

O conceito de derivada: uma análise através dos programas curriculares do século XX

Ana Paula Florêncio Aires

Resumo

Nesta comunicação pretendemos analisar, guiados pelo filão histórico e tendo como intervalo temporal o séc. XX, a importância e evolução do conceito de derivada, desde a sua introdução, em 1905, nos programas oficiais de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Liceal, atualmente designado de Ensino Secundário. Temos como cenário um período marcado por significativas mudanças de regime político, que tiveram repercussões muito efetivas no ensino em geral, e no ensino da matemática em particular. Este estudo permitiu-nos concluir que a evolução do conceito de derivada nos programas curriculares de Matemática não foi linear, antes pelo contrário, verificamos progressos e retrocessos, indecisões e dúvidas, muito fruto das várias reformas de ensino que ocorreram durante o séc. XX.

Palavras-chave: Derivada, Matemática, Ensino secundário, Programas curriculares.

Abstract

In this communication we intend to analyze, guided by the historical lode and having as time interval the 20 th century, the importance and evolution of the concept of derivative, since its introduction in 1905, in the official programs of Mathematics of high school, currently designated as secondary education. We have as scenario a period marked by significant changes of political regime, which had very effective repercussions in the teaching in general, and in the teaching of mathematics in particular.

This study allowed us to conclude that the evolution of the concept of derivative in the official Mathematics programs was not linear, but on the contrary, we verified progress and setbacks, indecisions and doubts, much fruit of the various educational reforms that occurred during the 20th century.

Keywords: Derivative, Mathematics, Secondary education, Curricular programs.

Introdução

Sucessivas mudanças de regime político, com consequências diretas na perspectiva que se tem da educação marcaram o século XX. Abriu-se o século com o regime monárquico que presidiria aos primeiros anos, passando pelo regime republicano, que vigorou de 1910 até 1926, período da vigência do Estado Novo e que duraria até à revolução dos cravos, Abril de 1974, pondo fim aos longos cinquenta anos de obscurantismo político, de ausência de liberdade, de fechamento internacional, de definhamento educacional. Com o 25 de Abril de 1974 entramos no que poderíamos designar de educação em liberdade e para a liberdade, inaugurando um novo ciclo político e ao mesmo tempo educativo. Com tão diferentes formas de organização política, verificaram-se mutações significativas na linha de orientação seguida em matéria educativa. O lugar concedido ao estudo da Matemática nos planos curriculares do ensino

secundário sofreu, conseqüentemente, alterações em função da maior ou menor importância concedida ao ensino em geral, e ao ensino da Matemática em particular.¹

Havendo um conjunto de orientações legais, emanadas do Ministério da Instrução Pública,² que regulamentavam os programas de ensino, neste estudo, considerou-se imperioso conceder um lugar fundamental à legislação portuguesa que norteou as questões educativas, e as várias reformas, do sistema e dos programas do ensino de Matemática que tiveram lugar ao longo do século XX.

Trata-se de uma investigação histórica que se serviu do método histórico pois descrevemos fenómenos ocorridos num passado mais distante ou num passado recente, tomando como fonte documental a legislação educativa e alguma bibliografia de referência da história da educação em Portugal.³

Para levar a cabo esta investigação sobre o conceito de derivada dividimos o século XX em quatro períodos marcantes para o ensino em geral e para o ensino da Matemática em particular: 1.º período: Introdução do conceito de derivada (1905-1963); 2.º período: Introdução das Matemáticas Modernas (1963-1974); 3.º período: Da Revolução de Abril à Lei de Bases do Sistema Educativo (1974-86); 4.º período: Da Lei de Bases do Sistema Educativo ao final do século XX.

1. Introdução do conceito de derivada (1905-1963)

Ao longo deste período a estrutura do ensino manteve-se mais ou menos estável. Relativamente ao Ensino Liceal este encontrava-se dividido em dois ciclos:

- O Curso Geral de cinco anos, subdividido em dois ciclos ou secções: o primeiro ciclo (ou secção inferior) constituído por três anos (ou classes) e o segundo (ou secção média) constituído por dois anos;
- O Curso Complementar (3.ª secção ou secção superior) com dois anos, bifurcado em Letras e Ciências.

