

Discussão do uso do *GeoGebra* no contexto do Cálculo a Várias Variáveis

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES¹

Resumo

*Registramos no Brasil a escassez de trabalhos com interesse na transição interna do Cálculo em Uma Variável Real – CUV para o Cálculo a Várias Variáveis - CVV. Nas investigações recentemente desenvolvidas com este objeto de investigação (ALVES, 2011; ALVES & BORGES NETO, 2012; ALVES; BORGES NETO & INGAR, 2012), destacamos o papel da tecnologia no sentido de promover a visualização e a apreensão perceptiva de propriedades de objetos matemáticos no espaço IR^2 e IR^3 . Assim, com o auxílio do *Geogebra*, podemos discutir situações do CVV que admitem uma interpretação imediata no contexto do CUV e possíveis ligações conceituais evidenciadas pelo CAS *Maple*. Tal perspectiva que orienta uma abordagem didática pode favorecer ao aprendiz o entendimento acerca da ligação conceitual, com apoio na representação gráfica, dos conceitos estudados tanto no CUV como no CVV.*

Palabras chave: *Interpretação geométrica, Visualização, Geogebra, CAS Maple.*

Resumeé

*Nous registrons au Brésil le manque de travailles avec l'interée dans la transition interne du Calcule dans Une Variable Reelle – CUV vers le Calcule a Plusieurs Variable – CVV. Dans le recherche récemment développée avec cet objet de l'enquete (ALVES, 2011; ALVES & BORGES NETO, 2012; ALVES; BORGES NETO & INGAR, 2012), nous mettons en évidence le rôle de la technologie dans le sens da le promotion de la visualisation et l'appréhension perceptive des propriétés des objets mathématiques dans l'espace IR^2 et IR^3 . Ainsi, avec l'aide de *Geogebra*, pouvons discuter des situations dans le CVV qui admettent une interprétation immédiate dans le contexte du CUV et possibles liaisons conceptuelles souligné par le CAS *Maple*. Telle perspective qui guide une approche didactique peut faciliter la compréhension de l'apprenant du lien conceptuel, avec l'aide dans les représentations graphique, des concepts étudiés a la fois dans le CUV que le CVV.*

Mots-clés: *Interprétation géométriques, Visualization, Geogebra, CAS Maple.*

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE- fregis@ifce.edu.br

1. Introdução

Identificamos no Brasil, mesmo que de modo incipiente, estudos (ALVES, 2012c; 2012d) que buscam compreender, investigar e descrever as mudanças enfrentadas pelos estudantes acadêmicos, no período de um a dois anos em estudo no *locus* acadêmico. Ora, no Brasil, esse período corresponde, de modo geral, o espaço de tempo em que os alunos tomam o primeiro contato com o Cálculo em Uma Variável Real – CUV e, no ano subsequente, com o Cálculo a Várias Variáveis – CVV.

Nada mais natural e esperado que aluno manifeste uma expectativa a respeito do fato de que o conteúdo apreendido ou, pelo menos, veiculado em sala de aula pelo professor no primeiro período de estudo do CUV, funcione como um facilitador da apreensão e/ou o entendimento no contexto do CVV, todavia, tal fato nem sempre evolui de modo automático, natural e não traumático.

Assim, diante dos entraves indicados na literatura no Brasil em relação à *transição interna* (ALVES, 2011; ALVES & BORGES NETO, 2011) do Cálculo, trazemos exemplos de situações, que envolvem necessariamente uma visão de complementaridade entre o *software Geogebra* e, dada à complexidade intrínseca dos conceitos do CVV, o outro *software* (não gratuito) que se constitui como um Sistema de Computação Algébrica trata-se do *CAS Maple*.

2. Transição interna do Cálculo

Temos observado há décadas vigor na produção de investigações no contexto de ensino do Cálculo em Uma Variável Real – CUV, todavia, sobretudo no Brasil, divisamos a escassez de estudos pertinentes ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV (ALVES, 2011).

Por outro lado, a identificação de sérios entraves, há décadas indicados no CUV é digna, também, de atenção e vigilância dos professores no contexto de mediação didática do CVV, posto que, muitos destes problemas e entraves tendem a se manifestar, respeitadas algumas particularidades e especificidades, em ambos os contextos de ensino acadêmico (ALVES, BORGES NETO & MACHADO, 2007; ALVES, 2011; ALVES, BORGES NETO & INGAR, 2012; ALVES, 2012b; 2012c).

Acentuamos, pois, o uso, numa perspectiva de complementaridade, dos *softwares Geogebra* e do *CAS Maple* permitem a descrição de um cenário de atividades de investigação inexequíveis quando restritas ao ambiente lápis/papel, fato que pode transformar e evitar uma aprendizagem na reprodução automática de técnicas

algorítmicas sofisticadas, embora desprovidas de significado conceitual para o aprendiz. Outrossim, o processo de generalidade e abstração, peculiar ao *método axiomático*, quando consideramos o estudo dos conceitos do Cálculo, no contexto *transição interna* (ALVES, 2011) do \mathbb{R}^2 , para o \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$, pode ser explicado ou significado com o aparato da tecnologia, com forte ênfase na visualização dos objetos matemáticos.

3. Exemplos de situações do CVV com uso do *Geogebra*

O estudo do CUV, com base na abordagem dos livros de Cálculo, se restringe na exploração dos conceitos no \mathbb{R}^2 (ALVES; BORGES NETO & ALVES DIAS, 2012). Por outro lado, os conceitos do CVV, que possuem uma fundamentação formal em Análise no \mathbb{R}^n , são explorados, de modo predominante, no espaço \mathbb{R}^3 e, com raras exceções, no \mathbb{R}^4 . Por outro lado, a percepção e o entendimento, a partir da visualização e descrição geométrica, desses objetos conceituais, podem atuar no sentido de proporcionar uma *transição interna* (ALVES, 2011), do CUV para o CVV, de modo adequado. Nos casos em que discutiremos neste trabalho, destacaremos as relações conceituais entre representações algébricas e geométricas, do CUV e do CVV.

Por exemplo, no CVV, estudam-se funções do tipo $f(x, y) = x^3y - xy^3$. Ora, um gráfico desta natureza é impraticável de se descrever, somente com lápis e papel. Ademais, quais são as propriedades que podemos investigar relacionadas com esta função, no contexto do CVV, que podem ser analisadas no contexto do CUV e, reciprocamente?

Reparemos que, nesse caso, temos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e, o estudante deve compreender, por exemplo, que as funções $f(3, y) = 27y - 3y^3$ e $f(x, 3) = 3x^3 - 27x$, são as restrições da função $f(x, y)$, para um subconjunto do seu domínio que é o \mathbb{R}^2 . Neste caso, podemos realizar uma análise e identificação de pontos críticos e pontos de inflexão no \mathbb{R}^3 e com o *Geogebra*, comparar com os gráficos no \mathbb{R}^2 .

