

Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software Geogebra

Methods of integration: a discussion of their teaching with support by software Geogebra

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES¹
MARCOS ANTONIO LOPES²

Resumo

Neste trabalho discutimos algumas técnicas de integração. Tal assunto é tradicionalmente encontrado nos livros de Cálculo Diferencial e Integral. Todavia, o viés predominante nas abordagens dos autores é o de natureza algébrica, com ênfase no raciocínio algorítmico-operacional das atividades propostas. Assim, com arrimo nas potencialidades do software Geogebra trazemos uma discussão de situações específicas de determinação da integral indefinida e da integral definida, com ênfase na interpretação geométrica dos gráficos da função integranda $f(x)$ e de sua família de primitivas correspondentes, descritas por $F(x)+K$ (com $K \in \mathbb{R}$). Nosso objetivo é proporcionar a identificação dos padrões geométricos atinentes a cada método.

Palavras-chave: Métodos de Integração, Geogebra, Ensino.

Abstract

In this work, we discuss techniques of integration. This issue is traditionally found in the books of Differential and Integral Calculus. However, the bias in the approach of the authors is the algebraic nature, with emphasis in the algorithmic and operational reasoning of the activities proposed. So, with retaining the potential of the software Geogebra bring a discussion of specific situations to determine the indefinite and definite integrals, with emphasis on geometric interpretation of the corresponding functions graphs $f(x)$ and its corresponding family of primitives, described by $F(x)+K$ (with $K \in \mathbb{R}$). Our goal is to provide the identification of the geometric patterns pertaining to each method.

Key-words: Methods of integration, Geogebra, Teaching.

1. Introdução

O ensino do Cálculo tem recebido críticas há décadas, pertinentes ao seu caráter excessivamente formalista e predominantemente técnico-manipulatório. Sob a égide deste último caráter, o ensino que compreende as “técnicas de integração”, preserva o caráter indefectível dos rituais de ensino escolar, que habitam os estudantes na

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE- fregis@ifce.edu.br

² Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE - marcos.k28@gmail.com

manipulação/aplicação irrefletida dos conceitos e que tendem a se repetir no ambiente acadêmico.

Neste artigo discutimos o ensino de um tópico *standard* nas disciplinas de Cálculo nos cursos de graduação. O tema envolve o caso do conteúdo conhecido como “técnicas de integração”. Assim, a partir de algumas concepções questionáveis registradas nos livros didáticos, oriundas do contexto escolar e, conseqüentemente, em maior ou em menor escala, que afetam também o ensino na academia, extraímos ensinamentos e possibilidades diferenciadas, com vistas à discussão de algumas das técnicas mais conhecidas, com o auxílio tecnológico.

Neste escrito, a tecnologia pode proporcionar ao estudante a descoberta e a familiarização progressiva com padrões geométricos oriundos dos gráficos das funções integrandas $f(x)$ e de suas respectivas primitivas $F(x)+k$ (com $k \in \mathbb{R}$). Ademais, com a inspeção do comportamento do gráfico, descrevemos um cenário de aprendizagem que permite ao solucionador de problemas a produção de conjecturas, a evolução da intuição, com base em propriedades geométricas e, *a posteriori*, o confronto dos dados, com a aplicação efetiva do método e para a determinação dos limites de validade do mesmo.

Deste modo, apresentamos aqui determinadas situações que detêm o potencial de evitar apenas o tratamento algoritmizado, que exige antes uma capacidade de memorização, em detrimento de um entendimento conceitual envolvido. Neste contexto, o papel do algorítmico é radicalizado e assume o papel hegemônico no ensino da Matemática. O problema que se coloca é que algorítmicos, empregados nas “técnicas de integração”, resolvem problemas. Cabe observar que, segundo Otte (1991, p. 286), todavia, sua fundamentação maior é o da certeza matemática.

Por outro lado, na História da Matemática e, de modo particular, na história da evolução do conceito de integral, figuras emblemáticas como Newton, Leibniz, Barrow, Cavalieri, Fermat, Cauchy, etc, que contribuíram com seus esforços diretamente com a evolução para esta noção, não dispunham em seu tempo, de instrumentos que os possibilitasse a produção de uma descrição do comportamento geométrico de funções e determinados conceitos. Neste sentido, em Hairer & Wanner (2008), registramos inúmeros desenhos e figuras com a preocupação de uma transmissão heurística de suas ideias.