Foram várias as reformas implementadas ao longo deste período:

- Reforma de Eduardo José Coelho (30-8-1905)
- Reforma de Alfredo de Magalhães (28-11-1918)
- Reforma de Joaquim José de Oliveira (26-9-1919)
- Reforma de Ginestal Machado (18-6-1921)

¹ Aires, Ana Paula. "O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX." (Tese de doutoramento, Universidade de Salamanca, 2006), 5.

² A 11 de Abril de 1936, é publicada a «Remodelação do Ministério da Instrução Pública», que passa então a designar-se por Ministério da Educação Nacional. Carvalho, Rómulo. História da Educação em Portugal. Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar. (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1985), 753.

³ Berrio, Julio. L. "El método histórico em la investigacion histórica de la educacion." Revista Española de la Pedagogia 134 (1976): 449.

- Reforma de Ricardo Jorge (2-10-1926)
- Reforma de Alfredo Magalhães (22-1-1927)
- Reforma de Cordeiro Ramos (26-8-1930)
- Reforma de Carneiro Pacheco (14-10-1936)
- Reforma de Pires de Lima (17-9-1947).

Aqui importa referir, ainda a respeito da estrutura do ensino, que com a Reforma do Ministro da Instrução Alfredo Magalhães os dois ciclos do Curso Geral dos liceus, que eram respetivamente de 3 e 2 anos passaram a ser, inversamente, de 2 e 3 anos. Nesta investigação iremos apenas debruçar-nos sobre as reformas que se constituíram como verdadeiros marcos e trouxeram algo de novo relativamente ao conceito em estudo. Neste contexto a primeira reforma do ensino liceal do século XX é publicada a 30 de agosto de 1905 pelo então Ministro e Secretário de Estado dos Negócios, Eduardo José Coelho. Os programas relativos a esta reforma foram publicados no D.G.⁴ n.º 250 de 4 de novembro de 1905. É exatamente com a reforma de Eduardo José Coelho que assistimos à introdução, pela primeira vez, da noção de derivada nos programas do ensino liceal. Esta aparece na VII classe (ou 7.º ano) do Curso Complementar de Ciências no capítulo destinado à Álgebra que contempla os seguintes conteúdos:

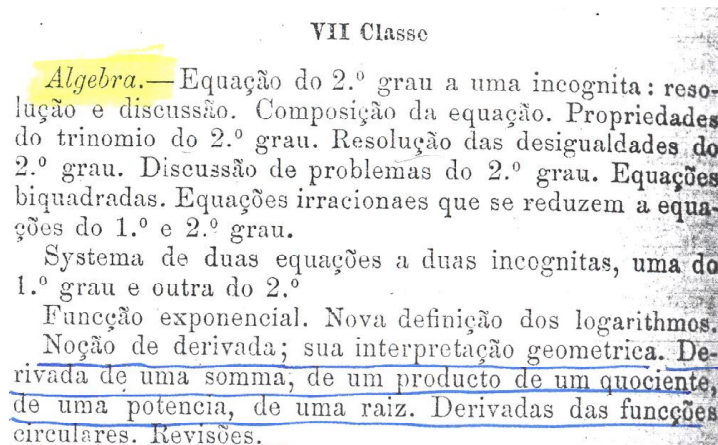


Figura 1: Capítulo de Álgebra do Programa de Matemática da VII classe

Pensamos que o conceito de derivada foi aqui introduzido de uma forma desgarrada, sem a preocupação de uma sequência lógica de temas nem a articulação com os outros conteúdos lecionados, sobretudo se tivermos em atenção que tópicos como a classificação de funções e a noção de continuidade são lecionadas no ano anterior, na VI classe, também no capítulo de Álgebra.

⁴ Utilizamos a sigla D.G. para designar o Diário do Governo, onde é publicada a legislação, citado abundantemente neste trabalho, já que constituiu a fonte preferencial para se estudar as reformas do sistema de ensino e os programas.