Na figura 1, com o auxílio do *Geogebra* (lado direito), descrevemos o gráfico da função $f(x, 3) = 3x^3 - 27x$. Do lado esquerdo, divisamos uma região do \mathbb{R}^3 , na qual, se encontra definido o gráfico da função $f(x, y) = x^3y - xy^3$. As restrições que mencionamos há pouco, são destacadas (em azul) e, no contexto do CVV, recebem o nome de bordo ou fronteira da superfície. Nesta figura, estimulamos o entendimento do estudante sobre o comportamento das funções que descrevem as curvas de bordo (total de 4). As propriedades (ponto de inflexão, um ponto de máximo e um de mínimo) encontradas no gráfico apresentado pelo *Geogebra* podem ser transferidas, de modo

natural, para um contexto de visualização (e novo cenário) no espaço \mathbb{R}^3 . Observamos que, neste caso, usamos escalas distintas atinentes aos eixos ordenados.

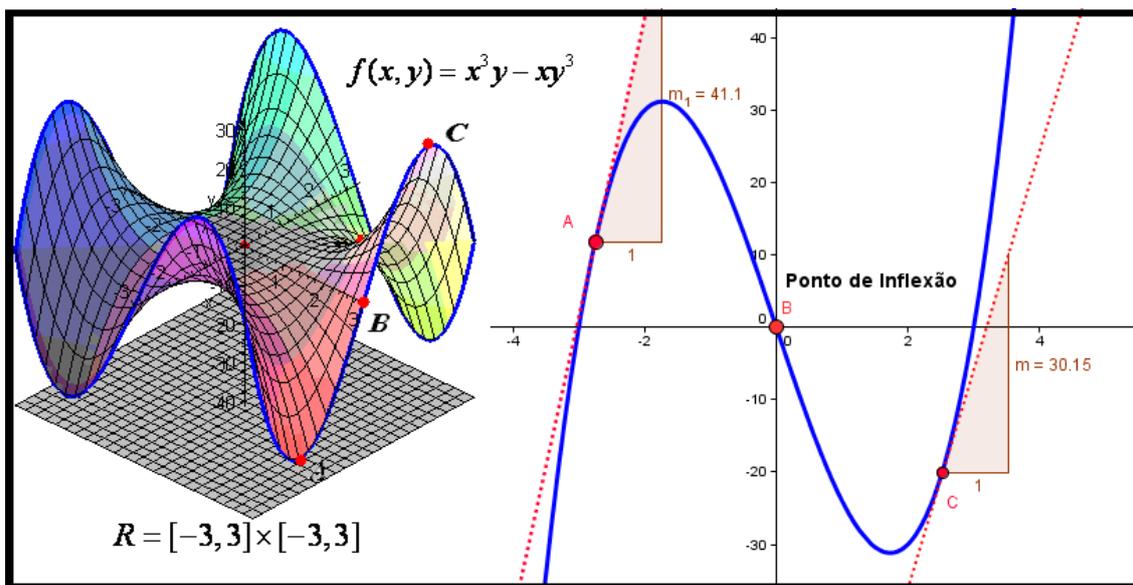


Figura 1: Relações conceituais extraídas dos gráficos no plano e no espaço

Com uma ideia semelhante, destacamos na figura 2, as funções $r(x) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ e $r(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$. A situação que buscamos significar, com base nos gráficos exibidos abaixo, é a qualidade e propriedade geométrica que descreve a limitação da imagem das funções, nas proximidades das origens do \mathbb{R}^2 e do \mathbb{R}^3 . Com base ainda nas relações conceituais extraídas dos gráficos, concluímos de modo similar o comportamento do limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, e, com o gráfico gerado pelo *Geogebra*, que deve ocorrer também que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} = 1$. De modo semelhante, com base na figura 2 (lado direito) escrevemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$.

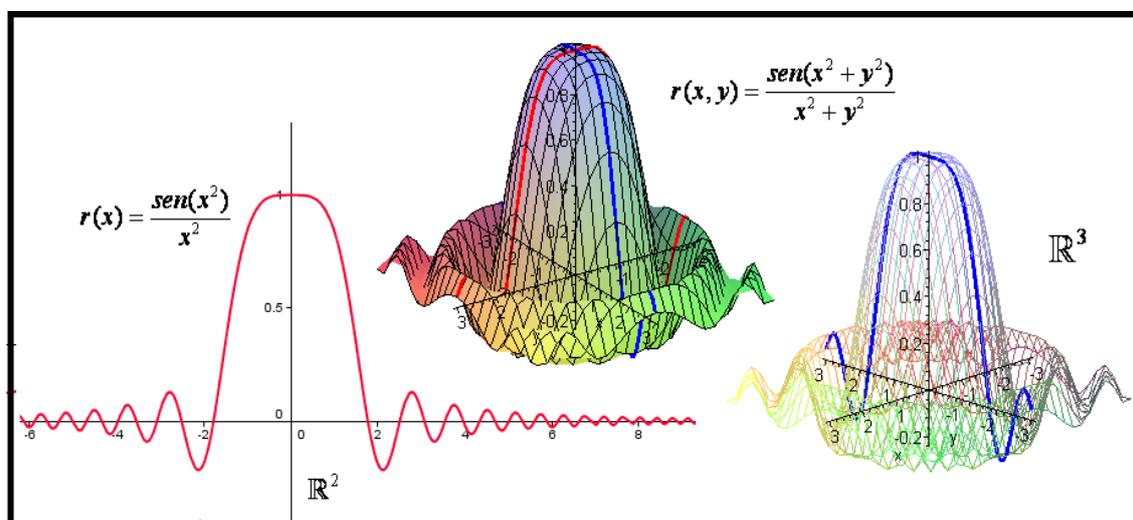


Figura 2: Descrição de imagem limitada de funções com o *Geogebra* e o *CAS Maple*

Tanto no CUV como no CVV, se estuda a noção de imagem ilimitada de funções. Do ponto de vista topológico, dizer que uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada significa que, não conseguimos obter uma bola no espaço \mathbb{R}^n , de modo que sua imagem (ou gráfico limitado numa restrição do domínio) não se encontra dentro da bola, quando consideremos o seguinte domínio $(-\delta, \delta) \cap \text{Dom}(f(x)) \neq \emptyset$. No CUV (com $n=2$), destacamos na figura 3 (lado esquerdo) uma circunferência e a função $1/x$. Mas, no caso do CVV, no lado direito da mesma figura, visualizamos o gráfico de $1/(x+y)$ e, nas vizinhanças da origem $(0,0,0)$, possui um comportamento semelhante à função $1/x$, ou seja, não conseguimos uma bola (em nenhum dos dois casos) que contenha o gráfico dessas funções. Reparemos que, na condição em que se deseja avaliar um limite, analisamos o comportamento da imagem de uma função com relação ao seguinte conjunto $f(V_\delta \cap X) = f((\delta-a, \delta+a) \cap X)$, com $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se tal limite existir, o conjunto (respectivamente, o gráfico) será localmente limitado.