2. Sobre o ensino de Integral e os livros didáticos

Logo em sua introdução, Lima et al (2001, p. 1) descrevem três componentes essenciais básicos no ensino de Matemática, a saber: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Reparemos que, apesar de esta categorização, proposta pelo autor, como aspectos a serem apreciados nos livros didáticos do ensino escolar, tais componentes podem ser passíveis de análise em qualquer nível de ensino, tanto no escolar, bem como, no contexto do ensino acadêmico.

No sentido de demarcar nosso campo de interesse e discussão, consideremos as seguintes tarefas: (i) Mostre que $\frac{1+tg(x)}{1-tg(x)} = \frac{1-2 \cdot sen^2(x)}{\cos^2(x)}$; (ii) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$;

(iii) Mostre que $\int sen^n(x)dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \cdot sen^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int sen^{n-2}(x)dx$, para $n \geq 2$.

Vamos então, discutir e comparar alguns aspectos operacionais exigidos em cada item anterior. Logo de início, um caráter que se destaca diz respeito ao forte apelo algébrico e condicionado por regras, em cada um deles. Mas, de modo específico, no caso do item (i), deparamos uma situação corriqueira do ensino escolar, destacamos que sem o conhecimento da identidade trigonométrica e da substituição $(\cos^2(x) = 1 - sen^2(x))$ operatória adequada, não se consegue êxito na mesma. O caráter da manipulação dos símbolos envolvidos se destaca neste item.

No item (ii), caso o solucionador de problemas não consiga se recordar de determinadas identidades algébricas nominadas de produtos notáveis, dificilmente alcançará êxito nesta tarefa. Neste caso, não conseguimos divisar o principal argumento a ser compreendido e apreendido pelo aprendiz. Se o mesmo diz respeito ao entendimento do comportamento deste limite nas vizinhanças do ponto $x=0$, ou se limita ao emprego de um “artifício” envolvendo um conteúdo do ensino escolar que, na maioria das vezes, produz a resposta, sem, no entanto, atribuir um significado conceitual a mesma. O que pode parecer estranho para o aluno é a evolução de uma falsa concepção, segundo a qual, para todo tipo de limite, podemos nos valer de um método algébrico específico que fornece uma resposta e, como consequência, decreta o final do processo investigativo.

Por fim, apesar de exigir a mesma substituição descrita por $(\cos^2(x) = 1 - sen^2(x))$, que conclusões podemos extrair da tarefa (iii)? Que conhecimento real é agregado ao repertório de saberes do estudante quando resolve e verifica a igualdade em (iii) para valores decrescentes de ‘n’? De que maneira a

aprendizagem de um estudante seria tomada como deficiente, caso o mesmo obtenha êxito na igualdade proposta em (ii) e não manifestasse a mesma performance na expressão $\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x)dx$?

Questionamentos desta natureza nos conduzem a refletir a respeito dos elementos que buscamos proporcionar o entendimento e a evolução de uma aprendizagem. Entretanto, grosso modo, nessas três situações, costumeiramente, exigimos apenas do caráter manipulatório dos conceitos envolvidos.

Neste sentido, urge que nos apoiemos na própria descrição de Lima et al (2001, p. 1) quando explica que a Manipulação possui características

de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado para a Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações, e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes.

Os últimos trechos indicados acima apontam a possibilidade atinente ao fato de que, a “economia de tempo” em determinadas passagens ou trechos de uma verificação, com base na habilidade sublinhada acima, não garante a consciência e compreensão de cada ação (em situação) ou escolha tomada pelo solucionador de problemas.

A análise de Lima et al (2001) compreende, também, algumas coleções de livros escolares que abordam conteúdos de Cálculo. Não obstante, no que se refere a tal intenção didática, os autores acentuam ainda que “na verdade, é bastante difícil escrever sobre o cálculo para alunos do ensino médio pois a todo momento se corre o risco de cair na intuição demasiada ou na excessiva formalização [...]” (LIMA et al, 2001, p. 135).

