o fenômeno educativo não é simplesmente a transmissão de conhecimentos matemáticos, este concerne globalmente a uma cultura. Isso se traduz em fazer com que os alunos entrem no jogo matemático. Mas o que é o jogo matemático? Quais são os processos gerais do pensamento que o governam? É a análise epistemológica[5] que responderá a essas questões. Ela irá sugerir ao investigador vários problemas globais e fundamentais para guiar a produção de engenharias didáticas referentes à análise do ensino atual.

Desde essa perspectiva, a pesquisa epistemológica em nossa disciplina não se limita a integrar assuntos referentes à natureza epistemológica à atividade. Consiste também em construir os distintos contextos teóricos que permitam envolver tais dilemas, assim como sua incorporação efetiva no ensino. Em Farfán (1997), apresentamos nossa contribuição a respeito do que, em termos da engenharia didática, constitui a análise preliminar.

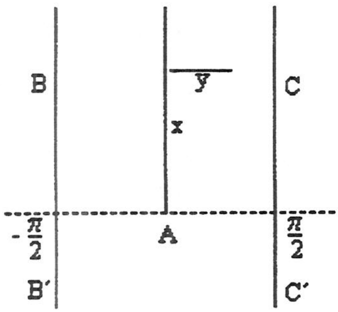
Determinação do estado estacionário

Como já assinalamos, o objetivo do estudo é o esclarecimento da teoria matemática do calor, que se forma: *"(...) 1°. de la définition exacte de tous les éléments du calcul; 2°. des équations différentielles; 3°. des intégrais propres aux questions fondamentais..."* (Fourier, 1822, p. 585).

5 Não necessariamente histórica, em caso de a aproximação histórica tornar possível a eleição de algum aspecto autêntico e especial para uma cultura dada.

Nos capítulos I e II, Fourier desenvolve os primeiros pontos de seu programa. O resto da obra (capítulos III a IX) é dedicado à integração das equações diferenciais parciais em casos particulares. O capítulo terceiro é significativo para nosso estudo, pois nele desenvolve a matemática do fenômeno; aqui resolve o problema da determinação do *estado estacionário*, o que conduz ao estudo da *convergência de séries trigonométricas infinitas*. O problema particular com que Fourier inicia esse estudo é o seguinte:

> Supondo que uma massa sólida homogênea está contida entre dois planos verticais B e C paralelos e infinitos, e que se dividiu em duas partes por um plano A perpendicular aos outros dois (ver figura); consideraremos as temperaturas da massa BAC compreendida entre os três planos infinitos A, B, C. Supõe-se que a outra parte B'AC' do sólido infinito é uma fonte constante de calor, isto é, todos esses pontos permanecem com temperatura 1, a qual nunca pode chegar a ser menor ou maior. Quanto aos sólidos laterais, um compreendido entre o plano C e o plano A prolongado e o outro entre o plano B e o A prolongado, todos os pontos de ambos têm uma temperatura constante 0, e uma causa exterior os conserva sempre à mesma temperatura; enfim, as moléculas do sólido compreendido entre A, B e C têm a temperatura inicial 0. O calor passará sucessivamente da fonte A ao sólido BAC; ele se propagará no sentido da longitude infinita e, ao mesmo tempo, se desviará às massas frias B e C, que absorverão uma grande quantidade. As temperaturas do sólido BAC se elevarão mais e mais; mas elas não poderão passar nem alcançar um máximo de temperatura, que é diferente para os distintos pontos da massa. Tentamos conhecer o estado final e constante ao qual se aproxima o estado variável.



temperatura constante = 1

Assim, o problema consiste em determinar as temperaturas permanentes de um sólido retangular infinito compreendido entre duas massas de gelo B e C e uma massa de água fervendo A; a consideração dos problemas simples e primordiais é um dos meios mais seguros para o descobrimento de leis de fenômenos naturais, e nós vemos, pela historia das ciências, que todas as teorias se formaram seguindo este método.

Para o caso particular proposto, a equação geral se reduz a

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

pois se omite tanto a coordenada z como sua correspondente derivada parcial (a largura é considerada infinitesimal). E, dado que se tenta determinar o estado estacionário (constante em relação ao tempo), é definido que $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Assim, a equação a ser resolvida é:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(a)}$$

Se uma função φ *(x,y)* satisfaz a equação, deverá cumprir as seguintes condições:

i) Anular-se quando se substitui $-\frac{\pi}{2}$ *ou* $+\frac{\pi}{2}$ *em lugar de y, qualquer que seja, por outro lado, o valor de x.*

ii) Ser igual à unidade se supõe-se que x=0 e se atribui a y um valor qualquer compreendido entre $-\frac{\pi}{2}$ *e* $+\frac{\pi}{2}$.[6]

É necessário acrescentar que esta função φ (x,y) deve chegar a ser extremamente pequena quando se atribui a x um valor muito grande, já que todo o calor surge de uma só fonte A.

6 Isso acontece porque a longitude do lado finito *BAC* é π. Note que, no trabalho de Fourier, a abscissa é denominada *y* e a ordenada, *x* (ver figura).

A essas condições, que hoje chamamos de *fronteira*.

Fourier encontra a solução φ (x,y) pelo método de separação de variáveis, considerando que a temperatura v pode expressar-se como o produto de uma função de x por uma função de y,

$$v = F(x)\,f(y)$$

Substituindo na equação (a) se terá:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} = 0$$

e supondo que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = m^2 \text{, se deduz que } \frac{f''(y)}{f(y)} = -m^2$$

onde m é uma constante qualquer e uma solução é

$$F(x) = e^{-mx}, f(y) = \cos my$$

O valor para a constante m não pode ser negativo, pois teríamos que o valor e^{-mx} *é* infinito quando x é infinitamente grande, mas isso não concorda com a situação física, já que à medida que se distancia da fonte de calor, a função diminui.

Para determinar o expoente m, recordaremos que a função se anula em $y = -\frac{\pi}{2}$ ou $y = +\frac{\pi}{2}$ assim que

$$v\left(x_1, -\frac{\pi}{2}\right) = e^{m\pi/2} \cos\left(-m\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

e como $e^{m\varphi/2} \neq 0$, para qualquer m, deve-se ter que $\cos\left(-\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ y, portanto, $m = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

As soluções correspondentes a cada valor serão:

$$e^{-x} \cos y,\ e^{-3x} \cos 3y,\ e^{-5x} \cos 5y,\ \ldots$$

e qualquer combinação linear destas também é solução,

$$v = a\, e^{-x} \cos y + b\, e^{-3x} \cos 3y + c\, e^{-5x} \cos 5y + \ldots \qquad \text{(b)}$$

Finalmente, $\varphi\ (0,y) = 1$,[7] e neste ponto Fourier faz notar que: "...não se pode inferir nada para os valores que tomaria a função φ (0,y) se põe-se no lugar uma quantidade que não esteja compreendida entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$..."[8]

Assim, (b) se converte em

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + d \cos 7y + \ldots$$

para $-\frac{\pi}{2} \varphi$ y $\varphi + \frac{\pi}{2}$; agora só resta calcular a infinidade dos coeficientes $a, b, c, d, \ldots$. *A nosso ver* a solução já está dada (salvo por tal cálculo); para Fourier, nesse caso é necessário justificar a solução fisicamente[9] antes de realizar tal cálculo e acrescentar:

Suponhamos que a temperatura fixa da base A, em lugar de ser igual à unidade para todos os pontos, seja tanto menor quanto mais distante esteja o ponto 0 da reta A, e que seja proporcional ao cosseno desta distância; se conhecerá facilmente, nesse caso, a natureza da superfície curva cuja ordenada vertical

7 A função $\varphi(x,y)$ se identifica também como $v(x,y)$.

8 A consideração dos valores de uma função em um intervalo é nova; lembrar que no século XVIII isso não tinha significado.

9 Porém, diferentemente de Bernoulli, que apresenta argumentos físicos para a demostração do problema, aqui Fourier nos mostra que a solução matemática é *coerente* com a situação física, mas a demostração insere-se na matemática mesma, sem alusão a argumentos que não pertenecem a ela. Assim, inicia-se a separação entre a Física e a Matemática, que desde a Antiguidade caminhavam estreitamente ligadas uma à outra.

Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 5, n. 2, pp. 39-58, 2003

expressa a temperatura ou o $f(x,y)$. Cortando esta superfície pela origem com um plano perpendicular ao eixo das x, a curva que determina a secção terá por equação

$$v = a \cos y;$$

os valores dos coeficientes serão os seguintes

$$a = a,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 0,$$

e assim sucessivamente, e a equação da superfície curva será

$$v = ae^{-x} \cos y.$$

Cortando essa superfície perpendicularmente ao eixo y, teremos uma logarítmica cuja convexidade é voltada para o eixo; cortando perpendicularmente ao eixo x, teremos uma curva trigonométrica que tem sua convexidade voltada para o eixo x. Conseqüentemente, a função $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ *tem sempre um valor positivo, e o valor de* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ *é sempre negativo. Então (art. 123), a quantidade de calor que uma molécula adquire, de acordo com seu lugar entre outras duas no sentido de x, é proporcional ao valor de* $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$; *portanto, tem-se que a molécula central recebe, da que a precede no sentido de x, mais calor do que ela passa à que lhe segue. Mas, consideramos esta mesma molécula colocada entre outras duas no sentido de y, sendo negativa a função* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, *observamos que a molécula central passa, para a seguinte, mais calor que ela recebe da precedente. Deduzimos assim, que o excedente de calor que ela adquire no sentido de x é compensado exatamente com o que ela perde no sentido de y, como expressa a equação*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Assim, é possível conhecer a direção que segue o calor que sai da fonte A. Ele se propaga no sentido de x, *e ao mesmo tempo se decompõe em duas partes, uma se dirige para um dos eixos, enquanto a outra parte continua afastando-se da origem para decompor-se como a anterior, e assim sucessivamente até o infinito. A superfície que consideramos é reproduzida pela curva trigonométrica que corresponde à base A, e se move perpendicularmente ao eixo* x, *seguindo este eixo, enquanto que cada uma de suas ordenadas decrece ao infinito, proporcionalmente às potências sucessivas de uma mesma fração.*

Podemos obter conseqüências análogas se as temperaturas fixas da base A forem expressas pelo termo b cos 3y, ou um dos termos seguintes c cos 5y...; e pode-se, depois disso, formar uma idéia exata do movimento do calor no caso geral; já que se verá, pelo que se segue, que esse movimento se decompõe sempre em uma multiplicidade de movimentos elementais, onde cada um se comporta como se fosse único.

Discussão

Iniciamos nosso estudo buscando dar significado ao conceito de convergência de séries infinitas, assim, encontramos que a origem desse estudo se apresentou associado a um problema por resolver: o estudo científico da propagação do calor.

Evidentemente, a obra de Fourier é singularmente importante, tanto para a engenharia, como para a análise matemática. Como resultado da revisão da obra de Fourier, formulamos nossa hipótese central de pesquisa a qual consiste em que "para a construção da noção de convergência de séries infinitas, precisa-se de um ambiente fenomenológico estreitamente relacionado com a estabilidade de sistemas fluidos. De sorte que, determinar o estado estacionário do sistema conduz, necessariamente, a um estudo da convergência de uma série trigonométrica infinita..."

Dos resultados de nossa experiência no contexto físico do início, observamos que a primeira intuição sobre o fenômeno a ser estudado é perceptível; isso não ocorre com sua representação gráfica nem analítica: obtivemos quase tantas representações como respostas. Na realidade, ao solicitar uma representação gráfica, estávamos exigindo uma manejo versátil entre o contexto físico e o geométrico (que é parte da cultura escolar, inclusive, e que é evitado). No contexto físico é preciso ter uma referência clara para distinguir ***o que varia*** em relação ***ao que*** é o que produz tal variação,[10] para, em seguida, *predizer* quando a variação que subsiste chega a um estado estável. Essa predição é a determinação do estado estacionário de que se aproximam os diversos estados, onde, para cada um, tem-se determinada evolução. Precisar a relação existente entre evolução do fenômeno para cada tempo e predição é o que foi solicitado aos professores; na realidade, solicitamos que reconstruíssem a síntese do intelecto de Fourier nessa tarefa de representação.

O estudo de Fourier vem precedido de uma análise qualitativa e empírica do fenômeno físico em questão, da intuição acerca da certeza da convergência da solução, ligada à natureza própria do fenômeno (a temperatura não é infinita). E sobre ele fundamentam-se seus desenvolvimentos posteriores analíticos, antepondo, assim, o contexto físico ao geométrico e ao algébrico, fazendo uso, neste último, de habilidades matemáticas próprias da época, ignorando as nossas tradições educativas. Não obstante, o estudo de problemas físicos atuais formulados pela engenharia requer uma análise qualitativa e uma representação adequada. Daí a importância de estudar o contexto físico, a fim de procurar uma aproximação fenomenológica que possibilite futuros planejamentos didáticos em contextos afins à engenharia nas diversas especialidades que o propiciem.

Nossa hipótese inicial de trabalho se fundamenta em que é indispensável, para a construção de um conceito matemático, a significação que lhe deu origem; nesse caso, é a determinação do estado estacionário

---

10 Isso, sem ser precisamente o mesmo, vincula-se a um obstáculo epistemológico reportado em Sierpinska (1992), referido a um esquema inconsciente de pensamento "(...) são observadas modificações como fenômenos, enfocando a atenção sobre como modificam os objetos, ignorando que modifica" (p. 36). Sierpinska alude ao trabalho de Aristóteles, onde sua atenção enfoca em como os objetos passam de um estado a outro, e em encontrar uma definição de modificação, assim como em estabelecer as categorias delas. "Em Física, livro III, capítulo i, Aristóteles define 'movimento de modificação' como uma atualização de um estado potencial e diz que 'existem tantas classes de movimento de modificação como classes de ser'. Seus exemplos de movimento de modificação são: modificação qualitativa, crescimento e decrecimento, rotação, amadurecimento e envelhecimento. Essas denominações descrevem a natureza da modificação como uma variável que passa de um posível valor a outro. Contudo, Aristóteles não se interessou na variável mesma, não centrou sua atenção em métodos e meios para medir suas modificações" (p. 36).

que propiciou tal construção. Porém, esse conceito físico não é produto da primeira experiência sensível; basta dizer que a humanidade conhece, requer e manipula o calor desde tempos remotos, tanto que seu estudo científico se iniciou no século XIX, pouco depois da publicação da *Mecânica Celeste,* de Laplace. Isto é, tem sido estudada a natureza do espaço que cerca o globo terrestre antes de se conhecer um fenômeno vital para a vida humana. Ele não é gratuito, a abstração requerida para a aquisição do conceito físico envolvido representa uma tarefa cognitiva das mais complexas. Ninguém se atreveria a levantar uma panela que contém água em ebulição suspendendo-a por sua base: essa decisão é produto da intuição primitiva (quase instintiva). Mas posso admitir que, sendo o fluxo de calor constante (não tem aumento de temperatura), as temperaturas nos pontos diferem?... É como admitir *variação* dentro do constante (imutável). Este último, sem dúvida, não deriva da experiência sensível, mas de uma reflexão profunda do fenômeno para o qual se requer um amplo repertório de habilidades não cultivadas no âmbito escolar (nem propiciadas no meio social). Temos, assim, a obrigatoriedade de desenvolver a intuição além do sensível, como uma etapa prévia, antes de significar nosso conceito matemático particular. Em síntese, o tipo de estudo epistemológico que realizamos nos proporcionou a explicação que nega, parcialmente, nossa hipótese de partida, a saber, embora seja certo que o conceito surgiu no âmbito da determinação do estado estacionário (particularmente na teoria do calor), este não é propício para recriar em sala de aula. Resulta ser mais complexo que a noção que desejamos introduzir. Este último nos induz ao estudo epistemológico nas diversas formações profissionais de nosso sistema de educação superior e, com ele, entramos na perspectiva socioepistemológica (Cantoral e Farfán, 2003).