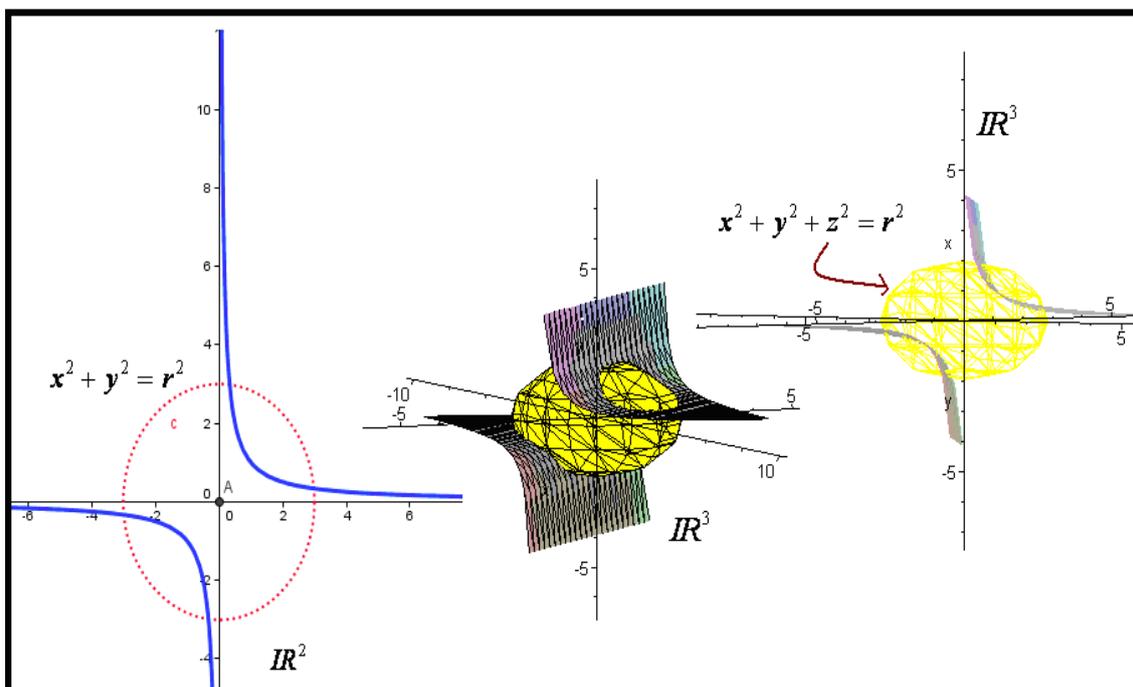


Figura 3: Descrição de imagem ilimitada (gráfico) de funções com o Geogebra e o CAS Maple

No CUV estuda-se a noção de função *derivável*, por outro lado, no CVV, estudamos a noção de função *diferenciável*. Geometricamente, no CUV, a interpretação intuitiva deste conceito relaciona-se com a noção de coincidência entre o gráfico de uma função $y = f(x)$ e uma reta tangente num ponto do tipo $(a, f(a))$. No CVV, temos a noção de plano tangente ao gráfico de uma função, num ponto do tipo $(a, b, f(a, b))$. Por outro lado, a imagem metafórica sugerida pelos autores de livros didáticos (ALVES;

BORGES NETO & ALVES DIAS, 2012) é significada por meio da noção de “bico” ou “quina”.

Por exemplo, na figura 4, do lado esquerdo, descrevemos o gráfico da função $g(x) = 1 - (x^2)^{1/3}$, enquanto que do lado direito, vislumbramos o gráfico da função $g(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$. Reparemos que em ambos as situações, percebemos a identificação de “bicos” ou “quinas” nos gráficos, nas proximidades da origem. Tais designações constituem exemplos de termos metafóricos empregados por autores de livros de CUV para significar o conceito de diferenciabilidade num ponto, somente no contexto do CUV (ALVES, 2011). Assim, depreendemos a perda de diferenciabilidade de ambas as funções, e relações conceituais entre os gráficos exibidos no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

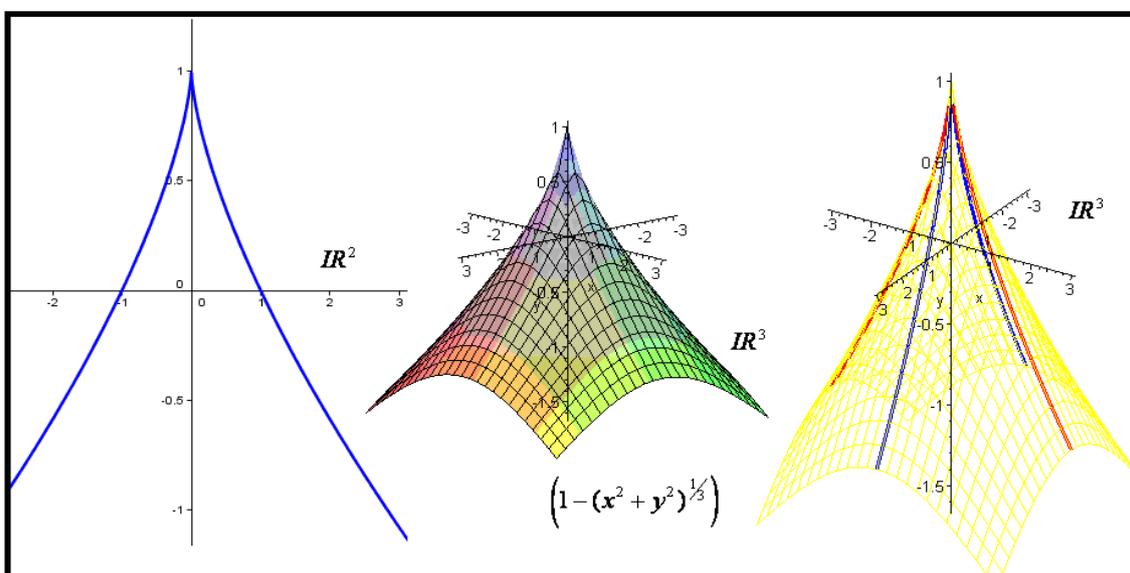


Figura 4: Descrição da noção da perda de diferenciabilidade com o *Geogebra* e o *CAS Maple*

Vejamos outro exemplo com as funções $h(x, y) = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x+y}\right)$ e

$h(x) = (x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Uma das maneiras tradicionais de calcularmos tal limite pode ser

por intermédio do uso do *teorema do sanduíche* estudado no contexto do CUV. Com o

apoio do *Geogebra*, compreender as seguintes relações $-x^2 \leq (x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$, do

ponto de vista geométrico, pode acrescentar significados ao rol de saberes do aprendiz.