Chamam-nos atenção, dois elementos colocados em caráter dicotômico por esses autores. De fato, somos concordes com o pensamento expresso no último excerto acima, no que se refere à relevância do equilíbrio entre intuição e o formalismo, todavia, diante do caráter excessivo de um destes componentes, apontamos como mais prejudicial, no contexto do ensino, o excesso de formalismo (e o pensamento estrutural, característico do formalismo (CHOQUET, 1963)), uma vez que, ao lidarmos, de modo consciente, com a intuição, os aprendentes podem experimentar situações semelhantes às que foram

vicenciadas pelos precursores do Cálculo nos momentos de sua gênese. Ademais, nessas ocasiões, não dispunham da certeza matemática como justificativa para suas escolhas.

Mas, não temos aqui a intenção de prolongar a incursão no campo da História da Matemática. Nosso interesse volta-se aos conceitos da *integral indefinida* e da *integral definida*, presentes na discussão de grande parte dos livros de História da Matemática (BELL, 1945; BOYER, 1959; EDWARDS, 1979; KLINE, 1972; HAIRER, E. & WANNER, 2008). Vale observar que a noção de *integral definida* é registrada nos trabalhos de Cavallieri que, em sua obra intitulada *Centuria di varii problemi* (1639) expõe métodos para o cálculo de áreas, com determinada razão (KLINE, 1972, p. 350). Com uma notação moderna e origem nos métodos de Cavallieri, podemos adotar que

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Entretanto, como em outros episódios emblemáticos atinentes aos momentos nascedouros do Cálculo, o trabalho de Cavallieri foi criticado pela falta de rigor, e pelo fato de se apoiar no viés intuitivo.

A extração de propriedades generalizadas a partir do quadro geométrico, com forte apelo heurístico, é registrada por Gonsalez-Velasco (2011, p. 356) quando pontua que Leibniz, a partir das provas com a quadratura de círculos e hipérbolas, extraiu a generalização do que hoje chamamos de integrais do tipo $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx$ são chamadas de transcendentais. Hodiernamente, registramos ainda o expediente de autores que se apóiam no sentido metafórico com vista à explicação do processo de integração.

Com esta intenção, Lima (2010, p. 322) acentua que “a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ chama-se *integral indefinida* de f . O processo de passar de f para F melhora, ou amacia as qualidades da função.”. Para exemplificar, o autor fornece o seguinte exemplo

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}. \quad \text{E tomando}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \text{com} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Lima (2010, p. 322) conclui este exemplo, do capítulo de apresentação do Teorema Fundamental do Cálculo - TFC, fornecendo algumas situações em que, obtendo-se a *integral indefinida*, melhoramos as qualidades da função (ou classe de funções) com que lidamos.

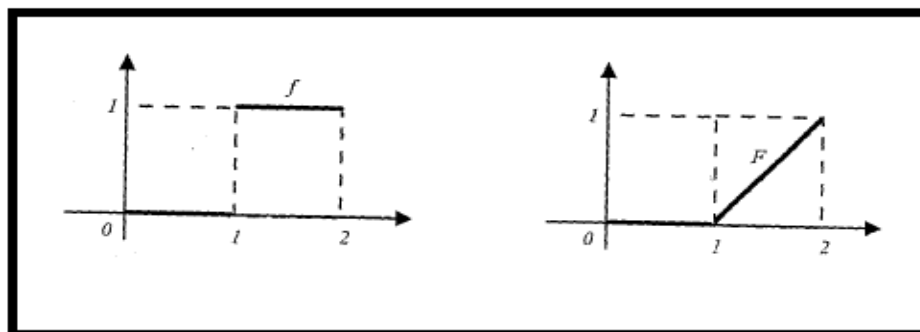


Figura 1: Desenho discutido por Lima (2010, p. 322)

Em qualquer caso discutido, que evidencia do empenho do matemático na investigação de um problema no âmbito do Cálculo, sentimos a relevância do caráter heurístico envolvidos em cada situação, ou seja, do uso de diagramas e figuras no texto.

Na próxima seção, introduziremos a nossa discussão, as possibilidades de exploração didática do *software Geogebra*. Este tem sido empregado e registrado em trabalhos (ALVESa, ALVESb, ALVESc, 2012) desenvolvidos no ensino do Cálculo.