Temos indicado, como um problema fundamental de corte epistemológico, se as transposições podem ou devem depender do público a que se destina o ensino. Nossa resposta é que devem; mas é necessário precisar o como e em função de quê. Do resultado anterior (e noção particular aludida) se desprendem, ao menos, duas abordagens para dar significado escolar: dentro do contexto em ele surgiu, o que requer o desenvolvimento da intuição física nos estudantes descrito anteriormente; ou envolve a epistemologia própria do âmbito em que os estudantes se desenvolveram profissionalmente fortalecendo as habilidades que são requeridas. Se optamos pela primeira decisão no esboço de uma engenharia didática, esta estará fora de nosso controle, pois, pelo momento, o programa e o tempo institucional destinados às aulas de matemática e de física são desconhecidos. O segundo requer uma investigação epistemológica adicional, mas ao nosso alcance. Optamos por este último e, em uma pesquisa (Albert e Farfán, 1996), apresentamos como uma série numérica infinita é o conceito de *multiplicador* em economia, sendo a base para a construção de uma importante teoria nessa disciplina; mas nem os professores nem os alunos a reconhecem. De fato, evitam-na, como tudo que envolve a manipulação do infinito. Argumentos típicos são: "...não é possível que a soma infinita seja uma constante... se aproxima,... mas não chega..." ao mesmo tempo e no mesmo âmbito, essa série é amplamente manipulada, de fato algoritmizada. As perguntas hoje se referem à determinação do lugar em que é necessário encarar, para os estudantes, o infinito e as habilidades e conhecimentos que lhes permitam fazê-lo.

Outro projeto, que também deriva do estudo epistemológico que descrevemos, está relacionado ao precálculo[11] (estudo de funções). Dentre os resultados, encontramos que o contexto algébrico não somente predomina nas concepções do sujeito, em nosso estudo, mas impede o estabelecimento de soluções que, sendo expressamente situadas em um contexto geométrico, estão condicionadas ao conhecimento e às habilidades de cortes algébricos prévios (em alguns casos, apesar da contradição manifestada). A exceção se deu justamente naqueles que transitam flexivelmente de um contexto a outro e para os quais o geométrico faz parte de seu repertório de estratégias para abordar problemas, conferindo, além do mais, um atributo de significação. Pelo lado epistemológico, observamos que esse *transitar flexivelmente* fazia parte das habilidades matemáticas dos científicos que cultivavam o cálculo algébrico no século XVIII, que colocavam em jogo ao resolver problemas novos.

Assumimos esses elementos como hipóteses centrais para o esboço de uma engenharia didática em precálculo (Cantoral e Farfán, 1998). As variáveis diretrizes desse esboço se localizam no desenvolvimento de

11 As dificuldades que envolvem o conceito de função tem sido amplamente documentadas, por isso não nos ateremos a esse respeito. Ver, por exemplo Dubinsky y Harel (1992).

habilidades para abordar problemas como o estabelecimento de padrões e a geração, a partir deles, de outras funções por meio de sua operação gráfica, propor e resolver problemas em um contexto (seja algébrico, numérico ou gráfico) fazendo a transferência aos outros contextos e vice-versa. Das diversas experimentações que fizemos ficaram, como problemas a serem resolvidos, a introdução das funções que nos servem de base para operar, a saber, a *identidade* (enquanto proporcionalidade), o logaritmo (sua construção a partir das tabelas) e a função *sen x* (contexto numérico, a respeito da predição de soluções). Tais considerações são abordadas nos trabalhos de Melchor (1996), Trujillo (1995) e Zuñiga (1993), respectivamente.

O trabalho a seguir é a elaboração e a implementação de situações didáticas a partir desses resultados. Um dos principais problemas se localiza no nível metacognitivo dos professores, isto é, em suas crença sobre o que é aprendizagem e seu papel como docente: o desejo do professor é construir uma progressão suave sem saltos abruptos, fazendo pequenas escalas, onde nada é proposto ao estudante que não tenha sido bem preparado, antecipando qualquer possível erro, o que é contraditório à teoria em termos de obstáculos e conflitos cognitivos, mas permite a direção cômoda do contrato didático – *tudo é fornecido ao estudante, que pode cooperar mostrando sinais de êxito; se o estudante falha, não é erro do professor... nunca!* Neste caso, os professores deveriam alterar a engenharia proposta a fim de adaptá-la às suas representações, o que implicaria trocar sua natureza.

Justamente nessa direção se dirigem nossos esforços atuais, isto é, interessa-nos a *reprodução* (Lezama, 1999, 2003) dos materiais didáticos provenientes da pesquisa e o processo mediante o qual o professor os adota e aplica em seu trabalho cotidiano.

Em nosso caso, não somente atentamos à gênese do conceito e dos mecanismos de sua produção, mas também nos interessamos pelas variáveis associadas a seu surgimento, que, ao se incorporar (experimentalmente) em nosso sistema escolar, direcionou-nos para outro estudo desta natureza, encaminhado a precisar as diversas formas como se constrói o conhecimento dentro das diversas especialidades cultivadas em nível superior. Esse estudo aponta que as especificidades de nosso sistema requer, para seu estudo e incidência, um tratamento epistemológico cuja profundidade não tem sido requerida por outras tradições e, com ele, o critério a ser seguido em torno da procura de uma identidade de nossa pesquisa como condição para sua relevância e pertinência. A meu modo de ver, origina em nossa cultura e nas formas de construção do conhecimento que são produto dessa cultura, enquanto adotamos e adaptamos o saber gerado por outras.

Tradução de Karly Barbosa

Referências

ALBERT A.; ARRIETA J. e FARFÁN R. (2001). *Un acercamiento gráfico a la resolução de desigualdades*. 3 ed. México, Grupo Editorial Iberoamérica (Coleção Cuadernos Didácticos vol. 3).

ALBERT A. e FARFÁN R. (1996). *Las series matemáticas y el multiplicador en Economía*. Publicações de la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formação de Professores e Investigação en Matemática. Teresa Cruz et alii (eds.). Puerto Rico, Puerto Rico.

ARTIGUE M. (1990). "Difficultés cognitives et didactiques dans la construction de relations entre cadre algebrique et cadre graphique". In: BOOKER, G.; COBB, P. y MENDICUTTI, T. (eds.). *Proceedings of PME*. México, 14: 11-18.

_______ (1990a). Epistémologie et didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, v. 10, n. 2-3, pp. 241-286.

_______ (1992). Didactic Engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Selected Papers, pp. 41-66.

BACHELARD G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Librairie J. Vrin {Tradução en español editada por Siglo XIX, México}.

BROUSSEAU G. (1976). La problématique et l'enseignement des mathématiques. XXVIIIème Rencontre de la Cieaem. Louvain la Neuve.

_______ (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 4, n. 2, pp. 167-198.

_______ (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, n. 2, pp. 33-112.

BROUSSEAU G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, n. 3, pp. 309-336.

CANTORAL, R. e FARFÁN, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introdução al análisis. *Epsilon*, n. 42, pp. 353-369.

______ (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution. *Educational Studies in Mathematics*, v. 53, n. 3, pp. 255-270.

DUBINSKY, E. e HAREL, G. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EUA, MAA, Notes 25.

FARFÁN, R. (1997). *Engenharia Didáctica y Matemática Educativa. Un estudo de la variação y el cambio*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

FOURIER J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*. Chez Firmin Didot, Pere et Fils. Libraires pur les Mathématiques. L'architecture hydraulique et la marine. Rue Jacob, n. 24, París. Reimpressions Editions Jacques Gabay (1988).

LEZAMA, J. (1999). *Un estudo de reproducibilidad: El caso de la função exponencial*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

______ (2003). *Un estudo de reproducibilidad de situações didácticas*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

MELCHOR, T. (1996). *El concepto de función y su relación con la proporción*. Dissertação de mestrado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

SIERPINSKA A. (1992). *On understanding the notion of function. The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Dubinsky & Harel (eds.). MAA Notes. 25: 23-58

TRUJILLO R. 1995. *Problemática de la enseñanza dos logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

ZÚÑIGA L. 1993. *Competencia, cognição y currícula en precálculo en un ambiente gráfico: un acercamiento cuantitativo en el marco de la engenharia didáctica*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Recebido em nov./2001; aprovado em mar./2002

The social production of school mathematical thinking

STEPHEN LERMAN*

Abstract
Studies of teaching and learning that aim to focus on mathematical thinking generally draw on notions of what might constitute the essence of the thinking of a mathematician. I will examine research that looks at how mathematical thinking is produced in the classroom and at how different forms of pedagogy have different outcomes for different groups of learners. I will report on a number of projects in which I have been engaged that address this theme. I will then consider how sociological and psychological perspectives might combine to inform research on teaching and learning mathematics.
Key-words: *Mathematical thinking; combining sociological and psychological perspectives.*

Resumo
Estudos de ensino e aprendizagem que visam enfocar o pensamento matemático utilizam, em geral, noções sobre o que pode constituir a essência do pensamento de Matemáticos. Neste artigo, examinarei projetos de pesquisa que consideram como o pensamento matemático é produzido na sala de aula e como diferentes formas de pedagogia têm diferentes impactos sobre diferentes grupos de aprendizes. Também discutirei como perspetivas sociológicas e perspetivas psicológicas podem ser combinadas para subsidiar pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.
Palavras-chave: pensamento matemático; perspectivas sociológicas e psicológicas.

Introduction

In this paper it is my intention to engage with the 'bigger picture' in relation to researching mathematics teaching and learning. In doing so I will build on two recent publications in particular (Lerman, 2000a; 2001a) although my concern with the theories and perspectives used within the community goes back many years. I start from the notion

* South Bank University, London, UK. E-mail: lermans@lsbu.ac.uk

that mathematical competence is defined and produced in school classroom interactions. Everyday activities may be harnessed by teachers and texts to serve the purposes of school mathematics. Explicitly mathematical activities may also be encountered outside school, usually through the actions of parents, other adults or siblings. One might also engage in debates about natural, innate human powers that develop into mathematical competencies. But what counts as doing mathematics and achieving mathematical success depends on what is valued in schools and different conceptions of what is important produce different kinds of mathematical thinking (Boaler, 1997).

I will first introduce some key issues to be taken into account in theory building including a distinction between 'mathematics' and 'school mathematics', political influences, and equity issues. I will indicate how sociological theory enables us to address these issues in ways that neither mathematics nor psychology as fields of knowledge-discourse permit. I will then describe briefly three projects in which I have been engaged in the last few years drawing on the sociological theory of Basil Bernstein (e.g. Bernstein, 2000). In the following section I will argue that an appropriate psychology is also required for educational research and I will discuss complementarity and compatibility in the search for an appropriate psychology. Finally I will present some thoughts on a unit of analysis that, again, builds on my previous publications and brings together the tools we require for study of school mathematics classrooms.

Key issues in researching the teaching and learning of mathematics

Studies of teaching and learning that aim to focus on mathematical thinking generally draw on notions of what might constitute the essence of the thinking of a mathematician. The questions they address are: what is mathematics; what do mathematicians do; how do mathematicians think? These are epistemological questions, to be answered by introspection by practising mathematicians (Polya, 1957; Hadamard, 1945; Davis and Hersh, 1981) or systematic survey (Burton, forthcoming) and we have some very well known and important texts on mathematical thinking based on this kind of approach (e.g. Mason, Burton and Stacey, 1982).

In any case as Burton (e.g. 2001) found, mathematicians describe a whole range of perceptions when asked questions about their practices; any hope for a unified view will not be satisfied. It is scarcely surprising that this proliferation of perceptions of mathematics exists: in these post-modern times we can suggest that fields of knowledge expand, build upon each other and themselves, fragment, proliferate, serve a range of purposes, defend their territory from attack of shrinking resources and changing statuses within Universities. Academics struggle for students, for grants, to get published, whilst teaching more students with greater range of preparedness for their studies.

In my recent work I have drawn on the assumption that school mathematics is different, although related, to mathematics as practised by mathematicians. One of the many things we have learned from postmodern theorising is to ask who benefits by any discourse, or where does the power lie in the power/knowledge carried by the discourse. Searching for the *essence* of what it is to know mathematics might serve the interests of conservative thinkers; they might find such debates useful in their efforts to (re)gain control of the uncontrollable, in this case the learning of mathematics. We see evidence, perhaps, in the Math Wars in California. Whilst many in the community might subscribe to the interpretations of mathematical thinking of Mason *et alii* (1982), for example, that view can be disputed by other mathematicians who argue for a focus on algebraic competence as the essence of what is required from school mathematics. After all, today's mathematicians (and mathematics educators!) went through just such a form of mathematical pedagogy themselves. In engaging with these questions, however, I propose that we agree to abandon the essentialist search and look instead at the sociological question "what does it mean to know *school* mathematics". This shift does not make the target more unitary: in different countries across the world and within countries themselves, school mathematics looks different. Traditional mathematics, skills, drill and practice, child-centred, problem-solving, authentic, reform, ethnomathematics, criticalmathematics are just some of the forms we can find. {We might conjecture that various versions of a 'traditional' pedagogy are the most common across the world although many countries are attempting to implement some kind of reform programme. This latter may be driven by broadly constructivist ideas of how children learn influenced perhaps by ideas of the role of the teacher in scaffolding learning, the Brunerian early version of Vygotsky's zone of proximal development. Here I am touching on theories and their use in research. I won't pursue this further (but see Lerman, 2000a; 2001a).] What the shift does is to change the intellectual field from epistemology to sociology, opening up the possibility of different kinds of systematic empirical study. This is not to deny the importance of epistemological studies of mathematics – they provide important support across a range of aspects of mathematics teaching and learning – but to indicate what can be gained by drawing on sociological theory. A key question for the community has to be why the same social group of students, those from low socio-economic backgrounds, fail in school mathematics no matter what form of pedagogy dominates. How can that be? What explanations are there for that? Sociology can offer explanations that neither mathematics nor psychology can offer. Both of these latter discourses can only talk of a student's failure or deficiency. Psychology is the study of normal behaviour and development and therefore inevitably whoever does not conform is deviant or deficient. I will return to the issue of sociology and psychology as different explanatory discourses below.