Ainda subjugados a um regime ditatorial presidido por Sidónio Pais, em 1918 Alfredo de Magalhães, responsável pela instrução, leva a cabo a segunda reforma do ensino liceal que se revelou como um marco incontornável para o nosso objeto de estudo. Os programas relativos a esta reforma foram aprovados a 27 de Novembro de 1918 (Decreto n.º 5:002 do D.G. n.º 257 de 28 de Novembro de 1918). Relativamente ao conceito de derivada, este era alvo de estudo agora na VI classe e num novo capítulo, até agora não existente, com a designação de “Elementos de Cálculo Infinitesimal”. Parece-nos que a justificação para a existência deste capítulo prende-se com o facto de aí ter também sido introduzida a noção de integral. Importa referir que é a primeira vez que aparece um capítulo com esta designação nos programas da disciplina de Matemática, facto tanto mais relevante quanto, na reforma anterior o conceito de derivada havia sido introduzido pela primeira vez no programa de Matemática do ensino liceal, mas num capítulo de Álgebra. Deste modo podemos afirmar que esta reforma se reveste de um carácter muito importante na medida em que, pela primeira vez, o Cálculo Infinitesimal ganha a autonomia, já anteriormente conquistada por outras áreas da Matemática como a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. Ainda de realçar outro aspeto é a introdução, neste capítulo, do conceito de limite a anteceder o estudo da noção de derivada, bem como a noção de integral, embora de uma forma simples, a finalizar o capítulo, que fica assim estruturado:

VI classe (Curso Complementar de Ciências)

Elementos de Cálculo Infinitesimal:

Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e cociente.

Derivada: importância desta noção. Derivada duma soma, dum produto, dum cociente, duma potência, duma raiz, duma função de função.

Noção de integral (basta mostrar a existência em casos particulares).

Aplicações.

O programa da VI classe termina com um capítulo reservado à Trigonometria Plana, aonde são também estudadas as derivadas das funções circulares.

Vinte e oito de Maio de 1926, constitui um marco fundamental para a compreensão da evolução da educação em Portugal, na medida em que assinala um golpe de estado que pôs fim à 1ª República. Fatigados da instabilidade permanente em que mergulhara o país nos sucessivos governos republicanos a população aceitou com agrado ou, pelo menos sem grande inquietação, o golpe militar. Mesmo destacadas figuras da intelectualidade portuguesa, reconhecidas pela defesa dos valores democráticos, como o pedagogo e filósofo António Sérgio, o pedagogo João de Deus, ou o matemático Bento de Jesus Caraça reconheciam a urgência e necessidade de pôr cobro à situação de crise e ingovernabilidade em

que mergulhara o país. No entanto, rapidamente perceberam o malogro sofrendo as perseguições movidas pela ditadura.⁵

Com a nomeação para o cargo de Ministro da Instrução Pública de Artur Ricardo Jorge este vai desencadear um conjunto de transformações importantes em relação à estrutura curricular e programas, ao promulgar o estatuto da instrução secundária (Decreto n.º 12: 425 do D.G. n.º 220 de 2 de Outubro de 1926). Os programas relativos a esta reforma foram publicados a 2 de Novembro de 1926 (Decreto n.º 12:594 do D.G. n.º 245). Relativamente ao conceito de derivada este passa, novamente, a fazer parte dum capítulo de Álgebra mas agora na IV classe, portanto ainda no curso dos liceus e para todos os alunos. O capítulo tem a seguinte estrutura:

IV classe (curso dos liceus)

a) Continuação do estudo da álgebra:

Sistemas de equações do 1º grau; sua resolução.

Noção de número irracional.

Radicais, suas operações.

Generalização da noção de potência: expoentes negativos e fraccionários, expoente nulo.

Equação do 2º grau a uma incógnita.

Resolução, em casos simples, de problemas do 2º grau a uma incógnita.

Equação biquadrada.

Sistemas de duas equações a duas incógnitas, uma do 2º grau e outra do 1º.

Noção de limite, apresentada por meio de exemplos da aritmética, da álgebra e da geometria.

Noção de derivada.