3. Situações envolvendo a noção de integral, discutidas com auxílio computacional

Nos cursos de Cálculo que deparamos no *locus* acadêmico, lidamos, na maioria dos casos, com as seguintes técnicas de integração: método de substituição, integração por partes, integração de funções trigonométricas, substituição trigonométrica, integração de funções racionais por frações parciais, integração de funções algébricas, casos particulares de funções racionais, etc. Vale observar que os autores de livros (AYRES, Franck. & MENDELSSON, 1990; BANACH, 1967; GUIDORIZZI, 1998; LEITHOLD, 1994; STEWART, 2001) consultados aqui dedicam uma seção do livro concernente ao estudo da *integral indefinida*. Vamos, pois, considerar as seguintes

integrais definidas e indefinidas: (i) $\int \cos^4(x)dx$; (ii) $\int \frac{(x^2 + 2x - 1)dx}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$; (iii) $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$; (iv) $\int \frac{\text{sen}(2x)dx}{\sqrt{2 + \cos(x) - \cos^2(x)}}$; (v) $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx$; (vi) $\int e^{\frac{x^2}{2}} (ax^2 + bx + c) dx$.

Na abordagem tradicional que encontramos nos livros didáticos de Cálculo consultados, observamos a resolução analítica dos *integrais indefinidas* destacadas acima. Ademais, adquirimos a impressão que a ideia a ser transmitida para o leitor, é a de que, após a resolução algébrico-manipulatória de uma boa quantidade de integrais como essas, o aprendiz adquirirá uma espécie de *feeling* matemático que o deve conduzir ao reconhecimento e a seleção da técnica de integração conveniente, em cada

caso, com origem em um estádio mental caracterizado pela identificação de padrões estritamente algébricos.

Não obstante, com o auxílio da tecnologia, dispomos da possibilidade de ofertar ao aluno não um cenário melhor de aprendizagem e, sim, maneiras diferenciadas, e não apenas a exploração *standard*, das “técnicas de integração”. Vale recordar que, no que concerne às condições matemáticas, devemos ter uma função $f(x)$ no integrando contínua em toda a reta \mathbb{R} , caso contrário, em determinadas regiões (ou sub-intervalos fechados da reta) contamos com a integral indefinida, enquanto que em outras não.

Mas, no caso (i) $\int \cos^4(x)dx$, a função $f(x) = \cos^4(x)$ é sempre contínua e diferenciável. De modo intuitivo e perceptual, podemos extrair tal ilação a partir de uma observação da figura 1. Nela, evidenciamos o caráter de periodicidade, tanto no gráfico da função do integrando, como no gráfico de sua primitiva $F(x)$. Outrossim, com o recurso de alguns comandos do *software Geogebra*, verificamos que $\forall a \in \mathbb{R}$, se tem $F'(a) = f(a)$ (*). No item (i), se emprega de modo habitual, o método de integração por partes. Os livros didáticos que consultamos descrevem a seguinte caracterização $\int u dv = uv - \int v du$. Neste caso, no que concerne à atividade do solucionador de problemas, o mesmo deve efetuar uma escolha, que não funcione como fator complicador no cálculo da integral (i).

Por fim, encontraremos $\int \cos^4(x)dx = F(x) + k$ que representam a família de primitivas da função integranda. Por outro lado, sem a tecnologia, não se consegue a significação geométrica das funções $F(x) + k$.