There are many agencies at work in the struggle for what should constitute school mathematics. In the UK one of the least powerful agencies in what Bernstein calls the unofficial field is that of teachers and researchers in mathematics education: this is not the case in the US nor in some other countries I expect. The key point is that what we as a community choose – when our relationship to official agents and agencies is such that we (the mathematics education community) are consulted or have some say in the matter – to teach in school is always a selection from what we (or whoever decides) perceive to be Mathematics (academic, in business/industry, etc.). Values are always associated with that choice, values as to what education should be all about, what and whose purposes it serves, and in particular what mathematics education should be all about (ethnomathematics, critical numeracy, traditional content, or whatever). These are political battles, as described so well by Michael Apple (1995), Stephen Ball (2002) and others. The move to setting standards, national testing, international comparisons, inspection of schools and teacher education courses, and so on, are much more about Governments being seen to change what has gone before, setting targets for 'improvement' and being seen to have achieved those targets, as about the expression of the values of that party: getting re-elected is everything. One can look at Bush's "No Child Left Behind" as partly an expression of an attempt to regulate the schools – after all no teacher wants children to be left behind – and partly the kind of sound bite that makes a President popular.

What is much more important, though, is that these battles matter to young people for their future lives and therefore for society as a whole. Who succeeds and who fails in any particular version of school mathematics and why, are crucial research questions for us in mathematics education. When the same social groups are repeatedly failing, we might better say are being failed by schooling, a frustrated and angry underclass results. In the past the underachievement of girls has been studied extensively. Now that girls are performing better than boys in all subjects to the age of 16 in the UK, Australia and other countries, whilst the popular rhetoric calls for studies of the underachievement of boys (in many countries) more nuanced and sensitive research (see Zevenbergen, 2000, for example) reveals the interplay of gender, class and ethnicity in a complex picture of students' achievements.

I would argue that where our gaze is on what is produced in classrooms as appropriate mathematical thinking, on who succeeds and who fails, and on explanatory frameworks for these phenomena, rather than in a search for an *essence* of mathematical thinking, we lay the responsibility on politics, on school systems, on textbooks, on testing regimes and on ourselves as teachers (in schools, colleges, universities or wherever) and not on the cognitive failure of students. If we see any particular 'reform' as a set of choices based on a set of values, rather then a better representation of what mathematics *really is* we can perhaps welcome analyses of who is failing (e.g. Lubienski, 2001) so that we can also try and analyse why.

In the last 5 years or so I have been learning about and working with the theories of Basil Bernstein the British sociologist of education (e.g. Bernstein, 2000). I have found them particularly powerful in bringing together theories of the macro issues of changes in pedagogic forms (what brought about the shift from traditional to liberal-progressive pedagogies for example) with theories about the micro issues of what happens in the classroom and how those changes might affect different social groups in different ways. Following Bernstein, we could say that knowing school mathematics is being able to produce what is considered as a legitimate or approved text in the mathematics classroom. We therefore need to think about how explicit teachers are with students regarding what they need to produce there in order to succeed. In our (Morgan, Tsatsaroni and Lerman, 2002) study of teachers' assessment of students' written texts we saw indications of how teachers have different expectations of students in terms of what they require and value in their mathematics work. Some teachers looked for concise symbolic expression of the underlying pattern in a particular problem, others looked for discursive forms that could be read and understood by a naïve reader. I could put my own value judgement on what I would prefer to see students produce. For the purposes of this paper, however, what concerns me is whether the rules that teachers are drawing upon are explicit to students. Teachers have a crucial role to play here of course but so too do researchers. Cooper and Dunne's (1999) research has shown how everyday contexts can result in working class students not being able to demonstrate their mathematical knowledge, as the context distracts and positions those students within the everyday and not in the school-mathematical discourse. This is surprising to many researchers and teachers since we assume that everyday contexts will enable students to engage with the mathematical content and provide meaning that can help them produce correct answers.

In general, following Bernstein, we can say that the rules for producing texts that are appropriate in the mathematics classroom are invisible in reform or liberal-progressive classrooms and whilst middle class children are not disadvantaged by invisibility, working class children are disadvantaged. Although the rules in traditional classrooms are visible and therefore equally accessible to all in principle, clearly they have their own drawbacks too. As teachers we might want to stick to our liberal-progressive mode (or developments within this model towards ethnomathematics or criticalmathematics) but make the rules more explicit. As researchers (or teacher-researchers) we would want to research the effects of such 'pedagogic engineering' in an attempt to improve the opportunities for success of all our students.

I will describe here in more detail three studies in which I have been engaged recently, drawing on Bernstein's work.

Current research

In the first of these studies we (Morgan *et alii*, 2002) carried out a re-examination of Candia Morgan's (1998) research on how teachers assess students' coursework in mathematics when they produce written texts of investigations in high stakes situations. Morgan's study grouped teachers' responses into eight categories: examiner using externally determined criteria; examiner, setting and using her own criteria; teacher/advocate looking for opportunities to give credit to students; teacher/adviser, suggesting ways of meeting the criteria; teacher/pedagogue, suggesting ways students might improve their perceived levels of mathematical competence; imaginary naïve reader; interested mathematician; and interviewee.

Drawing on and developing Bernstein's theories we were able to re-classify these into four positions based on whether teachers were orientated towards students or towards the mathematical texts and whether they drew on official (mainly advice from the examination board) or unofficial (teachers' own) discourses. This systematic, theory-driven re-analysis enabled us to make many observations that we could not make as a result of the former empirical classification, including the following:

> ... the approach that we have provided enables a conversation between the theoretical and empirical fields of the research focus, and allows us to understand teachers' relationships to the discourses at play in evaluation practices. Beyond assessment, the theoretical framework allows us to take account of social forces when studying teaching, teachers, and differences between teachers. (p. 459)

Furthermore,

> Bernstein's framework enables a more elaborated language for describing the mechanisms whereby social forces impact upon schooling. Without such a language, connections with the ideologies of social groups remain covert, hindering possibilities of resistance. (p. 459)

The model is currently being developed and applied to another study entitled "The production of theories of teaching and learning mathematics and their recontextualisation in teacher education and education research training" (see Lerman, Tsatsaroni and Xu, 2003; Tsatsaroni, Lerman and Xu, 2003). The aim of our research project[1] is to analyse the processes whereby mathematics educational 'theories' are produced and the circumstances whereby they become current in the mathematics education research field, are recontextualised, and are acquired by teachers and teacher educators. We are constructing a representation of the field of mathematics education research through which we are exploring the reproduction of identities, as positions, of researchers and teacher educators in the field, the recontextualisation of pedagogic knowledge and the reproduction of identities of mathematics teachers. We have explored, as sub-questions, who produces theories in mathematics education, with what methodologies and to what consequences for research and for school practice? Through examining the structure of the knowledge-discourse in its field of production we have explored the conditions and factors that affect the movements of the positions within the discourse thereby exploring questions such as the following: who are managed, whose identities are produced and who are the managers of these identities (e.g. the funding agents, journal publishers etc.). We are currently working on a model to talk about identities of academics, and changes in those identities over time and place. We are looking both at the intersections of the mathematics education research community with other research communities, such as science education research, educational research, psychologists, sociologists and mathematicians; and also with other 'stakeholders' of mathematics education research such as central and local education authorities concerned with education policy, parents, teachers and others.

Finally, in the project *Teaching and Learning – Mathematical Thinking*[2] we have been seeking to develop and integrate theoretical

1 The full text of the project proposal is at http://www.sbu.ac.uk/cme/ESRCProjectHOMEPAGE.html

2 *Teaching and Learning – Mathematical Thinking* has been supported by the Fundação para a Ciência e a Tecnologia, grant no. PRAXIS/P/CED/130135/98.

approaches to the study of aspects of school mathematics (see Carreira, Evans, Lerman and Morgan, 2002). The theoretical approaches we have utilised have in common a focus on the socially organised nature of thinking as it is embedded in social practices. An important part of the project has been the attempt to apply our theoretical concepts to study empirical data. This has raised a number of methodological issues.

At the beginning of the project, we chose a number of substantive aspects of school mathematics teaching and learning on which to apply the developing theory. In reflecting on the processes of research, the question is raised: how is the research object (e.g. transfer, assessment, emotion, mathematical thinking) identified? The 'problem' is present (that is, it is named) in the field of mathematics education research but it does not actually become a research object until we bring theory to bear on it. We must ask, therefore, what is the role of theory in constructing the object of research.

Given our focus on the social organisation of phenomena in mathematics education, it is only consistent to ask also about the ways in which specific practices of research in general, and of mathematics educational studies in particular, influence the construction of the research object and the ways in which the theoretical is linked with the empirical. In addressing this question it may be useful to categorise different kinds of theory, for example, metaphors, conceptual models, or what Maton (2000) calls theories orientated to knowledge or to the knower. This also raises the issue of the relevance of questions about the relationships between participants in research practices and the identification of the research object, that is, questions such as: Who identifies and defines the research object? To what extent is it the researcher's research object and how are other participants in the community (of mathematics education, education, research, etc.) present in its definition? How are the participants and the educational structures affected by the research and how is their voice heard?

Sociology and Psychology

I have found sociological theory to be very fruitful and indeed powerful in these studies. For studying teaching and learning, however, they are not enough. What we require, in my view, are a *process* and a *mechanism* of learning. Sociological theories could be said to provide us with a way of understanding how society produces and reproduces identities. Forms of pedagogy provide the power and control mechanisms whereby the social relations of the mathematics classroom, for instance, position students (and teacher) such that certain social groups are advantaged and others disadvantaged. What is needed is a *complementary* psychology to enable us to articulate how individuals are regulated and how learning comes about. These are not addressed in sociology (Daniels, 1993). Complementarity is not just an issue of inserting a theory into a space where theory is needed: the manner in which different theories are claimed to be complementary needs to be examined and justified. I say this because it is quite common within the mathematics education research community to find researchers taking an individualistic psychology and 'complementing' it with elements of the social situation of the classroom. Without care, theories that are largely incompatible, perhaps contradictory, may be put together under the umbrella term of complementarity. I would argue that compatibility needs to be sought between discourses that are predominantly independent, such as sociology and psychology, not assumed. Sfard (2001) indicates just such a need when suggesting that traditional approaches to teaching, drawing on an acquisition metaphor, can be thought of as complementary to thinking-as-communicating, drawing on a participation metaphor. Sfard offers two analogies, that of Euclidean and non-Euclidean geometries and the incommensurable theories of light as wave and as corpuscle. The former seemingly incompatible theories are brought together through perceiving of them from the perspective of axiomatics: the choice of different sets of axioms results in different geometries. The latter may be brought together if physics ever arrives at a unified field theory. How do these help us as exemplars for theory building in mathematics education research? I am not sure that they do. We can describe psychology and sociology (and philosophy and...) as parallel knowledge-discourses which may address the same objects (learning for example) in quite different ways and with quite different tools. They have a horizontal, rather than hierarchical, relationship to each other; there cannot be a subsuming discourse. Thus the first analogy doesn't model the situation. Educational knowledge production needs to draw on several intellectual fields and needs to look to practice as well. For this reason Bernstein (2000, p. 52) calls education a region rather than a field, and likens it to medicine. If we are to draw on psychology and sociology we should look, perhaps, for a common metaphor or common foundations to ensure that we are not trying to put together incompatible theories. Examples I offer of incompatibility are: 'learning leads development' and 'development leads learning'; "learning without being taught" (Papert, 1980, p. 7) and "instruction... determines the fate of (the child's) total mental development" (Vygotsky, 1986, p. 157). Thus, as I have argued at length (Lerman, 2000b) to put together a Piagetian constructivism (the first part of each of these dichotomous pairs) with extracts of Vygotskian cultural psychology (the second parts) are highly suspect. We can and should avoid incompatible and incommensurable theories if the results of our research are to be coherent.

I have suggested elsewhere that Vygotsky's psychology is a good candidate for a complementarity with Bernstein's sociology (see Daniels, 1993). Both look to Marx for the foundations of their theories; they regard consciousness as social products. Where Bernstein argues that different forms of consciousness are produced according to one's relation to the means of production, in this case of symbolic production rather than material production, Vygotsky provides both the mechanism and the process whereby consciousness is a socio/historico/cultural production. The *mechanism* is the adult or more informed peer in the zone of proximal development; it can also be "the student's imaginative play and the child's solving a problem at home relying on a model that has been shown in class" (Gredler and Shields, 2003). The *process* is internalisation and in particular the development of higher mental functions. Thus Vygotsky's cultural psychology enables us to examine in microgenetic detail the effects of the regulation of social practices described by Bernstein in such locations as the mathematics classroom.