Ademais, é importante explorarmos propriedade semelhante no \mathbb{R}^3 , com apoio nos gráficos fornecidos pelo *CAS Maple*, percebemos o mesmo comportamento relativo ao CUV. Vale observar ainda que, do ponto de vista analítico, deparamos que vale

$-(x^2 + y^2) \leq (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x+y}\right) \leq (x^2 + y^2)$. Sublinhar, entretanto, que, as propriedades analíticas que registramos nessa última desigualdade por ser reassignificada sob o prisma geométrico (ver figura 5).

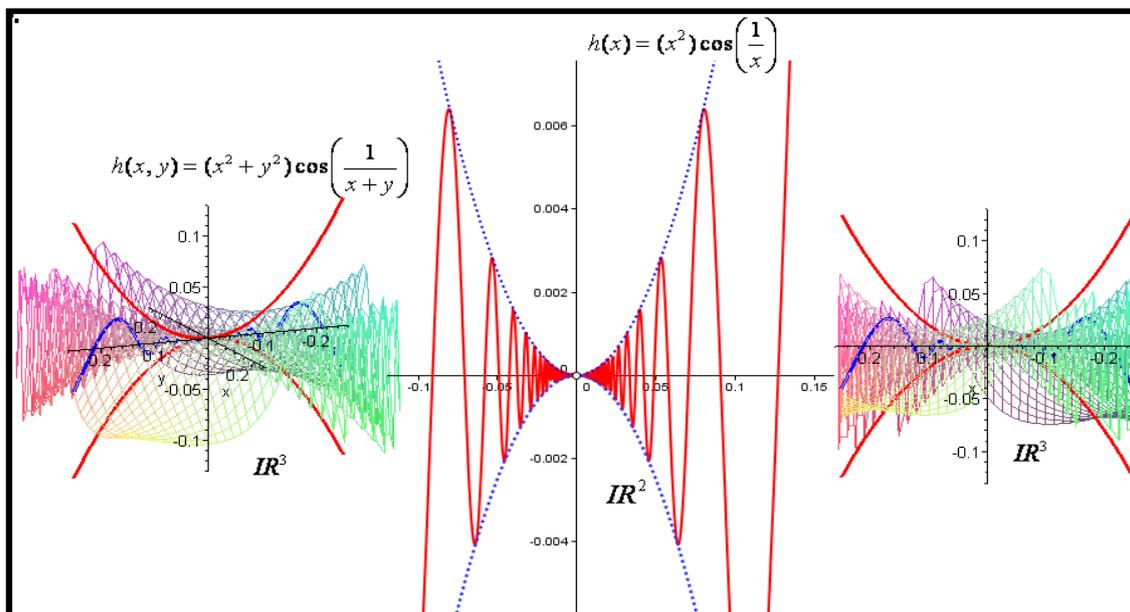


Figura 5: Relações evidenciadas com o Geogebra e o CAS Maple do teorema do sanduíche

Na figura 6, observamos a região do espaço aonde se encontra definido o gráfico da função $f(x, y) = x^2 - y^2$. A característica marcante desta função é o formato peculiar que se assemelha a uma sela, nas vizinhanças da origem. Com o *CAS Maple*, conduzimos, rapidamente, ao estudante, compreender o comportamento de crescimento e decrescimento nas proximidades do ponto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Neste caso, podemos explorar as curvas parametrizadas (sobre a superfície) descritas por $f(x,0) = x^2$ e $f(0,y) = -y^2$. Sobre estas curvas (ou funções), identificamos um ponto de máximo e de mínimo, dependendo da trajetória escolhida. Neste caso, diz-se que existe um *ponto de sela*.

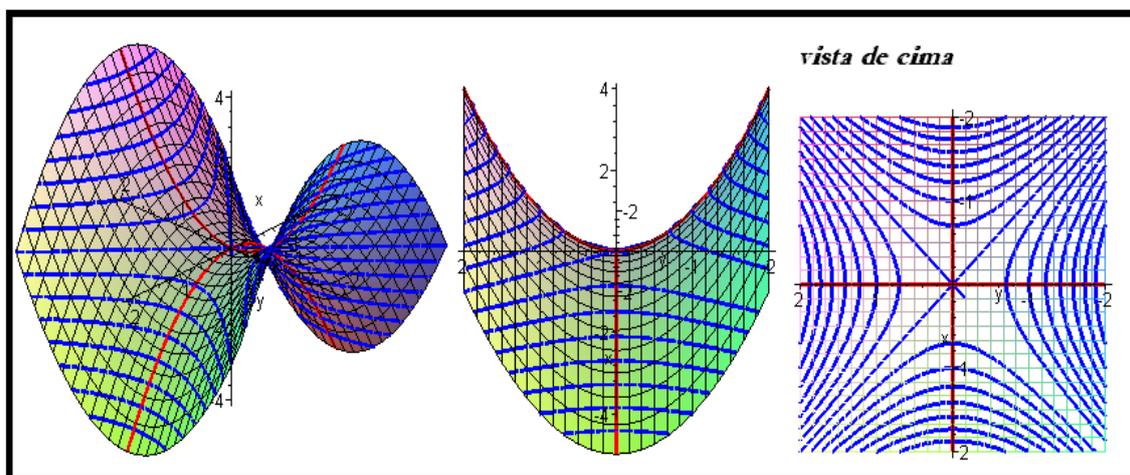


Figura 6: Descrição da noção da curva de nível com o Geogebra e o CAS Maple

NO CVV, podemos investigar a existência do seguinte limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ que, caso exista, é definido como a *derivada parcial* da

função $f(x, y)$ e denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, no ponto (x_0, y_0) . Neste caso, lidamos

com a restrição da função $f(x, y_0)$. Por exemplo, se consideramos a função

$f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Avaliamos $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2$ que, no CUV, é justamente a

declividade da reta descrita por $(y-1) = -2(x-1)$. Na figura 7, divisamos as relações entre os gráficos exibidos. O elemento invariante nesse caso, é que o entendimento, segundo o qual, tanto no CUV como no CVV, se obtém a declividade de uma reta tangente a uma curva (CUV) ou tangente a um gráfico ou superfície (CVV).