Note-se que relativamente ao conceito em estudo apenas é escrito “noção de derivada”, o que constitui um retrocesso em relação à reforma anterior, na qual este conceito integrava um capítulo próprio, Elementos de Cálculo Infinitesimal, onde, para além de merecer uma atenção muito maior, estava também melhor integrado numa sequência mais lógica de conteúdos. Importa também referir que as noções de função e continuidade só eram lecionadas dois anos depois, no curso de Ciências, num capítulo intitulado Complementos de Álgebra. Deste modo podemos dizer que esta reforma é marcada pela perda da autonomia da Análise, só retomada com a introdução das Matemáticas Modernas.

A 18 de Janeiro de 1936 é nomeado Ministro da Instrução Pública António Carneiro Pacheco que publica, a 11 de Abril de 1936 a “Remodelação do Ministério da Instrução Pública”, passando então a designar-se Ministério da Instrução Nacional, evidenciando a intenção política da ditadura, de transformar a escola num veículo de transmissão da doutrina do Estado Novo.

A reforma do ensino liceal aconteceu a 14 de Outubro de 1936 (Decreto n.º 27:084 do D.G. n.º 241) sendo caracterizada por uma profunda desvalorização da instrução o que convergiu na simplificação e

⁵ Carvalho, Rómulo. *História da Educação em Portugal. Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar.* (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1985), 720.

diminuição drástica dos conteúdos programáticos, verificando-se a ausência de alguns temas, em particular, no programa de Matemática do ensino secundário do ensino do conceito de derivada.

Volvidos onze anos, a 17 de Setembro de 1947 é publicada aquela que seria a última reforma do ensino liceal dos primeiros cinquenta anos do século XX (Decreto n.º 36:507 do D.G. n.º 216), tendo sido seu autor Fernando Andrade Pires de Lima. Com os respetivos programas curriculares publicados a 22 de Outubro de 1948 (Decreto n.º 37:112 do D.G. n.º 247) assiste-se à meritória decisão de reintroduzir o conceito de derivada no programa de Matemática, excluída desde 1936⁶ ainda que num capítulo de Álgebra do 7.º ano. A parte deste capítulo referente ao ensino das derivadas encontra-se agora reduzida aos seguintes pontos:

7.º ano (Curso Complementar de Ciências)

Álgebra:

O problema das tangentes e o das velocidades; noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

2. Introdução das Matemáticas Modernas (1963-1974)

Em 1963, à semelhança do que se vinha fazendo noutros países europeus, deu-se a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal, que foi vista como uma “Revolução no ensino”, sendo desta forma referida pelos meios de comunicação.⁷ O seu principal impulsionador foi o ilustre matemático e pedagogo José Sebastião e Silva (1914-1972) que leva a cabo uma experiência-piloto nos 6.º e 7.º anos do ensino liceal (equivalente aos atuais 10.º e 11.º anos de escolaridade). Como suporte teórico Sebastião e Silva redige compêndios (textos-piloto) e guias didáticos com algumas recomendações muito atuais, acerca do ensino da Matemática e orientações metodológicas referentes aos vários temas tratados nos compêndios para facilitar a tarefa dos professores. No texto-piloto era patente a preocupação em introduzir novos temas e novas abordagens de temas já anteriormente lecionados, de forma a permitir uma maior proximidade e articulação entre a matemática do ensino secundário e a matemática do ensino superior. Os programas do ensino complementar de Ciências (6.º e 7.º anos), sofrem assim profundas alterações. O novo programa experimental inclui como novos temas: Lógica, Teoria dos conjuntos, Álgebra (estruturas algébricas, números complexos, álgebra de Boole, álgebra linear), Cálculo integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico Aproximado. Alguns temas “clássicos” como Cálculo Diferencial,

⁶ Ana Paula Aires & Elisa Santiago, “Os programas de Matemática do ensino liceal em Portugal,” in *A Matemática nos programas do ensino não-superior-1835-1974*, org. António José Almeida & José Manuel Matos (Lisboa: UIED, 2014) (pp. 71-94): 87.

⁷ Ana Paula Aires & Elisa Santiago, “Os programas de Matemática do ensino liceal em Portugal,” in *A Matemática nos programas do ensino não-superior-1835-1974*, org. António José Almeida & José Manuel Matos (Lisboa: UIED, 2014) (pp. 71-94): 87.