Unit of analysis

My attention was first drawn to the issue of a suitable unit of analysis by Vygotsky's call for the bringing together of affect and cognition and the identification of a unit of analysis for this. In general, research is framed by what one chooses to look at, and necessarily by default what one does not look at. If in principle one wants to work from within a sociocultural perspective the issue of the choice of object of research and the unit of analysis is crucial. In Lerman (2001a, p. 98), seeking to develop a unit to take into account Bernstein's work, I wrote the following:

> The title of Vygotsky's book *Mind in Society* captures that unit, and it is also expressed by Lave and colleagues as person-in-practice and by Wertsch as person-acting with mediational means (Wertsch, 1991, p. 12). We could extend that unit further by taking account of the discussion of the regulating features of social, discursive practices. As a person steps into a new practice, in social situations, in schooling, in the workplace, or other practices, the regulating effects of that practice begin, positioning the person in that practice. Goals and needs are modified by the desire to participate, the desire not to participate, or the many other possible positions. Even if a person withdraws from a practice after a short time, she or he has been changed by that participation. We might therefore talk of practice-in-person to capture the regulative effects of participation. Combining these, we might talk of a unit of analysis of person-in-practice-in-person, or mind-in-society-in-mind. (Slonimsky, 1999)

In that paper I attempted to outline a toolkit for research to work with the unit of analysis person-in-practice-in-person. I also attempted to bring together analyses of details in a classroom at the finest level and macro-issues of social forces on education through the metaphor of a zoom lens. Elsewhere I wrote the following:

> I want to suggest, though, that psychology can be seen as a moment in socio-cultural studies, as a particular focusing of a lens, as a gaze which is as much aware of what is not being looked at, as of what is. This is an adaptation of Rogoff's planes of analysis, into a dynamic metaphor in which one might envisage a researcher choosing what to focus on in research through zooming in and out in a classroom, as with a video or still camera, and selecting a place to stop... A discursive, cultural psychology locates its

> interpretation of the individual at the intersection of overlapping language games in which the person has developed and thus is necessarily rooted in the study of cultures and histories. Draw back in the zoom, and the researcher looks at education in a particular society, at whole schools, or whole classrooms; zoom back in and one focuses on some children, or some interactions. The point is that research must find a way to take account of the other elements that come into focus throughout the zoom, wherever one chooses to stop. (Lerman, 2001b, p. 4)

I want here to try to operationalise the unit of analysis in another way. As I have already mentioned, there is much talk in the mathematics education community of the need to merge the social with the cognitive. I will interpret this to mean that there is a need, when working from a sociocultural perspective, to be able to explain what happens in the individual's mind and to answer the question of what constitutes the individual's knowing. Billet (2002) proposes a three-part analysis, the sociocultural, the situational and the ontogenetic. The sociocultural carries the history of the practice whilst the situational carries the context specific, regulatory aspects of the practice at the local level. These together, constitute the sociogenetic. The ontogenetic conveys the personal histories of the individuals, although these too have social origins. The 'cognitive' is interpreted as what ends up in the goals/actions/procedures of the actor.

Therefore, considering goal-directed activities within a cultural practice provides a basis from which to understand the relations between sociogenetic sources and ontogenies (i.e. the relations between social and cognitive experience) through an examination of the inter-psychological processes that comprise the enactment of these activities. (Billet, 2002, p. 139)

Billet's study is in a vocational setting, that of hair-dressing, and he examines a range of hair-dressing salons in Australia and abroad in order to identify (a) what is in common across salons and in the practice of hair-dressing, the sociocultural, (b) what is unique to a particular salon, the situational, and (c) what is idiosyncratic to an individual hair-dresser, the ontogenetic. He develops criteria by which to determine the particular character of actions or utterances.

I want to discuss here how we might apply his model to the mathematics classroom. I will do this by presenting some data that I have analysed previously by looking for the emergence, or otherwise, of zones of proximal development in mathematical activity of a pair of students (Lerman, 2001c). Here I will propose an extension of the data collection to enable an analysis using Billet's approach and I will then conjecture what might be gained by such an analysis.

The extract I chose from amongst many hours of video recordings of a particular 8th Australian grade class and their teacher was of an episode of instruction of a sub-group of the class, followed by the work of a pair of students. The teacher set some ratio questions in what she called a 'ratio pep test' to all the students in the class, telling them to cross out the ones which contained algebraic terms. She then called several of the students to the front of the class, the ones who elsewhere she referred to as 'those who like working ahead'. She gave these students some extra instructions on cancelling algebraic terms in fractions and ratios, which later she called an 'algebra trick', so that they could also answer the crossed-out parts of the question. At the end of the transcript her "Bye" (utterance 15) sent them back to their desks to work on all the ratio questions.

1.	T:	Just working ahead a little bit?... OK. Now, I'm going to think of three numbers, right?, x is going to be 7, y is going to be 9, and uh, m is going to be 3. OK? Now I'm going to multiply x by 5. I would write it as 5x. OK? I'm going to multiply y by 5, how would I write it?
2.	Ss:	5y.
3.	T:	OK. And I'm going to multiply m by 8.
4.	Ss:	8m.
5.	T:	All right. Now, I'm now going to divide x by 5. Now what's going to happen if I do that?
6.	Ss:	Be the same number.
7.	T:	Ah. It's going to go back to the same number. All right. I'm now going to take this, um, I multiplied m by 8, I'm now going to divide it by m. What am I going to be left with?
8.	S:	Eight.
9.	T:	Um. Is it?
10.	S:	Yes.

11. T: Right, m is 3, 8 times 3 is 24, divided by 3, brings it back to 8. Do you notice that this one you told me brought it back to 7. Seven times – 5 times 7 is 35, divided by 5 is 7. Good. And this one here you told me went to 8. Now can you see a pattern?
12. S: Yup.
13. T: Right, if anything's on the top I'm multiplying, if anything's underneath I'm dividing. So this is actually a multiply by, and this is actually a divide by. Can you see how they cancel each other out?
14. Ss: Yeah.
15. T: So really you say 5 into 5 goes once, and 5 into 5 goes once, so really I've got 1x over 1, which is just x. And this one here is I've got n, which is a number and I'm going to divide it by itself. They cancel out and give me 1, so I've just got 8... Bye.

The extract below is the work which the pair, named here D_ and M_, undertook when they sat down after the extra instruction. There were a few interchanges in which they confirmed what they were supposed to do. The conversation begins immediately after those interchanges when they began work on the task "Simplify ab:ab".

1. M: What? Equals ab? [pause, D looks on M's page] Equals ab?
2. D: Yeah.
3. M: No, it equals one.
4. D: Wait a second...
5. M: 'Cause one, [punching calculator buttons] twelve times tw... no. One, look, look, look. One times two, divide one times two...it shouldn't equal four. [M appears to be substituting the values one and two for a and b]
6. D: [laughs]
7. M: Um, yeah, it's, 'cause I'm doing [punching buttons] one times two, divide one times two, equals one.
8. D: So that's cancelled. The two b's are cancelled out.
9. M: Equals one.
10. D: Right? The two b's are cancelled out.
11. M: Hey, where'd my pen go? No come on, look, look, look, look. You've got to do BODMAS. Watch, watch, watch, watch. [punching buttons] One times two, divide one...come on, one times two. That's stuffed up. [with emphasis] One.
12. D: ... I'm going to ... this is ... better ....

13. M: Look, look, look, look at this one, look at this one.
14. D: ... Hang on ...
15. M: Divide.
16. D: ... I'm going to do these, this one first.
17. M: Equals 1, it does equal 1. I've got to do this first.
18. D: Takes {inaudible}. {pause} Two.
19. M: Oh, reduce to the simplest terms. Oh, OK, um. {pause, punches calculator} All right. Shit. {pause, both work}
20. D: {inaudible} here and speed.
21. M: One point 1? {inaudible}
22. {T talks with nearby student}
23. M: Mrs B_? Mrs B_, do we simplify that as well? Question one {?}?
24. T: Yes, you do.
25. M: OK.
26. T: And you're right.
27. M: OK.
28. T: {looking at M's work} So you got one right and you got two right.
29. M: I know.
30. T: Yep. Ah no because it's a ratio. Oh, I guess you could say yes, I'll accept that. Yep.
31. M: Thank you. {T goes to A and L's desks}
32. D: We don't go on to that yet.
33. M: Yes, we do. {with emphasis}
34. D: Are we supposed to do that?
35. M: Yes. {with emphasis}
36. D: Yeah, that {points with pencil on M's paper}, that's not, that equals ab, doesn't it?

Here the unit of analysis is not a particular conversation, in fact, but the social practice as a whole and its effects on the activity of the pair since one is examining the three aspects: the sociocultural, the situational and the ontogenetic. The first element in Billet's model is the sociocultural, the history of the activity. It consists of school mathematics as it is practised in the state and the school as expressed by a curriculum and perhaps guidance or requirements of forms of pedagogy (this describes the situation in Australia – in other countries it may be as practised in the form of pedagogy of a whole country or of a school district, and it may be by fiat or by tradition). One could access the soiocultural both through looking at curriculum documents used by the state/school and by looking across at other classrooms covering the same content. The sociocultural would be what is in common across those classrooms and 'rules' for the identification of commonalities would need to be developed in interaction with the data. Bernstein's pedagogic device (2000, pp. 27-37) could be drawn upon to provide an appropriate set of tools for such an analysis.

Second, the situational would focus on what is specific to this teacher and her classroom and how she sets up the possibilities for students' mathematical activity. I will list and number these here and then make direct references to the transcripts. In the extract above, in terms of mathematical strategies, she offers (1) both cancelling of common factors in denominators and numerators and substitution of particular numbers in place of letters to gain a sense of what is meant by an expression. We can also note that she does not distinguish between fractions and ratios (2). The teacher has positioned some students as more able (3) and students are made aware explicitly who is considered to be in this group and, by default, those who are less able. The teacher expects students to work in pairs and sets up the classroom so as to enable shared work. She is not averse to noise, nor to students talking beyond their pairs when comparing answers and methods (4). The use of calculators is encouraged (5).

Evidence of the effects of the situational can be seen in in relation to these 5 points:

1. M_ works with substitution, at least in the attempted demonstration of the correctness of his answer of 1 as can be seen in utterance 5 and beyond. D_, on utterance 8, is drawing on rules for cancelling to begin his independent work on the task.

2. M_ comes up with an answer of 1, rather than the ratio 1:1, in utterance 3 and the teacher accepts that answer on utterance 30.

3. Of the pair of students D_ and M_, the latter is always one of those called out. In this instance one of the 'able' students chose not to join that group. D_ asked if he could join the group for this occasion and the teacher agreed. In general however D_ was positioned as less able than M_. In a subsequent interview the teacher said, on looking at the video of the two boys working, "And the fact that he's helping D_ with this is fantastic because it'll help M_ in the process... And D_ I think is just keeping it there at the same pace....".

In fact D_ seems not to follow M_'s explanations and turns away to work alone, as seen in utterances 4, 8, 10, 12, 14 and 16. In the video D_ appears to be somewhat despondent. When the work was handed in D_ had crossed out his own answer and written "1".

4. Although not obvious from the transcript, the video shows students interacting, although 'off-task', between pairs.

5. The free use of a calculator has certainly helped to structure the interchange between the two students and M_'s failure to get the calculator to produce the answer he wants is a factor in the lack of useful communication between the students.

As observers we might want to note that D_'s work using cancelling was quite correct and more general in its applicability than M_'s substitution. D_ did not pursue his method, however, and M_ might only have been using cancelling to demonstrate the correctness of his solution. In general, to distinguish between what might be idiosyncratic to either or both of these students rather than the effects of the situational we would need to look at the work of several pairs of the students in this class working on that task at that time who were in the group of 'those who like working ahead'. I have attempted to demonstrate, however, the kind of analysis that might take place when identifying the situational.

Third, looking at the ontogenetic would require further data, such as interviewing the students as they work individually on similar problems as soon as possible after the lesson and at least before further instruction.

Concluding remarks

Finally then, what might be gained by using Billet's analysis in this way? We are able to look at the cognitive as it is regulated and produced in the sociogenetic circumstances. We are able to look, also, at what students take from the learning activity, again enabling an examination of the individual, ontogenetic activity arising from the inter-subjective. At the same time we gain a perspective on the sociogenetic itself and we are able to distinguish the features of the practice that are characteristic of that particular classroom, set against the context of the school and the curriculum more generally. The unit person-in-practice-in-person can be usefully examined from Billet's framework to provide insights that draw on sociological and the psychological discourses in a complementary way.

To return to where I began the paper and the arguments set out here, Billet's analysis, and indeed the Vygotskian one I gave in Lerman (2001c), are focused on looking at how mathematical thinking and mathematical competence are produced in mathematics classrooms. I have chosen not to continue and contribute to epistemological analyses but instead to work with sociological theories, complemented by what I have argued are compatible psychological theories. In placing notions of what counts as successful mathematical activity within classroom interactions locates the burden of achieving the success of as many of our students as possible in the social context and not in the individual's ability or its lack.

References

APPLE, M. (1995). "Taking power seriously: New directions in equity in mathematics education and beyond". In: SECADA, W. G., FENNEMA, E. and ADAJIAN, L. B. (eds.). *New Directions for Equity in Mathematics Education*. Cambridge, UK, Cambridge University Press.

BALL, S. J. (2002). *Class Strategies and the Education Market: The Middle Classes and Social Advantage* London, RoutledgeFalmer.

BERNSTEIN, B. (2000). *Pedagogy, Symbolic Control and Identity*. Lanham, Maryland, Rowman & Littlefield.

BILLETT, S. (2002). Sociogenesis, Activity and Ontogeny. *Culture and Psychology*, v. 9, n. 2, pp. 133-169.

BOALER, J. (1997). *Experiencing School Mathematics: Teaching Styles, Sex and Setting*. Buckingham, Open University Press.

BURTON, L. (2001). Research Mathematicians as Learners – and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal*, v. 27, n. 5, pp. 589-599.

______ (forthcoming). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics* Dordrecht, Kluwer.

CARREIRA, S.; EVANS, J.; LERMAN, S. and MORGAN, C. (2002). "Mathematical Thinking: Studying the Notion of 'Transfer'". In: COCKBURN, A. and NARDI, E. (eds.). *Proceedings of the Twenty-sixth Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. School of Education and Professional Development, University of East Anglia, Norwich, UK.

COOPER, B. and DUNNE, M. (1999). *Assessing children's mathematical knowledge*. Buckingham, Open University Press.

DANIELS, H. (ed.) (1993). *Charting the agenda: Educational activity after Vygotsky*. London, Routledge.

DAVIS, P. J. and HERSH, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Brighton, Harvester.

GREDLER, M. E. and SHIELDS, C. (2003). Several Bridges Too Far: A Commentary on Richard S. Prawat's 'Dewey Meets the 'Mozart of Psychology' in Moscow: The Untold Story. *American Educational Research Journal*, v. 40, n. 1, pp. 177-187.

HADAMARD, J. (1945). *The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Boston, Princeton.

LERMAN, S. (2000a). "The social turn in mathematics education research". In: BOALER, J. (ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. Westport, CT, Ablex.

______ (2000b). A case of interpretations of 'social': A Response to Steffe & Thompson *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 31, n. 2, pp. 210-227.

______ (2001a). The Function of Discourse in Teaching and Learning Mathematics: A Research Perspective. *Educational Studies in Mathematics*, v. 46, n. 1-3, pp. 87-113.

______ (2001b). A cultural/discursive psychology for mathematics education research. In: ATWEH, W.; FORGASZ, H. & NEBRES, B. (eds.). *Socio-cultural aspects in mathematics education: An international perspective*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum & Associates.

______ (2001c). "Accounting for accounts of learning mathematics: reading the ZPD in videos and transcripts". In: CLARKE, D. (ed.). *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms*. Dordrecht, Kluwer.