Na figura 7, exibimos uma construção com o *Geogebra* que evidencia o comportamento da declividade da reta tangente, sobre uma curva obtida pela interseção da superfície descrita pelo gráfico da função $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, com o plano de equação $y = 1$. A construção geométrica da obtenção da derivada parcial é exibida na figura 7 (lado esquerdo) e percebemos as devidas relações conceituais.

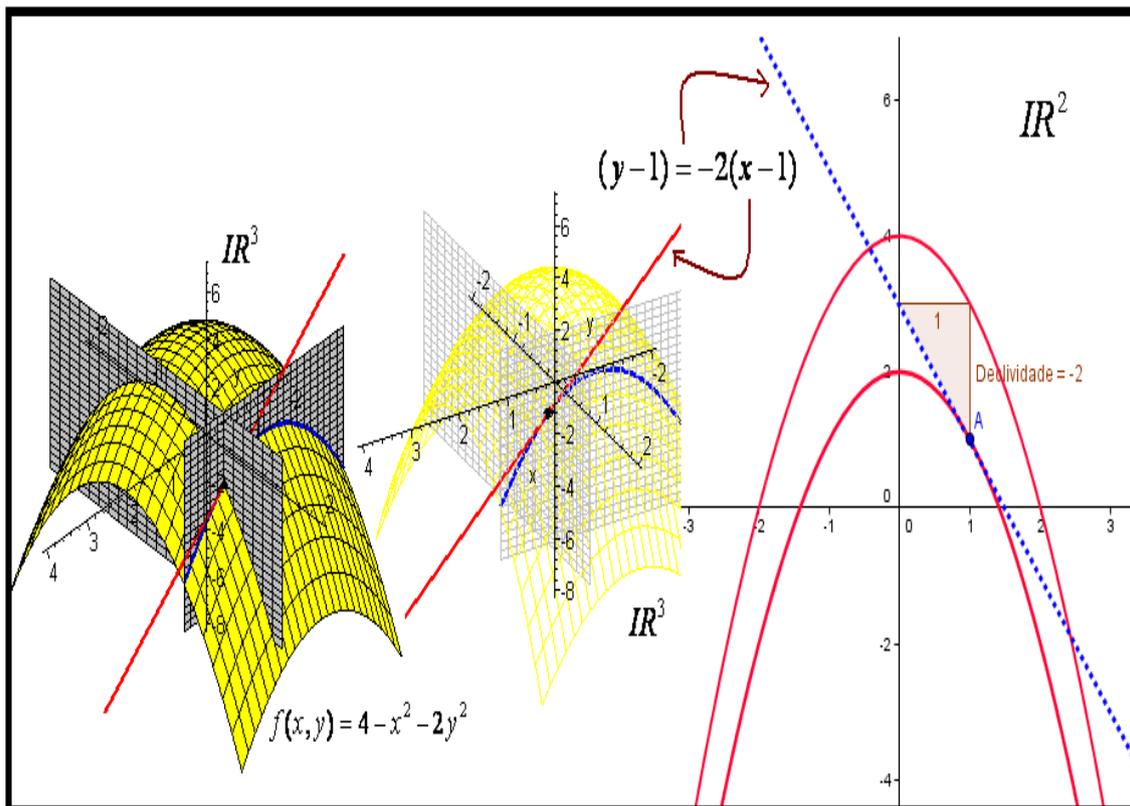


Figura 7: Descrição com o auxílio do *Geogebra* da restrição da função e o comportamento da declividade que coincide com a noção de derivada parcial no CVV

Para concluir, consideremos a seguinte equação em termos de duas variáveis $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$. Reparemos, com base na figura 8 (lado esquerdo), que o *locus* descrito por tal equação, define um subconjunto do \mathbb{R}^2 que, aparentemente, possui as propriedades de ser o gráfico de uma função de y como variável de x , todavia, Krantz & Parks (2002, p. 2) sublinham que “nenhum fórmula para tal função existe.”

Por outro lado, quando escrevemos $y^5 + 16y = 32x^3 - 32x$, para cada valor fixado $x \in \mathbb{R}$, descrevemos a família de funções $y^5 + 16y = k$, com $k = 32x^3 - 32x$.

Na figura 8 temos uma situação de uma equação descrita de modo implícito pelas variáveis e não se pode gerar o gráfico que exibimos do lado esquerdo pelo *Geogebra* (no caso de algumas versões do programa). Por outro lado, para valores particulares, descrevemos a família $y^5 + 16y = k$, a partir deste *software*. Para determinada variação de valores particulares, descrevemos uma família de funções (figura 8, lado direito).

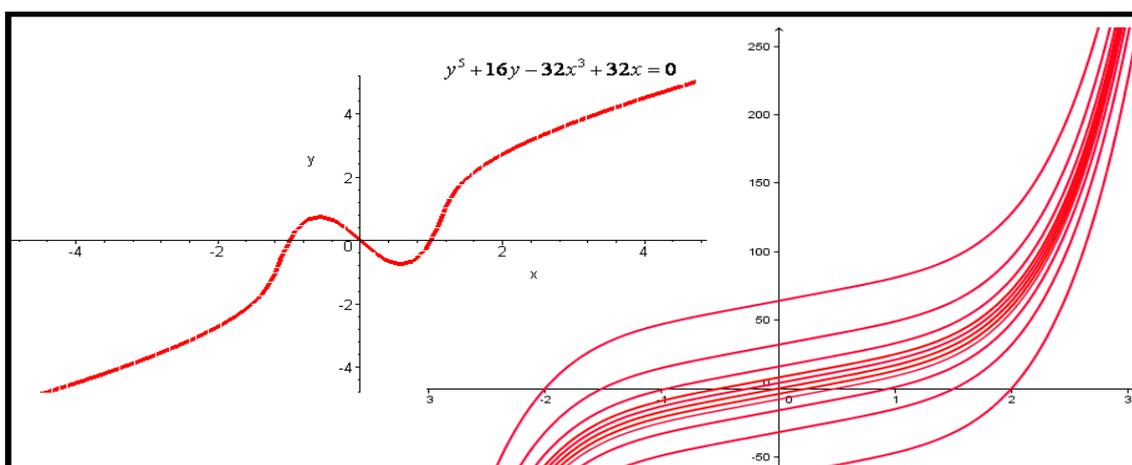


Figura 8: Com o *Geogebra* obtemos a descrição de uma família de funções

Por fim, o processo de integração no contexto do CUV, é recorrente, segundo a orientação dos autores de livros didáticos de Cálculo no Brasil, fornecer uma descrição do processo de obtenção da área de uma região no plano \mathbb{R}^2 que se encontra abaixo do eixo das ordenadas, sob o gráfico de uma função $y = f(x)$. Como consequência da definição de integral por meio de *somas de Riemann*, quando nos referimos ao símbolo $\int_a^b f(x)dx$, e ocorre a condição $a > b$, definimos a área por $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (*). Contudo, no CUV, com o recurso do *software Geogebra*, mesmo àquelas funções mais complexas, conseguimos divisar, no gráfico as regiões, nas quais, devemos empregar a caracterização descrita pela igualdade há pouco mencionada.