Trigonometria e Geometria Analítica mantinham-se, enquanto que a Aritmética Racional era suprimida. As alterações não diziam respeito somente aos temas abordados, constatamos diferenças importantes quanto à forma como aqueles eram apresentados, bem como às conexões entre os mesmos. O conceito de derivada aparece no 7.º ano, mais concretamente no volume II do texto-piloto, no capítulo intitulado “Introdução ao Cálculo Diferencial”.

7.º Ano (Curso Complementar de Ciências)

Capítulo I: Introdução ao Cálculo Diferencial

§1. Cálculo Numérico Aproximado

§2. Teoria dos limites de Sucessões

§3. Limites de Funções de variável real

§4. Derivadas:

Conceitos fundamentais e regras de derivação. Conceito de diferencial; regras de diferenciação. O conceito de diferencial nas ciências da natureza. Derivadas das funções exponencial e logarítmica. Derivada da função logarítmica. Derivadas das funções circulares. Máximos e mínimos: concavidades e inflexões. Teorema de Cauchy. Método da tangente (ou de Newton). Método da corda (ou regra da falsa posição). Interpolação por diferenças finitas.

A partir de 1967, com a criação do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (com a designação de 1.º e 2.º anos do Ciclo Preparatório) a substituir o 1.º Ciclo do Curso Geral do Ensino Liceal, a estrutura do Ensino Liceal passa a ser de apenas dois cursos: o Curso Geral e o Curso Complementar.

Deste modo temos:

- o Curso Geral agora constituído por três anos (designados por 3.º, 4.º e 5.º anos);
- o Curso complementar com a duração de dois anos bifurcado em Letras e Ciências.

3. Da Revolução de Abril à Lei de Bases do Sistema Educativo (1974-86)

Em 1974 são publicados pelo Ministério da Educação e Cultura novos programas para o ensino liceal, para vigorarem nesse mesmo ano letivo. Relativamente à disciplina de Matemática são publicados dois programas: um relativo às Matemáticas Modernas, onde é ainda patente a influência de Sebastião e Silva, embora este tenha sido encurtado e os temas tratados simplificados. Neste programa o conceito de derivada é lecionado no 2.º ano do Curso complementar (antigo 7.º ano) de Ciências, num capítulo intitulado “Introdução à Análise Infinitesimal”, com a seguinte estrutura:

2.º ano do Curso Complementar de Ciências

Introdução à Análise Infinitesimal

1.1 Cálculo numérico aproximado

1.2 Limite de sucessões

1.3 Limites de funções de variável real

1.4 Funções contínuas

1.5 Derivadas e primitiva:

Derivada de uma função num ponto; significado geométrico. Derivabilidade e continuidade. Função derivada. Interpretação cinemática do conceito de derivada. Regras de derivação. Derivada da função inversa e derivada da função composta. Aplicações das derivadas: sentido da variação de uma função, concavidades, gráficos e problemas concretos. O problema da primitivação. Primitivação imediata e primitivação por decomposição. Aplicações simples do cálculo de primitivas.

Outro programa relativo à Matemática Clássica para o 1.º e 2.º anos do Curso Complementar, pois, apesar da generalização do ensino das Matemáticas Modernas, ainda coexistiam com estas turmas, outras onde se leccionava a Matemática Clássica. O programa da Matemática Clássica constituía uma simplificação e redução do anterior, tal como é dito na nota prévia que antecede o programa:

O programa de Matemática Clássica para o Curso Complementar, que agora se estabelece é muito mais simples do que o anterior: reduz-se não só a matéria, como o número de demonstrações a exigir; a arrumação dos assuntos é diferente procurando-se encaminhar do mais simples para o mais complexo.⁸

Relativamente ao conceito de derivada este é leccionado no 1.º ano do Curso Complementar (antigo 6.º ano dos liceus) de Ciências.

1.º ano (Curso Complementar-Matemática Clássica)

2.7 As funções de variável natural. Limites de sucessões.

Limites de funções de variável real: continuidade.

Derivadas: definição de derivada de uma função num ponto e sua interpretação geométrica.