LERMAN, S.; XU, G. and TSATSARONI, A. (2003). Developing theories of mathematics education research: the PME story. *Educational Studies in Mathematics*, v. 51, n. 1-2, pp. 23-40.

LUBIENSKI, S. T. (2001). *A second look at mathematics achievement gaps: Intersections of Race, Class and Gender in NAEP Data*. Paper presented at American Educational Research Association, Seattle, April.

MASON, J.; BURTON, L. and STACEY, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Prentice Hall.

MATON, K. (2000). Languages of legitimation: the structuring significance for intellectual fields of strategic knowledge claims. *British Journal of Sociology of Education*, v. 21, n. 2, pp. 147-167.

MORGAN, C. (1998). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation*. London, Falmer.

MORGAN, C.; TSATSARONI, A. and LERMAN, S. (2002). Mathematics teachers' positions and practices in discourses of assessment. *British Journal of Sociology of Education*, v. 23, n. 3, pp. 443-459.

PAPERT, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Brighton, Harvester Press.

POLYA, G. (1957). *How to Solve It*. New York, Anchor.

SFARD, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics,* v. 46, n. 1-3, pp. 13-57.

SLONIMSKY, L. (1999). Personal communication. September.

TSATSARONI, A.; LERMAN, S. and XU, G. (2003). *A sociological description of changes in the intellectual field of mathematics education research: Implications for the identities of academics*. Paper presented at American Educational Research Association, Chicago, April.

WERTSCH, J. V. (1991). *Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action*. Cambridge, MA, Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. (1986). *Thought and Language*. Trans. and ed. A. Kozulin. Cambridge, MA, MIT Press.

ZEVENBERGEN, R. (2000). "'Cracking the Code' of Mathematics: School success as a function of linguistic, social and cultural background". In: BOALER, J. (ed.). *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Westport, CT, Ablex.

Recebido em mar./2002; aprovado em maio/2002

Aprender a aprender geometría en entornos virtualizados. Análisis de significados docentes sobre la noción de medida.

MARCELO BAIRRAL*

Resumo
Em diferentes pesquisas com vistas ao desenvolvimento profissional em matemática, consideramos importante analisar significados negociados no processo de discussão sobre situações concretas do ensino. Nesta investigação, propomo-nos estudar a contribuição de um entorno virtual para a formação continuada em geometria. Concretamente, (i) identificar e exemplificar aspectos do conteúdo profissional mobilizados no caso específico da Medida, (ii) explicitar elementos do contexto (tarefas e recursos) que influenciaram o proceso teleinterativo. A análise semântica apresenta aspectos do conhecimento educacional em proceso de renegociação colaborativa e enfatiza que é possível que os professores aprendam geometría quando compartilham suas dúvidas, experiências, etc. e refletem criticamente sobre as mesmas.
Palavras-chave: formação continuada de professores; Internet; noção de medida.

Abstract
In different research studies focusing on professional development in mathematics, we considered that it was important to analyze meanings negotiated in the process of discussion about concrete teaching situations. In this investigation we aimed to study the contribution of virtual surroundings for continued education in geometry. Concretely, we aimed (i) to identify and exemplify aspects of the professional content mobilized in the specific case of Measurement, and (ii) to specify elements of the context (tasks and resources) that influenced the tele-interactive process. The semantic analysis presents aspects of educational knowledge in a process of collaborative renegotiation, and emphasizes that it is possible for teachers to learn geometry while sharing their doubts, experiences, etc. and reflecting critically on them.
Key-words: *teachers' continued education; Internet; notion of measurement.*

* Instituto de Educação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (Brasil). E-mail: mbairral@ufrrj.br

Resumen

En distintos planteamientos con vistas al desarrollo profesional en matemáticas consideramos importante analizar significados profesionales negociados en el proceso de discusión colaborativa sobre situaciones concretas de la enseñanza. En esta investigación nos planteamos estudiar la contribución de un entorno virtual para la formación continuada en geometría. Concretamente, (i) identificar y ejemplificar aspectos del contenido profesional movilizados en el caso específico de la Medida, (ii) explicitar elementos del contexto (tareas y recursos) que influenciaron en el proceso teleinteractivo. El análisis semántico presenta aspectos del conocimiento docente en proceso de renegociación colaborativa y subraya que es posible que los profesores aprendan geometría cuando comparten sus dudas, experiencias, etc. y reflexionan críticamente sobre las mismas.

Palabras-clave: *Formación Continuada de Profesores; Internet; Noción de Medida.*

Introducción

Haciendo un recogido de estudios sobre tecnología educacional en contexto nacional e internacional hemos podido percibir que en las investigaciones las mayores preocupaciones han estado centradas en elaborar y analizar entornos constructivistas de aprendizaje (Jonassen y Rahrer-Murphy, 1999), desarrollar entornos interactivos (Clunie, Campos y da Rocha, 1996; Guadamuz, 1997) y en analizar elementos colaborativos en general (Brna, 1998). En matemáticas en especial, Magina (1998) y Borba (1999) verificaron el papel e influencia del uso de la tecnología en la enseñanza. En cuanto a la utilización de la tecnología en la enseñanza de la geometría, las investigaciones se han centrado en dos aspectos diferentes: (1) en el uso del ordenador como mediador en la enseñanza presencial con alumnos (Arcavi y Hadas, 2000) en contextos de pruebas (Almouloud y Gervazoni, 2000; Healy, 2000) y profesores (Sutherland y Balacheff, 1999), utilizando softwares educativos específicos (*Cabri Geometrie, Geometry Suposer, Sketchpad,* etc.) y otros programas (*Excel*, etc.), y (2) en el desarrollo cognitivo de profesores en entornos hipermidias (Koehler y Lehrer, 1998; Horvath y Lehrer, 2000), también presénciales.

Con el desarrollo de la tecnología el aprendizaje a distancia en entornos virtuales empezó a ser más estudiado por las investigaciones en Educación Matemática (Sakshaug, 2000). Según el autor estas investigaciones han tenido dos grandes momentos. En el primer, los estudios pusieron atención en cómo los alumnos aprenden en entornos virtuales, en el segundo, cómo los alumnos aprenden matemáticas cuando la tecnología es una herramienta de aprendizaje y el aprendiz trabaja independientemente de las interacciones con el profesor. Según la autora, los resultados de estas investigaciones han sido insuficientes sobre los efectos del proceso enseñanza-aprendizaje a distancia en matemáticas. Así, lo que propuso fue una atención a cómo los estudiantes aprenden en entornos virtuales cuando la tecnología es utilizada como mediadora de interacciones a distancia entre profesor y alumnos.

En el momento actual, el entorno Interm@tes (Fortuny y Giménez, 2002) posee elementos geométricos disponibles en red y que han sido efectivos en el aprendizaje de alumnos de la enseñanza básica. Interesados en el desarrollo y en la construcción de la identidad profesional en la formación inicial del profesorado de matemáticas Ponte y colaboradores (2002) han estudiado la contribución de las tecnologías de la información y comunicación (adelante TICs). Estudiando y construyendo páginas Webs de intereses matemáticos variados, los docentes que acudieron al curso han presentado actitudes favorables frente al uso de las TICs en la enseñanza y en el aprendizaje propio. Utilizando un entorno específico con interacciones en tiempo real y diferido, Gracias (2003) analizó cómo estudiantes de un postgrado en educación matemática reorganizan su pensamiento sobre tendencias en educación matemática. Dos los estudios que han analizado el aprendizaje matemático en situaciones concretas de la enseñanza, Murillo (2001) analizó las teleinteracciones desarrolladas semi presencialmente con sus alumnos de enseñanza secundaria en resolución de problemas de la geometría plana con el CABRI y Llinares (2002) evaluó la contribución de un debate electrónico en la construcción del conocimiento situado del futuro profesor de primaria en el caso concreto de números.

Como hemos visto, en educación matemática todavía son incipientes en Brasil las investigaciones interesadas en el desarrollo del conocimiento docente en situaciones concretas de geometría mediados por las TICs. En esta perspectiva, el estudio aquí presentado analiza contribuciones de un entorno virtual para el desarrollo profesional en el caso específico de la noción de Medida, identificando y ejemplificando aspectos del contenido profesional movilizados en el caso específico de la Medida, y explicitando elementos del contexto (tareas y recursos) que influenciaron en el desarrollo del proceso teleinteractivo.

Concluyendo la investigación subraya para la importancia de utilizar entornos virtuales como una de las estrategias clave que favorezcan el desarrollo profesional y resalta que es posible que los profesores aprendan sobre geometría cuando comparten seriamente sus experiencias y reflexionan críticamente sobre las mismas. Como contribuciones metodológicas el estudio presenta exemplos y posibilidades de análisis semántico del discurso docente en procesos de formación a distancia mediado por las TICs.

Conocimiento profesional del profesor en entornos virtuales

La caracterización del conocimiento situado del profesor (Llinares, 2002), la consideración de aspectos afectivos con el uso del conocimiento del profesor en las situaciones de enseñanza, su perspectiva profesional y el conocimiento de si mismo (Ponte, 1995; Oliveira, Segurado y Ponte, 1998) nos han permitido plantear tres aspectos – *geométrico, estratégico-interpretativo y afectivo-actitudinal* – que hemos considerado para estructurar el trabajo realizado por Internet con vistas a reforzar el desarrollo profesional docente y tener en cuenta las especificidades del contexto educativo brasileño. Dichos aspectos están relacionados y constituyen elementos del conocimiento profesional que les posibilita a los profesores una reflexión critica situada (Bairral, 2002), en diferentes perspectivas, sobre un proceso constructivo de enseñanza de la geometría, un énfasis metodológico, el papel que juegan las distintas actividades, la evaluación y la secuenciación de contenido.

En el aspecto *geométrico* están las significaciones y reflexiones docentes sobre el proceso de pensar matemáticamente.

Elementos geométricos del contenido profesional
1. *Significaciones:* interpretación y reconocimiento - Conceptos - Terminología - Relación entre conceptos - Procesos matemáticos 2. *Pensar matemáticamente:* comunicación-expresión-razonamiento - Formas de validar resultados - Competencias básicas y procesos de razonamiento - Resolución de problemas - Elementos de Historia de la Ciencia

Llamamos conocimiento *estratégico-interpretativo*, al conjunto de reflexiones que los docentes realizan sobre aprendizaje, instrucción y procesos interactivos.

Estratégico-Interpretativo		
Aprendizaje	*Instrucción*	*Procesos interactivos*
1. *Nociones matemáticas:* - Planificación y rutinas (enseñanza-aprendizaje) 2. *Diseños de aprendizaje* - Procesos de aprendizaje - Conceptos, procedimientos y actitudes - Análisis de casos - Relaciones sociales y socioculturización - El valor de los ejes transversales	- Finalidad y objetivos - Enlace entre contenidos - Enlace entre otros temas - Representación de los conceptos - Materiales: uso, análisis, elaboración - Entorno de trabajo y cultura en clase - Tareas: concepción, selección, secuenciación - Tareas: presentación, apoyo en la ejecución, reflexión - Actividad - Modelos de trabajo en clase	- Relación entre acción y reflexión - Papel de las interacciones - Papel de las concepciones de los alumnos - Papel de los conocimientos previos - Estrategias de razonamiento - Perspectivas con relación a la capacidad de los alumnos - Comunicación y negociación de significados - Intencionalidad

Como hizo hincapié Giménez (1997), de nada sirve hablar de actitudes en Educación Matemática si no se regula y analiza en una buena formación continua y permanente cuáles son las actitudes del profesorado cuando se encuentra en el aula de matemáticas. Las cuestiones afectivas, subraya Gómez-Chacón (2000), juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Cuando los profesores hablan de su experiencia en clases de matemáticas, de los procesos de aprendizaje de sus alumnos, hacen, habitualmente, mención al entusiasmo (u hostilidad o apatía) hacia esta materia. Igualmente cuando se les pregunta a los estudiantes, comentan el interés o (el aburrimiento) por la clase. Esto, que podría ser considerado como una anécdota, es una constatación que pone de manifiesto las respuestas afectivas de los estudiantes hacia la materia.

En esta perspectiva, considerando la importancia de la componente afectiva-actitudinal en el contenido profesional docente y en el proceso de desarrollo profesional, igualmente analizamos y ejemplificamos rasgos de esta componente presentes en los textos de los profesores. Para ello, en el aspecto *afectivo-actitudinal*, están contempladas las actitudes frente al aprendizaje propio y de los alumnos, concientización y socioculturización, flexibilidad, enjuiciamiento, equidad y valores en la enseñanza.

Afectivo-Actitudinal
- Valor de la motivación. Autocontrol - Concientización y realidad - Flexibilidad - Compartir - Actitudes frente al aprendizaje propio y de los alumnos - Reflexión de/sobre lo que piensa-hace - Enjuiciamiento - Trabajo colectivo y colaborativo - Equidad y valores

En una investigación Bairral (2002) reconoció que se ponían de manifiesto un serie de estrategias en el desarrollo profesional docente a partir de la implementación de un entorno virtual de aprendizaje. Igualmente constató que se estructuró un ambiente colaborativo (Llinares,

2002) de trabajo donde los profesores interaccionaron con diferentes medios (herramientas y recursos materiales o informáticos) en situaciones de su cotidiano profesional que les propiciaron el desarrollo y la reconstrucción de su conocimiento profesional. Este proceso de resignificación se basó en potenciar el conocimiento conceptual, la formación sobre conceptos matemáticos, sobre procesos cognitivos de alumnos en clase y sobre el trabajo en acción de los propios profesores (García y Sánchez, 2002).

Significaciones profesionales compartidas y situadas. El caso de la medida

Los profesores pueden elaborar diferentes significados sobre situaciones de su práctica dependiendo de las circunstancias y de su experiencia previa (Horvath y Lehrer, 2000). Además, consideramos que un significado puede ser (re)construido por alguien de acuerdo con una serie de convenciones para crear sentido en sus palabras, textos escritos, diagramas o gestos. En esta óptica, subraya Lemke (1997), solamente podemos crear sentido en tanto que compartamos las mismas maneras de elaborar significado y para hacer esto es menester que pertenezcamos a la misma comunidad o algo similar.

En el análisis del contenido del conocimiento profesional del profesor al considerar su naturaleza distribuida es factible conjeturar la integración del conocimiento de la materia y el conocimiento del contenido pedagógico de tópicos concretos. De esta manera será el contexto (Putnam y Borko, 2000) en el que se sitúe el proceso de indagación en la investigación el que determinará primordialmente qué aspectos del conocimiento se están considerando. Así, siempre y cuando no se plantean cuestiones directamente sobre el contenido matemático, las investigaciones estarán intentando describir el conocimiento situado del profesor de matemáticas. Esta situación por tanto explicita la integración de diferentes componentes de conocimiento y "orientaciones" hacia el contenido matemático, que en un extremo son las creencias del profesor (Llinares, 1996).