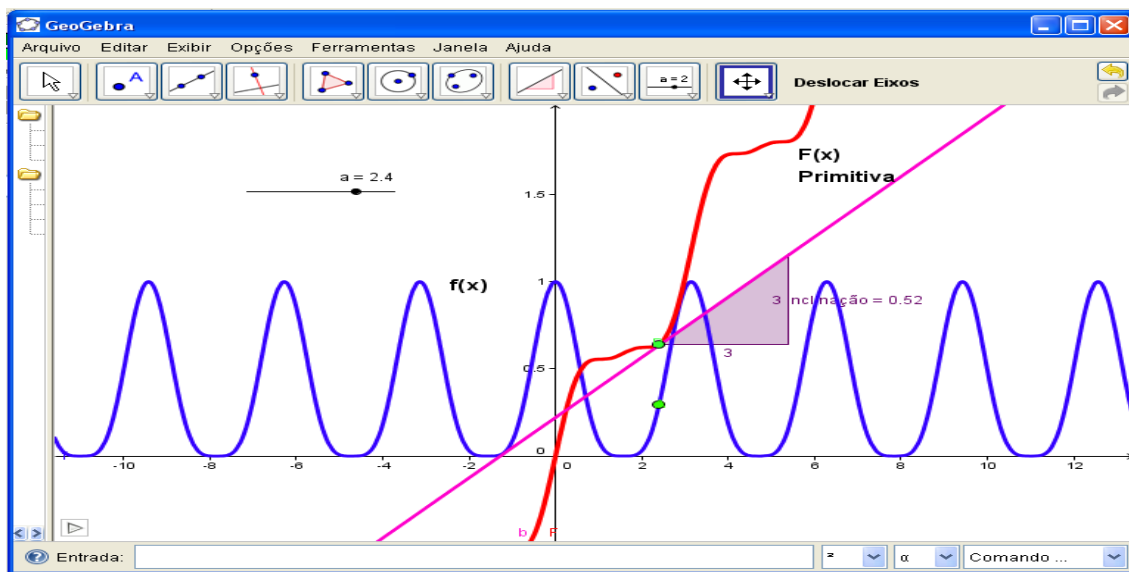


Figura 2: Condições geométricas que permitem expressar a integral

Na figura 2, descrevemos, para o caso (i), o significado geométrico da integral indefinida $\int \cos^4(x)dx$. Neste caso, resulta uma família de funções $(F(x)+K)$, com $K \in \mathbb{R}$. Abaixo percebemos a propriedade fundamental aqui que é a periodicidade.

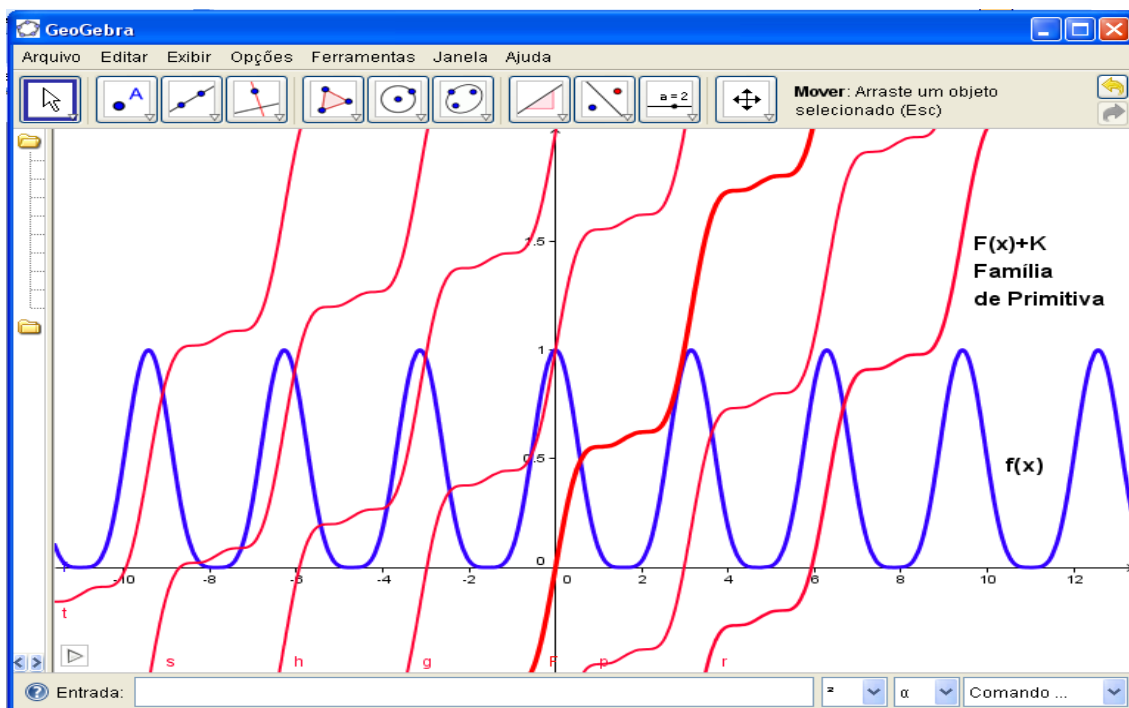


Figura 3: Interpretação geométrica da integral indefinida

No caso (ii) $\int \frac{(x^2 + 2x - 1)dx}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$ lidamos agora com uma função racional imprópria