Na figura 9, divisamos com relativa facilidade o trecho (região) no espaço \mathbb{R}^3 , no qual se encontra definido o gráfico de uma função de duas variáveis reais, todavia, abaixo do

plano xOy . Neste caso, indicamos o trecho de uma curva que exibimos no plano (lado esquerdo, figura 9), corresponde exatamente a uma das restrições da função $h(x, y) = y \sin(xy)$, relativas ao seu domínio aqui considerado como $[1, 2] \times [0, \pi]$. Observando e comparando seu comportamento no plano e no espaço, adquirimos uma percepção adequada sobre o trecho em que precisamos utilizar uma definição semelhante à igualdade (*), só que, neste caso, com a noção de *integral múltipla* e, lidamos agora com a noção de volume.

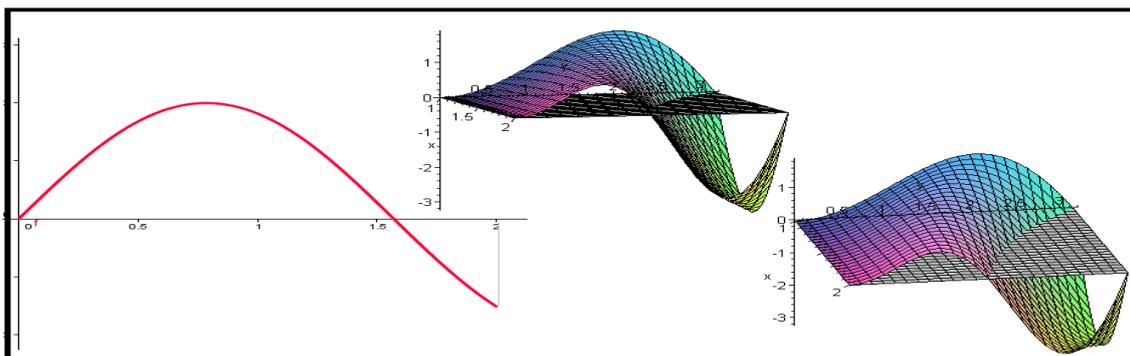


Figura 9: Visualização da região de integração no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3

Desse modo, dada a representação gráfica fornecida pelo computador, podemos extrair e descrever o comportamento particular nessa região $[1, 2] \times [0, \pi]$ e compreender, com o auxílio do *Geogebra*, a região que se encontra abaixo do plano xOy , bem como a região do espaço abaixo do gráfico. Apesar de que, quando restringimos tal tarefa ao quadro analítico, este elemento comum a ambos os contextos é desconsiderado, com o uso da tecnologia, evidenciamos um comportamento e raciocínio semelhante.

Em outros casos, ao tomar a seguinte função $f(x, y) = \sin(xy)$, deparamos um comportamento demasiadamente complexo e de difícil entendimento perceptual.

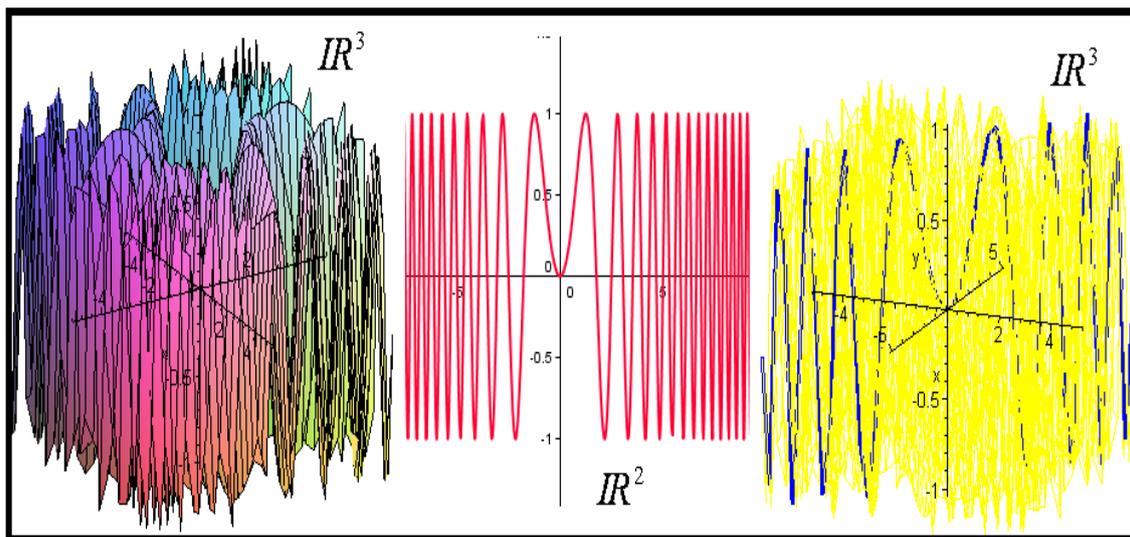


Figura 10: Relações conceituais entre gráficos no plano e no espaço, pertinentes ao processo de integração

De fato, na figura 10, do lado esquerdo, observamos seu gráfico. Ora, no processo de integração envolvendo *integral múltipla*, tomamos a restrição $f(x,x) = \text{sen}(x \cdot x)$ e conseguimos visualizar uma curva (em azul) que indicamos na mesma figura do lado direito. Graças ao caráter de dinamicidade do *software Geogebra*, no meio da figura 10, podemos manipular o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x \cdot x)$ e identificar as regiões abaixo do eixo das ordenadas.

Por fim, a limitação do *software Geogebra* no sentido de trabalhar com representação de funções somente no plano pode ser apoiado pelas funções do *CAS Maple* que pode proporcionar a visualização de objetos do espaço tridimensional. Com efeito, a representação da função $f(x) = x^2$ com o *Geogebra*, pode gerar outras representações nos planos xOz e yOz . Na figura 11, os gráficos e o plano (na cor cinza) proporcionam uma noção de profundidade e a projeção em cada plano.