Derivabilidade e continuidade (com demonstração).

A função derivada. Regras de derivação, incluindo a derivada da raiz. Dedução nos casos da soma, produto, potência e derivada da função inversa.

Aplicação a problemas de máximos e mínimos e representação gráfica de funções.

Nos anos subsequentes à Revolução de Abril, a estrutura do sistema do ensino secundário (anteriormente designado de ensino liceal) sofreu algumas alterações importantes das quais destacamos as seguintes:

- A unificação do Curso Geral que teve início no ano letivo de 1975-76 e decorreu até 1980, dando origem ao Curso unificado, com a duração de três anos (7.º, 8.º e 9.º anos), oferecendo para o 9.º ano várias áreas vocacionais;

⁸ Ministério da Educação e Cultura, *Matemática- Programa para o ano letivo 1974-1975, Ensino Liceal* (Lisboa: 1974), 30.

- A introdução nos anos letivos de 1978-79 e 1979-80, após o 9.º ano, do 10.º ano e 11.º ano, respetivamente que constituem assim o Curso Complementar do Ensino Secundário, vindo substituir o Curso Complementar dos liceus.
- A introdução no ano letivo de 1980-81 do 12.º ano, transferindo-se para este ano não só as características vestibulares relativamente ao ensino superior, mas também toda a experiência e ensinamentos que se foram acumulando ao longo dos anos anteriores.

O programa de Matemática para o primeiro ano de funcionamento do 11.º ano, no ano letivo de 1979-80, é publicado pela Direcção - Geral do Ensino Secundário com a data de homologação de 6 de junho de 1979. Neste podemos ver um capítulo inteiramente dedicado ao estudo das derivadas, intitulado: “Derivadas de funções reais de variável real”. Este capítulo tem a seguinte estrutura:

11.º ano

Derivadas de funções reais de variável real:

1. Derivada de uma função num ponto: significado geométrico.
2. Derivadas laterais: interpretação geométrica.
3. Derivabilidade e continuidade.
4. Função derivada.
5. Regras de derivação.
6. Derivada de uma função inversa.
7. Derivada de uma função composta.
- 8 Aplicações das derivadas.

No ano letivo de 1980-81 é a vez de entrar em funcionamento o 12.º ano. O programa de Matemática estava dividido em duas partes: Álgebra e Análise Real. Na 2ª parte encontramos um capítulo exclusivamente dedicado ao estudo das derivadas: “Complementos sobre derivação de funções reais de variável real”. Aqui completa-se o estudo das derivadas feito no 11.º ano, relativamente às derivadas de funções só estudadas neste ano como a função exponencial e logarítmica. O capítulo é assim estruturado:

12.º ano

5. Complementos sobre derivação de funções reais de variável real:

- 5.1 Derivação das funções circulares e das “funções” circulares inversas.
- 5.2 Derivação da função exponencial e da função logarítmica.
- 5.3 A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regras de diferenciação.

4. Da Lei de Bases do Sistema Educativo ao final do século XX

A 14 de Outubro de 1986 é publicada no Diário da República⁹ a Lei de Bases do Sistema Educativo (Lei n.º 46/86) a qual constitui um quadro inovador e organizador do desenvolvimento futuro do

⁹ Diário da República n.º 237/1986, Série I de 1986-10-14.

sistema educativo. Esta lei procura estruturar o ensino de uma forma global, pondo cobro a uma situação de alguma desarticulação vivida pelas inúmeras alterações que haviam sido introduzidas no sistema, como medidas avulso. Desta feita, com a Lei de Bases do Sistema Educativo a estrutura de ensino fica organizada da seguinte forma:

- O ensino básico com três ciclos sequenciais: 1.º ciclo com quatro anos (1.º, 2.º, 3.º e 4.º anos); 2.º ciclo com dois anos (5.º e 6.º anos); 3.º ciclo com três anos (7.º, 8.º e 9.º anos).
- O ensino secundário com a duração de três anos (10.º, 11.º e 12.º anos).