En el ámbito del desarrollo profesional, Horvath y Lehrer (2000) estudiaron los aspectos y la modificación de la práctica cuando se proporciona a los futuros profesores de Educación Primaria información sobre la cognición de los estudiantes acerca de medida lineal, área y volumen. Para ello, plantearon un sistema multimedia en el que ponen a disposición de los profesores fragmentos de videos de alumnos en clase y su proceso de razonamiento sobre los conceptos claves de la medida. Horvath y Lehrer verificaron que el sistema se mostró efectivo para el aprendizaje de los profesionales. Sin embargo, subrayaron que algunas cuestiones de investigación para la formación continuada siguen abiertas, por ejemplo, analizar las posibilidades y limitaciones del sistema en el aprendizaje cuando se utiliza para mediación de la comprensión matemática de los estudiantes en otros contextos de la práctica docente, una vez que a través de la socialización de trabajos en clase, los profesores empiezan a mostrar interés y explicitar problemas inherentes al quehacer cotidiano profesional (Mewborn, 1999).

En muchos currículos como en el brasileño, la *Medida* constituye uno de los temas que deben desarrollarse en el llamado bloque "Grandeza e Medida". Sin embargo, a pesar del trabajo frecuente en clase, los profesores hacen énfasis en los procedimientos para el cálculo de área y de perímetro de figuras planas, y en técnicas para transformar cantidades descritas en unidades distintas. La *Medida* fue la temática de la primera unidad didáctica de nuestro curso y para que podamos disponer de una variedad de informaciones sobre el recorrido interactivo de cada docente en distintos momentos y espacios comunicativos del entorno, optamos por analizar rasgos del desarrollo profesional en este contenido curricular.

La investigación

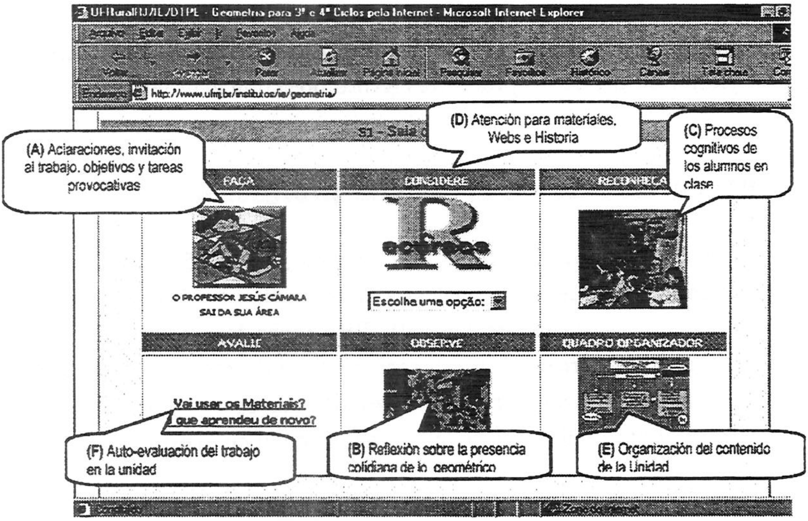
Para poder analizar los progresos en el trabajo geométrico de los docentes, elaboramos e implementamos un entorno virtual para formación continuada del profesorado de Matemáticas por Internet que nació en el año 2000 en el *Campus Virtual* de la Universidad Federal Rural do Rio de Janeiro[1] con duración total aproximada de 70 horas.

1 http://www.gepeticem.ufrrj.br/geometria

Estructuración del contenido profesional en el entorno virtual

El contenido del entorno se organizó teniendo en cuenta las características de un profesorado con licenciatura en matemáticas, pero con poco experiencia en geometría y en el trabajo por Internet. Para ello, el escenario virtual geométrico fue estructurado en 6 ejes hipertextuales: (a) actividad que obliga a revisar sus propios conocimientos geométricos y acción profesional, (b) observación del papel que juega lo cotidiano en las distintas actividades geométricas, (c) reconstrucción de procesos cognitivos de alumnos en clase, (d) reconocimiento de materiales para cada tema, (e) síntesis organizada del contenido y (f) evaluación continuada.

El contenido profesional fue desarrollado en ocho unidades (áreas y formas planas, relaciones en el espacio, construcciones geométricas, ángulos, simetría, semejanzas y razonamientos). Todas las unidades fueron organizadas y estructuradas considerando los 6 ejes hipertextuales en los que se integró los tres aspectos (geométrico, estratégico-interpretativo, afectivo-actudinal), como se puede ver a continuación en la pantalla de apertura de la primera unidad del curso.



Ejemplo de la pantalla de apertura de la Unidad 1 *"Saia de sua Área"*

Recogida y análisis de datos

La información para nuestra investigación fue obtenida a partir de las diferentes intervenciones de los docentes -en tiempo real o diferido- en los distintos espacios comunicativos del entorno (correos, foro de discusión, entrevista, tareas, auto-evaluación, cuestionarios, chats, mensajes ICQ) que juntamente con el diario del investigador nos permitió desarrollar la triangulación de toda la información intercambiada pelos teleinteractuantes.

Con vistas a alcanzar nuestros objetivos, el análisis semántico (van Dijk, 1985) estuvo basado en lo que *"pensó, dijo e escribió"* continuamente el profesor en diferentes intervenciones y momentos en el desarrollo del curso. Para ello, tomamos y codificamos distintas intervenciones de los docentes buscando en las mismas:

(1) identificar objetivos de formación implícitos en las intervenciones.

(2) asociar los objetivos identificados a los aspectos (geométrico, estratégico-interpretativo y afectivo-actitudinal) del contenido profesional por nosotros considerados.

(3) percibir lo que demuestra conocer cada profesor y los significados construidos para *Medida* (como Medida y números asociados a formas) a partir de las distintas interacciones en un proceso de investigación en el aula.

A continuación presentamos rasgos del desarrollo del contenido profesional de un de los profesores (Antonio[2]) que acudieron al curso.

La noción de medida: el caso del profesor Antonio

Vamos a comentar el caso de Antonio, con 9 años de experiencia impartiendo clases de matemáticas a alumnos de 11-14 años en escuelas publicas de Rio de Janeiro (Brasil). Pese tener formación superior en matemáticas y postgrado en educación, Antonio reconoció deficiencias en su formación inicial, porque no tuvo ninguna oportunidad de estudiar y reflexionar sobre el papel de la geometría en el currículo escolar. Ya en

2 Nombre ficticio.

los primeros días nos confesaba que: había tenido pocas oportunidades para hablar de sus clases con los colegas; fue la primera vez que participaba de un curso a distancia y a través de Internet. A pesar de poseer conocimientos de Internet, Antonio no sabia de la existencia de los recursos disponibles en la red y, tampoco, del valor educativo de los mismos. No conocía ni tan sólo la existencia del Cabri Geometrie, por ejemplo. Antonio se había inscrito en el curso para *conocer nuevas metodologías para la enseñanza con vistas a minimizar deficiencias en su formación inicial.* Veamos algunos detalles de nuestro análisis[3] sobre los aspectos del contenido profesional en donde Antonio ha cambiado algo de sus concepciones sobre la medida.

Sobre el contenido geométrico movilizado por Antonio

A partir de las respuestas del docente a las tareas de la primera unidad en los distintos espacios comunicativos del entorno, el profesor le hace explicitar en una entrevista semi-estructurada (E28) lo que conoció de nuevo en la tarea y lo que nunca había pensado. Así, Antonio dice percibir ahora que el trabajo con área y perímetro, además de la utilización de figuras, también puede estar articulado a otros contenidos curriculares y que los alumnos suelen conocer, como los múltiplos y submúltiplos, las fracciones y la proporcionalidad.

> *Docente-investigador: ¨¿Qué quiso decir en esta respuesta?* [el investigador muestra la página impresa con la respuesta del docente]
> Antonio (E28): [silencio, mirando en el material] ¨Porque **antes, cuando yo trabajaba** con geometría, ... , yo raramente usaba. Esos conceptos **los alumnos conocen**, lo que son **múltiplos**, lo que son **fracciones**, pero yo nunca había trabajado estos conceptos **utilizando figuras**. Entonces, yo pedía: haz un cuadrado, ¡de acuerdo! Ahora, haz un cuadrado con **doble** medida [de los lados]. ¿Lo que pasó con el perímetro? ¿Aumentó? ¿Duplicó? ... Así, yo **empecé a utilizar esos conceptos con ellos**¨.

3 Los negritos son ejemplos (marcadores) del discurso que son asociados a los aspectos (categorías a priori) del contenido del conocimiento profesional.

Al analizar los textos de Antonio, observamos que – en cuanto al contenido geométrico – el curso contribuyó para que Antonio reflexionase críticamente sobre distintos objetivos y planteamientos geométricos, estableciendo relaciones y diferencias entre los conceptos de área, perímetro, múltiplos, submúltiplos, fracciones y proporcionalidad, por ejemplo. Además, en diversos momentos (E19-20, E40), Antonio también mostró percibir que la esencialidad para el trabajo con Medida es la importancia de la unidad de medida y que el trabajo conjunto entre áreas, perímetros y volúmenes no es tan necesario (Olmo et al., 1993), hecho que no quedaba claro en sus intervenciones anteriores, por ejemplo en el correo n°1.

Conocimiento estratégico-interpretativo de Antonio

A continuación, mostramos (entrevista 41) un ejemplo de cómo interpretamos que el docente reflexiona y habla sobre su práctica, y como desarrolla con sus alumnos una actividad semejante a las sugeridas en la unidad, pero no demuestra profundizar análisis sobre lo que ocurrió y, tampoco, de los procesos cognitivos de los alumnos (E.2).

> *I: ¿Qué otro concepto relacionado con ... ha trabajado? ¿En qué año?*
> ***Ant E41:*** Hay cuestiones que yo lo hice con el 7° grado y otras que hice con el 5° grado. Área y volumen yo desarrollé con los alumnos de 7° porque ellos son mayores [edad]. En cambio, el área de figuras planas con papel cuadriculado, yo lo hice más con el 5° grado, porque ellos [los alumnos] piensan que se trata de una distracción, en la que pintan para ver como queda¨

Así como decimos que es difícil conseguir cambios importantes, constatamos que las interacciones con el entorno han provocado movilizaciones en los aspectos del contenido profesional estratégico-interpretativo del docente. En el cuadro siguiente los ejemplificamos en relación con los distintos espacios comunicativos.

Tabla 1 – Elementos estratégicos movilizados por Antonio en la experiencia realizada

Aspectos del contenido profesional estratégico movilizados	Espacio Comunicativo
E.1 Propone, ejemplifica y reflexiona sobre actividades	Entrevista 28-29, 35-36, 41
E.2 Habla de la práctica sin profundizar análisis en aspectos cognitivos de lo hacen los alumnos	Auto-evaluación (1c) + Entrevista 41
E.3 Reconoce valor de la actividad	Correo + Entrevista 42 Auto-evaluación (1 a-c)
E.4 Reconoce valor de la visualización	Entrevista 16
E.5 Atención y reflexión sobre materiales	Entrevista 11 + Correo (unidad 4 tarea nº 6)
E.6 Realiza proyectos sin profundizar aspectos relevantes	Correo (unidad 1 tareas 9-10 + Entrevista 35-36, 41
E.7 Reconoce influencia del libro didáctico	Entrevista 19-20
E.8 Reflexiona sobre la necesidad de cambios en su metodología	Auto-evaluación (1 a-c) + Entrevista 11, 42
E.9 Ejemplifica lo que piensa el alumno	Entrevista 16
E.10 Critica formación inicial del profesorado	Entrevista 19-20

Las interacciones han provocado la aparición de un gran numero de aspecto de este contenido profesional. Así, se ha detectado que Antonio da valor a la actividad geométrica (E.1, E.3), de la visualización (E.4) y la importancia de los materiales, además de una reflexión poco profundizada (E.2) sobre los procesos cognitivos de los alumnos. Igualmente, el profesor intentó realizar proyectos como una estrategia geométrica innovadora (E.6) y buscó ejemplificar lo que piensan sus alumnos (E.9); percibió la influencia de la formación inicial (E.10) y del libro didáctico (E.7) principalmente en prácticas docentes tradicionales, incluso en la suya, y reconoció que deberá cambiarla (E.8).

Antonio y su componente afectivo-actitudinal

Al preguntarle sobre los objetivos iniciales para participar del curso, hemos podido identificar una actitud abierta a la novedad. Hacia mitad del curso, nos dice que nuestro entorno formativo también ha contribuido para el acceso a informaciones con vistas a *desmitificar la enseñanza de la geometría* como algo difícil o reducible a nomenclatura. Más adelante él mismo indica que el curso le provocó desequilibrios cognitivos significativos.

> *Ant (entrevista 1)* ¨... cuando surgió este curso, yo hablé, bueno, es una cosa que el profesor va acceder, hay cosas nuevas para poder utilizar con los alumnos, para desmitificar eso [enseñanza de la geometría]

La flexibilidad y reflexión metacognitiva consideramos que promueve la constante negociación de significados y esas declaraciones son ejemplos del desarrollo de la componente afectivo-actitudinal del conocimiento profesional de Antonio. Otros ejemplos son los textos auto-evaluativos en los que Antonio describe su toma de conciencia sobre sus deficiencias de contenido y la auto-conciencia de sus cambios profesionales, (E45 y E83). En ellos el docente usa la metáfora temporal (ahora, antes) en su ¨posicionamiento¨.

> Ant (entrevista 45) ¨... ¡ahora es que estoy percibiendo un poco de mis cambios!, ¿de acuerdo?
> Antes yo no tenía esa idea, de como trabajar. Yo no sabía, ¡esa es la verdad! Yo nunca he visto ...¨

> Ant (entrevista 83) ¨... porque yo tuve esa deficiencia en mi formación. Para decirlo que nunca he aprendido, lo que hice era: pegar una línea y, haz un círculo; recta, con escuadro. Solamente¨.

Concluyendo esta observación referente al aspecto afectivo-actitudinal, en la tabla siguiente resumimos y presentamos los cuatro aspectos observados de esta componente en los dos docentes a partir de interacciones que hemos ejemplificado aquí en el contenido medida. Observamos que el trabajo contribuyó para la *concientización sobre la realidad* (A.2, A.3, A.4), desarrollando en los docentes atención para el proceso de construcción del conocimiento, suyo y de sus alumnos (A.1).