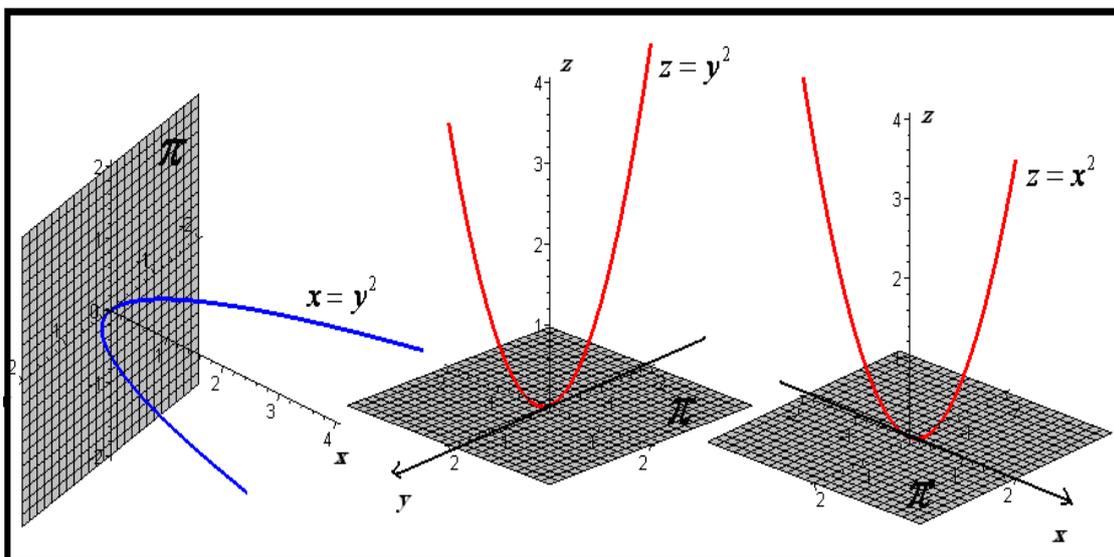


Figura 11: Possibilidades de descrição da taxa de variação segundo os planos xOy , xOz e yOz .

No caso do CUV, os estudantes têm contato com a notação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ que descreve a taxa de variação correspondente a uma função $y = f(x)$, todavia, a transição para os outros planos, neste caso, é natural, e podemos apoiar o raciocínio nas imagens geradas acima com o *CAS Maple*. Na figura 11, podemos descrever as seguintes taxas de variação $\frac{\Delta x}{\Delta y}$,

$\frac{\Delta z}{\Delta y}$ e $\frac{\Delta z}{\Delta x}$. A partir deste cenário de aprendizagem, o aprendiz compreende o processo matemático natural envolve o cálculo da taxa de variação na direção de qualquer um dos eixos do sistema de coordenadas.

Para concluir, destacamos ainda a seguinte propriedade $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(u)du}{u} = \frac{\pi}{2}$ que pode ser encontrada nos livros de Análise Real (LIMA, 2006). Tal igualdade diz respeito à noção de integral imprópria, definida em Lima (2006, p. 141-142). O viés de nossa discussão torna significativa a atenção especial para a seguinte substituição $u = x \cdot y$, com $x, y > 0$. Daí, escrevemos $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(xy)du}{xy} = \frac{\pi}{2}$. No trabalho de Alves & Borges Neto (2012) encontramos maiores detalhes sobre tal propriedade. Em nosso caso, com base na figura 12, depreendemos as relações de convergência de integral imprópria. No caso da integral $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(u)du}{u} = \frac{\pi}{2}$, compreendemos a convergência, a partir do comportamento da contribuição das regiões no plano que tendem, paulatinamente a diminuir. No caso do CVV, com o *CAS Maple*, registramos um comportamento semelhante, só que, neste caso, visualizamos regiões de volume no espaço IR^3 que manifestam comportamento semelhante ao plano. Alves (2012f) discute esta situação de maneira mais pormenorizada no âmbito da transição interna.