A 29 de agosto de 1989 são publicados os “Novos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário” (Decreto n.º 286/89 do D.R. n.º 198). Surgem assim novos programas para as várias disciplinas. Relativamente aos programas de Matemática do ensino secundário estes foram publicados em janeiro de 1991, sob a forma de um livro para o conjunto dos três anos deste ciclo. Podia ler-se na capa: “Programa de Matemática (10.º-12.º anos) para aplicação em regime de experiência pedagógica.”¹⁰ Estes programas são postos em prática logo no ano letivo de 1991-92 em regime de experiência pedagógica só se tornando definitivos a partir do ano letivo seguinte.

É de realçar que nestes programas se apostava numa organização progressiva das matérias, em particular das tarefas da Análise Matemática, tendo por base a categoria de funções, isto é: no 11.º ano eram estudadas as funções algébricas racionais e portanto, nesta fase o estudo e aplicações dos conceitos de limite, derivada e primitiva eram restringidos apenas a estas funções. De igual modo no 12.º ano, em três momentos do programa, ampliava-se o leque das funções a estudar, que passa a englobar funções irracionais, funções trigonométricas e funções exponenciais e logarítmicas. Também aqui, em cada um destes momentos, são postas em prática todas as ferramentas da Análise Matemática, já conhecidas dos alunos e é chegado o momento de aperfeiçoar os conceitos para serem traduzidos em linguagem simbólica.

O conceito de derivada é exatamente um exemplo em que o estudo é feito no 11.º e 12.º anos de uma forma sequenciada e ampliada, como de resto já acontecia nos manuais de Sebastião e Silva. Assim, aparece no 11.º ano num capítulo denominado “Funções-III-Limites. Derivadas” com a seguinte estrutura:

11.º Ano

7. Funções-III-Limites. Derivadas.

- Limites e continuidade de funções.
- Derivação de funções racionais. Segunda derivada.
- Aplicações.

¹⁰ Ministério da Educação- Departamento do Ensino Secundário, Programa de Matemática (10.º-12.º anos) para aplicação em regime de experiência pedagógica (Lisboa: Casa da Moeda, 1991),1.

Aparece ainda no 12.º ano em dois capítulos intitulados: “Funções-V-Complementos sobre Derivadas” e “Funções-VI-Funções trigonométricas em \mathfrak{R} ”.

12.º ano

2. Funções-V-Complementos sobre Derivada

- Derivada da função inversa e da função composta; aplicações.
- Derivadas sucessivas. Derivadas de funções implícitas.
- Estudo de funções irracionais.

6. Funções-VI- Funções Trigonométricas em \mathfrak{R}

- Fórmulas. Equações e identidade.
- Seno, co-seno e tangente como funções de variável real.
- Limites, continuidade, derivada, variação.
- Primitivas imediatas: cálculo de áreas.

Estes programas vigoraram até 1997, altura em que deram lugar a “novos” programas, que, em boa verdade, não eram mais que os mesmos programas com pequenos ajustamentos que vieram dar resposta às muitas críticas que foram sendo apontadas. Este programa começou a ser aplicado logo no ano letivo de 1997-98, no 10.º ano, no ano letivo de 1998-99 no 11.º ano e no ano letivo seguinte no 12.º ano.

O estudo das derivadas aparece no 11.º ano no capítulo: “Introdução ao Cálculo Diferencial I” e no 12.º ano nos capítulos “Introdução ao Cálculo Diferencial II” e “Trigonometria e Números Complexos, cujos capítulos apresentam as seguintes estruturas:

11.º ano

2-Introdução ao Cálculo Diferencial I-Funções Racionais e com Radicais.

Taxa de variação/derivada:

- Estudo de propriedades das Funções racionais do tipo $f(x)=a+b/(cx+d)$; referência à hipérbole.
- Aproximação experimental da noção de limite.
- Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição.
- Noção da taxa média de variação; noção da taxa de variação; interpretação geométrica e física.
- Determinação da derivada em casos simples; aplicações.
- Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cúbicos.