Tabla 2 – Elementos afectivo-actitudinales movilizados por Antonio en la experiencia realizada

Aspectos del contenido profesional afectivo movilizados	Espacio Comunicativo
A.1 Reflexiona sobre el proceso de construcción de conocimiento	Correo n° 7 + Auto-evaluación (1 a-c) + Entrevista 16, 19-20
A.2 Acepta sugerencias y reconoce cambios práctico-profesionales	Entrevista 11, 45, 83 + Correo (unidad 4 tarea n° 6)
A.3 Reconoce dificultad en llevar a cabo cambios e determinados planteamientos	Correo n° 1 + Entrevista 42
A.4 Apertura y negociación de significados	Entrevista 1, 35-36, 45, 83

Como hemos presentado Antonio explicitó distintos componentes del contenido profesional y demostró incorporar críticamente dichos aspectos en sus reflexiones profesionales, cuyos resultados son resumidos a continuación.

Resultados

Sobre los aspectos y significados situados construidos en la colectividad virtual

A continuación presentamos una secuencia interactiva de Antonio en el desarrollo del curso en la temática *Medida*. Cada aspecto del contenido profesional fue ejemplificado con un tipo de letra. La ejemplificación de estos fragmentos del discurso del profesor no son rasgos específicos de un aspecto del contenido, sino una señal de lo que consideramos al analizar la intervención como un todo y con su coherencia global y contextualizada (van Dijk, 1985). Para ello, cada aspecto fue caracterizado con un mismo tipo de letra, es decir, geométrico (*Bookman Old Style*), estratégico-interpretativo (*Tahoma*) y afectivo-actitudinal (*Arial Narrow*). Los íconos sirven para ilustrar las distintas influencias del material del curso (*lámpara*), del formador y/o de un colega; expresión de duda (*?*) por parte del formador sobre algo que no queda claro sobre lo que piensa el profesor en la intervención, y dificultad (*llaves*) mostrada por el profesor para hacer cambios en su práctica.

Geométrico | Estratégico-Interpretativo | Afectivo-actitudinal

Correo U1

Área y perímetro relacionados con múltiplos, submúltiplos y fracciones

"... El concepto de volumen también puede ser trabajado conjuntamente con perímetro y áreas, pues se trata de un concepto que abarca conocimiento sobre esos dos contenidos. Pediría a los alumnos para marcar cuadrados en un cartón, previamente cuadriculado con espacios de 1 cm, ... haríamos un montaje utilizando seis cuadrados con la misma área y construiríamos un cubo, después construiríamos varios cubos con volumen de 1 centímetro cúbico. Pediría a los alumnos para echar goma y que pusiesen los cubos pequeños dentro de los mayores de forma arrumada, así mandaría verificar cuantos cubos pequeños cupieron en el grande, introduciendo en esta hora la idea de volumen. Conduciría esta idea para los líquidos, como una garrafa de un litro, una caja de agua, etc."

Evalúe U1

"Romper con el ritmo de aprendizaje a través de fórmulas y repetición con el cual están acostumbrados los alumnos e introducir el contenido a través de estudios donde ellos tendrían que construir su propio conocimiento, aunque orientado".

Entrevista 11

"Una cosa que me está haciendo cambiar el pensamiento, sobre el trabajo con la geometría, es justo eso. Es el trabajar los materiales, buscar estos recursos. Pues, es lo que yo havia dicho [antes] yo no tenía esa idea. La idea que tengo de geometria es papel mismo, ¿entendió?, una cosa planificada, en lo papel y no sale de allí. Es decir, entonces el curso está me haciendo ver la geometría de otra manera, al procurar hacer una demostración y al mismo tiempo mostrar al alumno, como es y de donde vino aquello allí [el proceso], como el alumno puede visualizar ..."

Entrevista 19-20

"E19: No, independen. Usted puede trabajar un u otro, separadamente. Después, usted puede acabar relacionando los dos. E20: "... no ha necesidad de se trabajar conjuntamente, lado a lado, pero como todo libro didáctico, la mayoría hace eso y como la mayoria de los profesores también fueron masacrados en la época, de trabajar siempre de esta manera, el propio alumno acaba pensando que uno concepto depende del otro, se confunde".

Entrevista 28-29

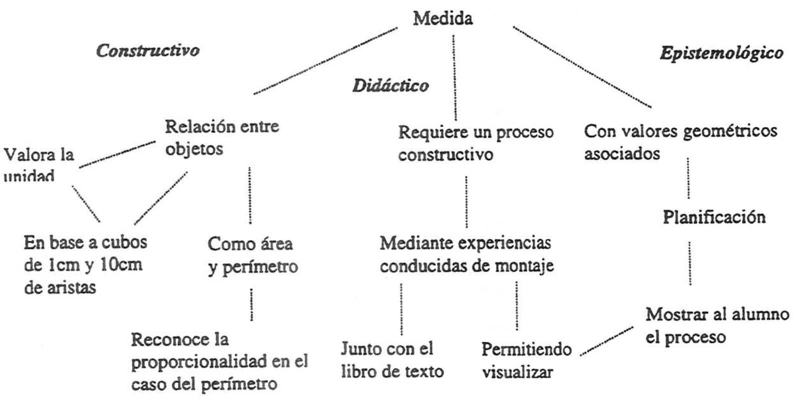
"Esos conceptos los alumnos conocen, lo que son múltiplos, lo que son fracciones, pero yo nunca había trabajado estos conceptos utilizando figuras. Entonces, lo que hice. Pedía, haz un cuadrado, ya. Ahora haz un cuadrado con el doble. ¿Qué pasó con el perimetro? ¿Aumentó, duplicó, triplicó, cuadriplicó, ...? Ya, entonces yo empecé a utilizar esos conceptos con ellos ... porque antiguamente, ¿lo que la gente hacia con proporción? Regla de tres y se acabó. Allí no, vamos a trabajar un poco de ..."

Entrevista 40

"Si, yo he trabajado con la unidad"

Antonio: Ejemplo de una secuencia de intervenciones compartidas sobre Medida

Los docentes que participaron en nuestra investigación ante todo han demostrado mejoría en tres tipos de habilidades: *(1)* percibir y determinar qué principios de medida pueden estar involucrados en una tarea, *(2)* ver a los alumnos trabajando en tiempo real y percibir cómo aprenden y lo que necesitan, e *(3)* identificar y analizar los artefactos en el trabajo de los estudiantes en clase y determinar lo que ellos piensan (Horvath y Lehrer 2000). Igualmente, en nuestro estudio, los significados explicitados y construidos (Koehler, 1998) por los docentes sobre la noción de *Medida,* en sus distintas interacciones profesor-tareas-formador-colega, han sido singulares. Considerando la *Medida* en el ámbito constructivo-geométrico, en el didáctico y en lo epistemológico, a continuación presentamos la red de significados de Antonio.



Red de interpretación del discurso profesional de Antonio sobre la noción de Medida

Como se observa en la red cognitiva de Antonio, verificamos que en el *ámbito constructivo* el profesor percibió la importancia de la unidad en este tipo de planteamiento y amplió sus relaciones al trabajo con los cubos de volumen $1cm^3$ y $1000cm^3$, e identificó la proporcionalidad que se puede establecer en el caso del perímetro en relación al lado en el caso de un polígono regular. En los *ámbitos didáctico y epistemológico*, Antonio explicita atención hacia un proceso de aprendizaje constructivo mediante experiencias didácticas distintas, de manera que el alumno pueda visualizar y percibir constructivamente todo el procedimiento.

Sobre las tareas y los recursos como elementos formativos potencializadores

Hemos podido identificar la influencia explícita del material del curso en diferentes intervenciones del docente (correo U1, entrevista 11, entrevista 19-20, entrevista 28-29), ya sea como un relato de sus dificultades (evalúe U1) al intentar implementar tareas diferentes de las que conocía. Antonio matizó y puso relieve en componentes de su contenido profesional que constituyeron importantes rasgos en su desarrollo profesional: (1) reflexión sobre sus experiencias anteriores en geometría (entrevista 28-29), (2) reflexión sobre la influencia de la concepción que construyó sobre la geometría en su práctica (entrevista 11), (3) sobre el valor atribuidos por los docentes a los libros didácticos (entrevista 19-20), (4) cuestionamiento sobre las prácticas arcaicas de enseñanza-aprendizaje en geometría (evalúe U1) , (5) propuesta de actividades (correo S1, entrevista 28-29) que hizo por influencia del curso y otras dinámicas (evalúe U1) alternativas para un aprendizaje constructivo, etc. Veamos algunas de sus afirmaciones:

> ¨Yo no conocía estos materiales. Ahora es que estoy percibiendo un poco de mis cambios ... Antes yo no tenia esa idea, de como trabajar. Yo no sabia, ¡esa es la verdad!. Yo nunca he visto. Yo siempre he visto geometría como ¨saliva y tiza¨. Desde la primaria hasta la enseñanza superior¨ (entrevista, 45)

En el fragmento (E28) de la entrevista Antonio explicita lo que conoció de nuevo en la secuencia de tareas y lo que no había pensado. Es decir, Antonio percibió que el trabajo con área y perímetro, además de la utilización de figuras, también puede estar articulado a otros contenidos curriculares y que los alumnos suelen conocer, como los múltiplos y submúltiplos, las fracciones y la proporcionalidad.

> *Investigador: ¨¿Qué quiso decir en esta respuesta?* [el investigador muestra la página impresa con la respuesta del docente]
> **Antonio (E28):** [silencio, mirando en el material] ¨Porque antes, cuando yo trabajaba con geometría, ... , yo raramente usaba. Esos conceptos los alumnos conocen, lo que son múltiplos, lo que son fracciones, pero yo nunca había trabajado

> estos conceptos utilizando figuras. Entonces, yo pedía: haz un cuadrado, ide acuerdo! Ahora, haz un cuadrado con doble medida [de los lados]. ¿Lo que pasó con el perímetro? ¿Aumentó? ¿Duplicó? ... Así, yo empecé a utilizar esos conceptos con ellos¨.

Concluyendo este apartado, como ejemplos de reflexiones críticas (Mewborn, 1999) presentes en las intervenciones de Antonio al reflexionar sobre los recursos y materiales disponibles en el entorno del curso podemos citar: descubrimiento de hechos novedosos, variedad y posibilidades distintas de ejemplos, ganas en impartir clases de matemáticas diferentes, sensibilidad hacia el nuevo, análisis y articulación conceptual crítica.

Conclusiones

Como hemos dicho, tomando como referencia para un contexto formativo grupo específico (profesores de matemáticas) y un curso de formación continuada por Internet, en un contenido curricular (la Medida), en este estudio estuvimos interesados en identificar aspectos del conocimiento profesional movilizados y explicitar elementos del curso contexto (tareas y recursos) que influenciaron en el desarrollo del proceso teleinteractivo.

La integración de los tres aspectos (geométrico, estratégico-interpretativo, afectivo-actitudinal) del contenido del conocimiento del docente en el proceso de negociación profesional, mostró que es posible desarrollar teleinteracciones distintas y que es posible identificar mejoras en el conocimiento del profesorado. Además, el análisis semántico (ampliamente detallado en Bairral, 2002) nos ha permitido identificar y ejemplificar dichos aspectos en el trabajo a distancia, mostrar la importancia de considerar aspectos afectivos y resaltar que especificidades del conocimiento geométrico también han de ser consideradas. Como aspecto del *contenido del conocimiento profesional geométrico* de los docentes, subrayamos una mayor conciencia y valor sobre su trabajo geométrico en clase, por ejemplo cuando docente pasan a identificar procesos cognitivos esenciales y no esenciales, y a cuestionar sobre las tareas geométricas. Como un rasgo importante del *contenido profesional estratégico-interpretativo* verificamos una implicación y discusión de los profesores en planteamientos propios y contribución en el planteamiento de los compañeros; y en el ámbito de la componente del *contenido afectivo-actitudinal*, destacamos: actitudes favorables frente al proceso enseñanza-aprendizaje propio y de sus alumnos; y recuerdos y reflexión sobre episodios de su historia personal-profesional, la importancia y influencia de eso en la práctica profesional del profesor.

Apesar de identificar indicios de mejora en el contenido del conocimiento profesional de cada docente lo largo del proceso, estos no son inmediatos. Se no dispusiéramos de una gama de informaciones sobre lo que han (re)construido los docentes al desarrollar la tarea propuesta y con el colectivo profesional, tornase más difícil para identificar transformaciones en su conocimiento inicial. A partir de la variedad de textos producidos y compartidos por los docentes también identificamos, confirmamos y analizamos la presencia de los distintos aspectos del contenido del conocimiento profesional del profesor y verificamos que estos pueden ser identificados en distintos momentos del proceso formativo, en las diferentes intervenciones docentes y se complementan continuamente.

El conocimiento profesional distribuido se desarrolló en momentos distintos del proceso formativo y considerando especificidades discursivas de cada espacio comunicativo del entorno virtual (Bairral, 2002). La dinámica de trabajo a distancia ofrece al profesor oportunidades equitativas de invertir en su formación intercambiando y conociendo experiencias profesionales diversas, hecho que contribuye al trabajo docente colaborativo comprometido con cambios significativos en la enseñanza de matemáticas. De esta manera, los profesores también pueden elaborar diferentes significados sobre situaciones de su práctica dependiendo de las circunstancias y de su experiencia previa, cuya inserción en una misma comunidad de aprendizaje o similar se hace imprescindible (Lemke, 1997).

Además de la reorganización del pensamiento (Gracias, 2003), del desarrollo de la autonomía e identidad docente (Ponte, 2003), el trabajo a distancia mediado por las TICs favorece que el tiempo personal para reflexión sea considerado como un marco importante del desarrollo profesional. Igualmente, los profesionales pueden, a lo largo de su proceso de crecimiento personal-profesional, acceder a una variedad de informaciones disponibles, construir sus propios significados (Koehler, 1998) para el contenido enfocado y de esta manera, resignificar colaborativa (Benson y Bruce, 2001) y situadamente (Llinares, 2002) su conocimiento profesional.

Referencias

ALMOULOUD, S. y GERVAZONI, E. (2000). Iniciação à demonstração apreendendo conceitos geométricos. 23ª REUNIÃO AUNAL DA ANPED. *Anais*. Caxambu-MG (CD-ROM).

ARCAVI, A. y HADAS, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* n. 5, pp. 25-45.

BAIRRAL, M. A. (2002). *Desarrollo Profesional Docente en Geometría: Análisis de un Processo de Formación a Distancia*. Universitat de Barcelona. Tesis de Doctorado publicada electrónicamente 8/10/2002 en: http://www.tdcat.cesca.es/TDCat-1008102-120710/

_______ (2003). Aprender a Aprender Matemática no CiberEspaço-Formação. *Pátio Revista Pedagógica*. Porto Alegre, n. 26, ano VII, mai./jul., pp. 32-35.