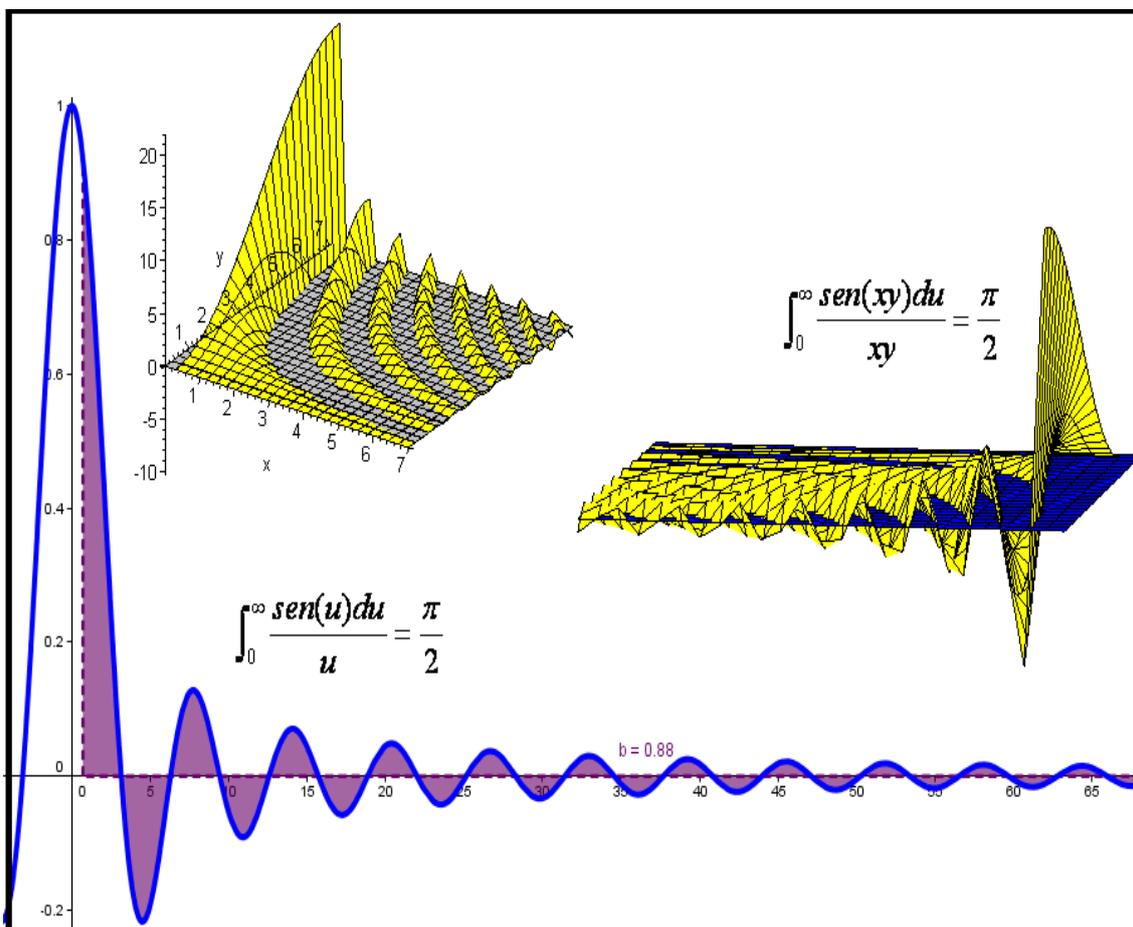


Figura 12: Interpretação da noção de convergência para integrais impróprias segundo Alves (2012e)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Evidenciamos uma perspectiva de exploração didática envolvendo as possibilidades de complementaridade com vistas ao apoio e o entendimento, proporcionado pelos *softwares Geogebra* e o *CAS Maple*. O uso e a exploração didática proporcionam, em determinadas situações, a identificação e descrição do caráter limitado de um *software* que pode, na condição do interesse e do conhecimento matemático e didático do professor, ser suprido por outro *software* adequado (ALVES, 2012b).

Os casos que discutimos evidenciam o papel do *Geogebra* no sentido de proporcionar a compreensão de determinadas propriedades, de modo particular, restritas ao espaço IR^2 . Por outro lado, por estar fundamentado em Análise no IR^n , o CVV apresenta, em vários casos, a generalização de objetos matemáticos que adquirem maior complexidade, tanto simbólica (ALVES, 2011) como também de natureza conceitual.

Descrevemos situações, nas quais, as limitações do *software Geogebra*, podem ser contornadas com o *CAS Maple*. Outrossim, categorias de problemas *standard* no CVV, que exigem uma percepção diferenciada do observador e solucionador de problemas, podem ser exploradas, segundo certos casos particulares, como o *Geogebra*.

No seu contexto de ensino, há décadas conhecemos os problemas e entraves (ARTIGUE, 1995) no ensino desses conteúdos. Possivelmente, um destes entraves, refere-se ao rompimento do predomínio do “pensamento algébrico” (ARTIGUE, 1995, p. 107). Neste caso, as situações de mediação, afetadas aqui pela tecnologia, podem proporcionar tal rompimento.

O papel do computador deste modo e, de modo específico, dos *softwares* que discutimos, pode impulsionar, por parte dos aprendizes, a “articulação de registros” (ARTIGUE, 1995, p. 110), com relação aos inúmeros conceitos do CUV e do CVV.

Por fim, sublinhamos que, ao decorrer da *transição interna* (ALVES, 2011) do CUV para o CVV, nas figuras discutidas neste escrito, proporcionamos ao observador a possibilidade de realizar um *link* conceitual envolvendo, em alguns casos, dezenas de definições e teoremas e que, do ponto de vista do tempo de estudo no *locus* acadêmico, demandam um período de seis meses, característico de nosso sistema de ensino. Por outro lado, nas situações que estruturamos com o apoio da tecnologia, em fração de segundos (ALVES, 2012d; 2012e; 2012f), o aluno poderá depreender a relação conceitual pertinente aos dois conteúdos.

REFERÊNCIAS

- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio; Machado, Rosélia, C. C. (2007). Uma sequência de Ensino para a aquisição do conceito de derivada parcial, direcional e teoremas correlatos no Cálculo em Várias Variáveis, In: *Conexões, Ciência e Tecnologia*, v. 1, n. 1, 29-34. Disponível em: <http://revistaconexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/issue/archive>.
- Alves, F. Regis. V.& Borges Neto. H. (2008). Aplicação da Sequência Fedathi na aquisição do processo de Integral Tripla com o auxílio do Maple. In: *XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Acessível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/trabalhos_comissao_cientifica.php
- Alves, Francisco. R. V. (2011). Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011a). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa*. v. 13-3, 597-626, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive>. Acesso em: 25 dez. 2011.
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011b). Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 1-12. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem
- Alves, Francisco Regis; Borges Neto, H. & Alves Dias. M.. (2012). Implicações e aplicações da teoria das representações semióticas no ensino do Cálculo. In: *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. v. 5, Disponível em: <http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM>
- Alves, Francisco. R. V. (2012a). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. In: *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1, CLXV-CLXXIX, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index>. Acessado em: 04 de Abril de 2012.
- Alves, Francisco. R. V. (2012b). Exploração didática com o Maple no ensino do Cálculo a Várias Variáveis. In: *Anais do X Conferência Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires*, 1-12. Disponível em: <http://www.soarem.org.ar/XCAREM/programa.htm>
- Alves, Francisco. R. V. (2012c). Uma Engenharia Didática para o ensino do Cálculo – o caso da identificação dos pontos extremantes de uma função. In: *Anais do X Conferência Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires*, 13-24. Disponível em: <http://www.soarem.org.ar/XCAREM/programa.htm>
- Alves, Francisco. R. V. (2012d). Uma sequência de ensino para a aplicação do teste da Hessiana. In: *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Disponível em: <http://sipem-sbem.lematec.net/CD/?page=publications&subpage=gts&language=br>. Acessado em: 04 de novembro de 2012.

- Alves, Francisco. R. V. (2012e). Transição Interna do Cálculo: uma discussão do uso do Geogebra no contexto do Cálculo a Várias Variáveis. Montevidéo: Actas da Conferência Latinoamericana do Geogebra. 1-10. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php?pagina=trabajos/actas.php>. Acessado em: 10 de novembro de 2012.
- Alves, Francisco. R. V. (2012f). Discussão sobre a noção de integral imprópria com o auxílio do software Geogebra. Montevidéo: Actas da Conferência Latinoamericana do Geogebra. 11-21. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php?pagina=trabajos/actas.php>. Acessado em: 10 de novembro de 2012.
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. Ingar, Kátia, V. (2012). Aplicações da Sequência Fedathi: sobre o ensino dos pontos críticos e de inflexão. VI Colóquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas. Disponível em: <http://irem.pucp.edu.pe/164/iv-coloquio-internacional-sobre-ensenanza-de-las-matematicas>
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2012). Aplicação e exploração da tecnologia no ensino do Cálculo: os softwares Geogebra e o CAS Maple. In: VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática 26, p. 1-12. Disponível em: <http://bienaldematematica.org.br/node/15>. Acessado em 20 de novembro de 2012.
- Artigue, Michèle. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, Michèle ; DOUADY, Régine ; MORENO, Luis & Gomez, Pedro. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamericano, p. 97-140. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf>. Acessado em: 10 de abril de 2012.
- Krantz. Steven. G. & Parks. Harold. R. (2002). *The implicit function theorem*. New York: Hardcover. 149p.