12.º ano

2-Introdução ao Cálculo Diferencial II:

- Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1.
- Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.
- Aplicações concretas.
- Limite de função segundo Heine; propriedades operatórias sobre limites;

3-Trigonometria e Números Complexos:

- Funções seno, co-seno e tangente; estudo de propriedades;cálculo de derivadas.
- Introdução histórica dos números complexos, através dos problemas da resolubilidade algébrica.
- Complexos na forma algébrica e na forma

limites notáveis. Indeterminações. Assíntotas.
-Continuidade. Teorema de Bolzano-Cauchy e aplicações numéricas.
-Funções deriváveis. Regras de derivação e derivadas de funções elementares.
Segunda definição do número e. Segundas derivadas e concavidade.
-Estudo de funções em casos simples.
-Problemas de otimização.

trigonométrica.
-Operações.
-Domínios planos e condições em variável complexa.

Foram estes programas que vigoraram até ao final do século XX.

Considerações finais

No terminus desta investigação e tendo em conta o nosso objetivo consideramos que deveriam ser evidenciados alguns aspetos.

Em primeiro lugar importa referir que a análise das sucessivas reformas educativas que marcaram o século XX, reforça a importância da análise histórica para o desenvolvimento da educação matemática e para uma melhor compreensão deste domínio.

Em segundo lugar que o estudo da noção de derivada, seguindo o método histórico, chama a atenção para o facto de que as noções matemáticas não se desenvolvem de maneira anárquica, mas antes conectadas entre si. Ao mesmo tempo faz-nos compreender que a evolução do conceito em estudo não foi linear, antes pelo contrário, verificamos progressos e retrocessos, indecisões, dúvidas, hesitações. Desde a introdução da noção de derivada no plano de estudos do ensino liceal, no ano de 1905 até ao final do século XX, com exceção da reforma de Carneiro Pacheco, em 1936, em que aquela foi suprimida, assistimos a uma afirmação e aumento do espaço dedicado ao ensino das derivadas. Inicia-se com um longo período em que esta possui uma identidade própria até às últimas reformas nas quais se valoriza o seu carácter instrumental.¹¹ De facto, aquando da introdução do conceito de derivada nos programas oficiais do ensino liceal, em 1905, até à reforma de 1929 pela análise dos programas podemos constatar que a tónica era posta na definição formal do conceito. Também com o programa de Matemática de 1947 começa-se a ter uma visão diferente das derivadas, passando-se a utilizar as derivadas como uma “arma analítica” para aplicar ao estudo da variação das funções (sentido de variação e extremos relativos de uma função). Com a introdução das Matemáticas Modernas esta nova abordagem torna-se mais evidente sendo muito frequente aparecer no programa um parágrafo dedicado às aplicações das derivadas como por exemplo, sentido da variação de uma função, concavidades, gráficos e problemas concretos, ao

¹¹ Aires, Ana Paula. “O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX.” (Tese de doutoramento, Universidade de Salamanca, 2006), 286.

mesmo tempo que não se descarta o carácter formal do conceito. Posteriormente, consolida-se a tendência das Matemáticas Modernas de considerar o conceito de derivada em si mesmo, definindo-se derivadas laterais.

Com os programas de 1991 chegam novas orientações que concedem ao aluno um papel mais ativo na aprendizagem e, ao mesmo tempo valorizam as abordagens intuitivas, as representações geométricas e a resolução de problemas. Assiste-se assim à apresentação da noção de derivada de formas intuitiva, como limite da taxa de variação média, e a problemas de otimização como aplicação das derivadas. Finalmente o programa ajustado de 1997, orientado numa perspetiva construtivista assenta no pressuposto de que cabe ao aluno ser agente da sua própria aprendizagem, partindo das suas vivências e de situações concretas, visando criar um espaço de encontro entre a Matemática e a vida real, a tecnologia e as outras disciplinas, lido numa perspetiva histórico-cultural. Desta feita a tendência é para abordar o conceito de derivada de uma forma mais fenomenológica, ou seja, relacionada com fenómenos da natureza e da vida diária.¹²

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/CED/00194/2019.

SOBRE OS AUTORES:

Ana Paula Florêncio Aires
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, UTAD; Vila Real, Portugal
Lab_DCT do CIDTFF – Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores,
Aveiro, Portugal
aires@utad.pt

¹² Ibid.