BENSON, A. y BRUCE, B. (2001). Using the Web to Promote Inquiry and Collaboration: a snapshot of the inquiry page's development. *Teaching Education*, v. 12, n. 2, pp. 153-163.

BORBA, M. (1999). "Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento". In: BICUDO, M. A. V. *Pesquisa em Educaçao Matemática: Concepções e Perspectivas*. Rio Claro, Unesp.

BRNA, P. (1998). Modelos de Colaboração. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, n. 3, pp. 9-15.

CLUNIE, G.; CAMPOS, G. H. B. y ROCHA, A. R. (1996). *Ambientes de aprendizagem e hipertecnologias: uma relação promissora*. Rio de Janeiro, UFRJ/COPPE-Sistemas.

FORTUNY, J. M. y GIMENEZ, J. (2002). *Interm@tes*. Barcelona, Generalitat de Catalunyia.

GARCÍA, M. y SANCHEZ, V. (2002). "Una propuesta de Formación de Maestros desde la Educación Matemática: Adoptando una Perspectiva Situada". In: CONTRERAS, L. y BLANCO, L. *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el Área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Cáceres, Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones.

GÓMEZ-CHACÓN, I. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, n. 43, pp. 149-168.

GRACIAS, T. (2003). *A natureza da reorganização do pensamento em um curso a distância sobre "Tendências em Educação Matemática"*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Unesp, Rio Claro-SP.

GIMÉNEZ, J. (1997). Por qué actitudes? *Uno*, n. 13, pp. 5-6.

GUADAMUZ, L. (1997). Tecnologias Interativas no ensino à distância. *Tecnologia Educacional*, n. 25, pp. 27-31.

HEALY, L. (2000). Blurring distinctions between the empirical and the theoretical? The roles of examples in the proving process. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 2, n. 2, pp. 51-63.

HORVATH, J. y LEHRER, R. (2000). The design of a case-based hypermedia teaching tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, n. 5, pp. 115-141.

JONASSEN, D. y RAHRER-MURPHY, L. (1999). Activity Theory as a Fromework for Designing Constructivist Learning Environments. *ETRyD*, n. 1, v. 47, pp. 61-79.

KOEHLER, M. J. y LEHRER, R. (1998). Designing a hypermedia tool for learning about children's mathematical cognition. *Journal of Educational Computing Research*, v. 18, n. 2, pp. 123-145.

LEMKE, J. L. (1997). *Aprender a hablar ciencia: lenguaje, aprendizaje y valores*. Buenos Aires, Paidós.

LLINARES, S. (1996). "Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función". In: PONTE, J. P. et alii (org.). *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática que formaçao?* Lisboa.

______ (2002). Arrivare ad essere insegnante di matematica: "casi" e "dibattiti elettronici". *La matematica e la sua Didattica*, n. 3, pp. 258-277.

MAGINA, S. (1998). O computador e o ensino da Matemática. *Tecnologia Educacional*. Rio de Janeiro, n. 140, v. 26, pp. 41-45.

MEWBORN, D. (1999). Reflective Thinking Among Preservice Elementary Mathematics Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* n. 3, v. 30, pp. 316-341.

MURILLO, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E. S. O.* Tesis Doctoral Inédita. Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona.

OLIVEIRA, H.; SEGURADO, M. I. y PONTE, J. P. (1998). *Desenvolvimento Curricular em Matemática*. Portalegre, SPCE.

OLMO, M. A. del; MORENO, M.F. y GIL, F. (1993). *Superficie y Volumen. ¿algo mas que el trabajo con formulas*. Madrid, Síntesis.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. y VARANDAS, J. M. (2002). Development of pre-service mathematics teachers' professional knowledge and identity in working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 5, n. 2, pp. 93-115.

PONTE, J. P. (1995). "Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva". In: BLANCO NIETO, L. y MELLADO, V. (coords.). *LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE CIENCIAS Y MATEMÁTICAS EN ESPAÑA Y PORTUGAL. Anais*, pp. 187-201.

PUTNAM, R. y BORKO, H. (2000). What Do New Views of Knowledge and Thinking Have to Say About Research on Teaching Learning. *Educational Researcher*, v. 29, n. 1, pp. 4-15.

SAKSHAUG, L. (2000). Research on Distance Education: Implications for Learning Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, n. 3-4, v. 22, pp. 111-124.

SUTHERLAND, R. y BALACHEFF, N. (1999). Didactical complexity of computacional environments for the learning of mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, n. 4, pp. 1-26.

VAN DIJK, T. (ed.) (1985). Semantic discourse analysis. *Handbook of discourse analysis*. New York, NY, Academic Press, v. 2, pp. 103-136.

Recebido em abr./2002; aprovado em maio/2002

Dissertações defendidas no segundo semestre de 2003*

BRAGA, C. *O processo inicial de disciplinarização de função na Matemática do ensino secundário brasileiro*
(The initial process of disciplinarization of function in the Mathematics of Brazilian Secondary Schools)
Palavras-chave: função; cálculo infinitesimal; Felix Klein; Euclides Roxo e Ernst Breslich.
Key-words: function; infinitesimal calculation; Felix Klein; Euclides Roxo and Ernst Breslich.

CERQUEIRA, D. S. *Implementação de inovações curriculares no Ensino Médio e formação continuada de professores: as lições de uma experiência*
(Implementation of curricular innovations in Average Ensino and continued formation of professors: the lessons of an experience)
Palavras-chave: educação matemática; inovações curriculares; implementação curricular; formação de professores; problematização; conexões interdisciplinares; contextualização.
Key-words: mathematics education; curriculum innovation; curriculum implementation; teacher undergraduation; problematization; interdisciplinary connection; contextualization.

CHRISTINO, E.S.C. *O Exame Nacional de cursos de Matemática: polêmicas e indagações*
(The National Examination of courses of Mathematics: controversies and investigations)

* As dissertações completas estão divulgadas no site: www.pucsp.br/pos/edmat

Palavras-chave: exame nacional de cursos; conhecimento matemático; avaliação; habilidades; formação de professores; curso de licenciatura de matemática.
Key-words: national courses examination; mathematic knowledge; evaluation; skillfulness; formation of teachers; licentiate course on mathematics.

COSTA, C. A. *As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental*
(The conceptions of the professors of Mathematics on the use of the modeling in the development of the combinatório reasoning in Basic Ensino)
Palavras-chave: raciocínio combinatório; modelagem; princípio multiplicativo; formação de professores; escolhas didáticas.
Key-words: combinatory reasoning; modelling; multiplicative principle; formation of teachers; didactic choices.

JUNHO, B. A. P. *Panorama das dissertações de Educação Matemática sobre o Ensino Superior da PUC-SP de 1994 a 2000*
(Panorama of the dissertações of Mathematical Education on Superior Ensino of the PUC-SP of 1994 the 2000)
Palavras-chave: estado da arte; dissertações; educação matemática; ensino superior; ensino e aprendizagem de matemática.
Key-words: state of the art; dissertations; mathematics education; higher education; teaching and learning mathematics.

LOPES, W. S. *A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino*
(The importance of the use of multiple representations in the development of the function concept: an education proposal)
Palavras-chave: registros de representação; conversão de registros; função afim; registro gráfico; registro o algébrico.
Key-words: representation registers; registers conversion; linear functions; graphic register; algebraic register interdisciplinarity; contextualisation.

MIRANDA, M. M. *A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela Educação Matemática brasileira*

(The North American experience of fusing of the Arithmetic, Algebra and Geometry and its appropriation for the Brazilian Mathematical Education)

Palavras-chave: educação matemática; história da matemática; movimento de Chicago e Breslich; Reforma Francisco Campos e Euclides Roxo.

Key-words: mathematic education; history of mathematics; Chicago and Breslich Movements; Francisco Campos and Euclides Roxo Reformation.

MODANEZ, L. *Das seqüências de padrões Geométricos à introdução ao pensamento Algébrico*

(Of the sequences of Geometric standards to the introduction to the Algebraic thought)

Palavras-chave: ensino-aprendizagem; pensamento algébrico; seqüências; padrões geométricos.

Key-words: teaching-learning; algebraic thought; sequences; geometrical patterns.

OLIVEIRA, E. A. *A Educação Matemática & Ensino Médio: um panorama das pesquisas produzidas na PUC-SP*

(The Mathematical Education & Average Education: a panorama of the research produced in the PUC-SP)

Palavras-chave: estado da arte; ensino médio; educação matemática.

Key-words: state of art; secondary school; mathematics education.

OLIVEIRA, L. M. X. *A Educação Matemática & Ensino Fundamental: um panorama das pesquisas produzidas na PUC-SP nos anos 1994 a 1997*

(The Mathematical Education & Elementary School: a panorama of the research produced in the PUC-SP – 1994 – 1997)

Palavras-chave: estado da arte; dissertações; ensino fundamental; objetivo de pesquisa; década de 90.

Key-words: state of the art; dissertations; elementary school; objective of research; decade of 90.

PADREDI, Z. L. N. *As "Alavancas Meta" no discurso do professor de Álgebra Linear*
(The "Handspikes Goal" in the speech of the professor of Linear Algebra)
Palavras-chave: álgebra linear; base; metaconhecimento matemático; alavanca meta; entrevista.
Key-words: linear algebra; basis; metacognition; meta lever; interview.

PAIVA, M. R. *A Matemática Escolar e o Enem (1998-2002): o aparecimento de uma nova vulgata?*
(The Pertaining to school Mathematics and the Enem (1998-2002): the appearance of a new vulgata?)
Palavras-chave: exame nacional do ensino médio (Enem); competências; habilidades; análise de livros didáticos; transformações no livro didático; transformações na disciplina matemática.
Key-words: high school national exam (Enem); competence; skills; analysis of didactic books; changes in didactic book; changes in the mathematic discipline.

PATAKI, I. *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*
(Spherical geometry for the formation of professors: a proposal to interdisciplinar)
Palavras-chave: geometria esférica; formação de professores; situações didáticas; situação-problema; interdisciplinaridade; contextualização.
Key-words: spherical geometry; teacher education; didactic situations; problem-situations.

PEREIRA, L. M. X. O. *A Educação Matemática & Ensino Fundamental: um panorama das pesquisas produzidas na PUC-SP nos anos 1994 a 1997*
(The Mathematical Education & Basic Education: a panorama of the research produced in the PUC-SP in years 1994 the 1997)
Palavras-chave: estado da arte; dissertações; ensino fundamental; objetivo de pesquisa; década de 90.
Key-words: state of the art; dissertations; elementary school; objective of research; decade of 90.

PRADO, R. C. *Do engenheiro ao licenciado: os concursos à cátedra do Colégio Pedro II e as modificações do saber do professor de Matemática do ensino secundário*

(Of the Engineer to the Permitted one: the competitions to the chair of the College Peter II and the modifications of knowing of the Professor of Mathematics of Secondary Ensino)

Palavras-chave: Colégio Pedro II; cátedra; Faculdade de Filosofia; educação matemática; formação de professor.

Key-words: Pedro II School; cathedra; Philosophy University; mathematic education; formation of teachers.

STELLA, C. A. *Um estudo sobre o conceito de média com alunos do Ensino Médio*

(A study on the concept of average with pupils of Average Ensino)

Palavras-chave: estatística; média; concepções de alunos; documentos oficiais; elementos do conceito.

Key-words: statistics; mean; students' conceptions; official documents; elements of concepts.

VEIGA, M. S. *Interpretações de estudantes sobre comprimentos de segmentos*

(Students' interpretations about the length of segments)

Palavras-chave: conservação de comprimento; teorema de Thales; divisão de segmentos.

Key-words: length conservation; Thales' theorem; division of segments.

Normas para publicação

Pesquisadores interessados em contribuir com publicação nesta revista deverão preparar o texto e enviá-lo segundo as regras que se seguem.

Preparação para envio – uma cópia do texto **em disquete(s)** com os nomes dos autores e sem numeração de página. Outras quatro (4) cópias **impressas**, sendo que uma deve ser idêntica à(s) do(s) disquete(s) e as outras três (3) devem ter numeração de página e não trazer os nomes dos autores.

Versão – programa Word 6.0 for Windows, para ser lido em PC.

Formatação

Título – centralizado, em letras maiúsculas e em negrito.

Nomes dos autores – em uma só das vias impressas e no disquete, separar os nomes dos autores do título por um espaço simples entre linhas. Os dados de cada autor deverão ser colocados conforme exemplo, abaixo do título.

Ex.: Maria Dolores da Silva
Mestre em Educação Matemática – PUC-SP
Professora do Curso de Matemática – PUC-SP
e-mail: dolores@pucsp.br

Resumo – em português e inglês ou francês, com, no máximo, 10 linhas, espaço duplo, mesma fonte do texto, em itálico, acompanhado de três palavras-chave.

Corpo do texto – Papel tamanho A4
Margem superior e inferior com 2,5 cm
Margem direita e esquerda com 3,0 cm
Fonte Times New Roman
Tamanho da letra 12 pontos
Espaçamento entre linhas 1,5 linha
Alinhamento justificado

Referências bibliográficas – de acordo com as normas da ABNT em vigor.

Exemplos:

- Livro

  GOMES, L. G. F. (1998). *Novela e sociedade no Brasil.* Niterói, EdUFF (Coleção Antropologia e Ciência Política, 15).

- Tese

  BARCELOS, M. F. P. (1998). *Ensaio tecnológico, bioquímico e sensorial de soja e guandu enlatados no estádio verde e maturação de colheita.* Tese de doutorado em Nutrição. Campinas, Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas.

- Artigo de revista

  GURGEL, C. (1997). Reforma do Estado e segurança pública. *Política e Administração*, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, pp. 15-21, set.

Citações no texto – citações no texto devem vir acompanhadas de sobrenome(s) do(s) autor(es) entre parênteses, acrescido do ano de publicação e página.

Tabelas e gráficos – deverão ter como elementos: número, título, data de referência, fonte e nota.

Impressão – em jato de tinta ou em laser. Páginas impressas só numa face.

Os trabalhos devem ser enviados para:

Revista Educação Matemática Pesquisa
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Consolação - SP - CEP 01303-050
Fone: (11) 3124-7210
Fax: (11) 3159-0189
e-mail: pgedmat@exatas.pucsp.br

Impressão de miolo e acabamento:

Gráfica da PUC-SP
Rua Ministro Godói, 965 – Perdizes – SP
Tel.: 3670-8366

SUMÁRIO