$f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 1)}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$. O treinamento usual estimulado nos compêndios de livros de

Cálculo é aplicar, de modo adequado, o método de frações parciais. Mas, antes de realizar esse tratamento eminentemente algébrico e fastidioso para o aluno, observamos que o comportamento da função $f(x)$ sugere pontos de descontinuidade.

Na figura 3, divisamos três comportamentos tendenciais assintóticos nas vizinhanças dos pontos $x = -2, 0, \frac{1}{2}$, os quais correspondem exatamente às raízes de

$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$. Diferentemente do caso (i), não percebemos nenhuma periodicidades nos gráficos de $f(x)$ e de sua primitiva

$F(x) + K = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x - 1| - \frac{1}{10} \ln|x + 2| + K$. Outrossim, registramos agora o surgimento de combinações de funções em sua primitiva do tipo “ln”.

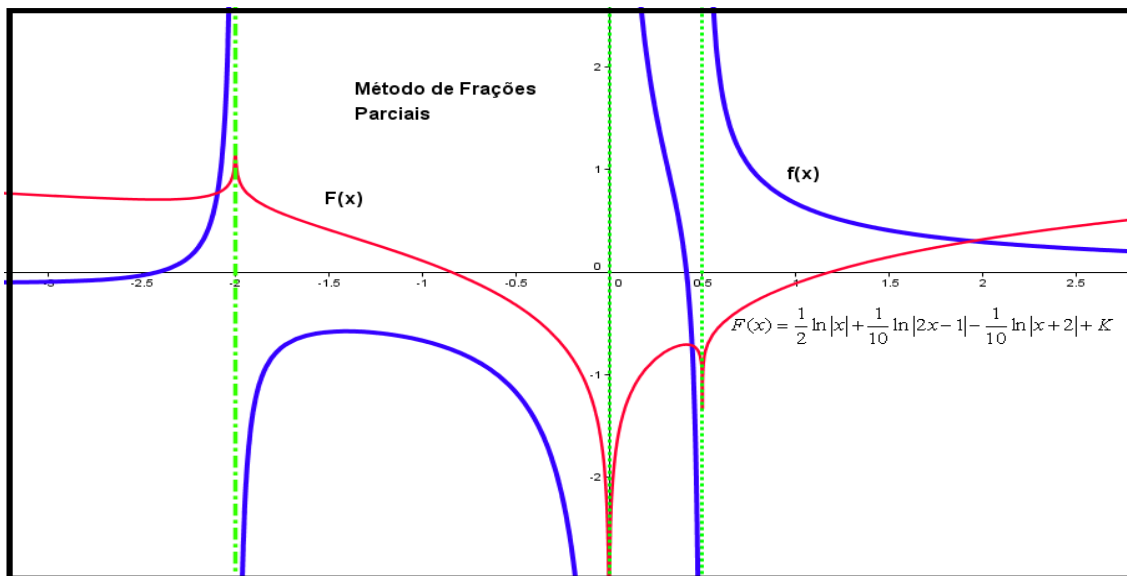


Figura 4: Descrição geométrica de integrais no método de frações parciais

Outro fator que diferencia os comportamentos discutidos nas figuras 1 e 2, com a figura 3, diz respeito ao fato de que não contamos com a relação (*) em toda a reta. Neste sentido, concluímos que os números $\{F'(-2), F'(0), F'(1/2)\}$, bem como os números $\{f(-2), f(0), f(1/2)\}$ não existem. Concluímos neste caso, salientando a presença de assíntotas verticais ao gráfico. Diante disto, o solucionador de problemas necessita adquirir o entendimento quando ao caráter ilimitado da imagem da função $f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 1)}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$, o que compromete o processo de integração em determinados pontos. Ademais, a “noção de assíntota”, geralmente estudado apenas num curso introdutório de Cálculo, pode ser resgatada, revisada e discutida no contexto das “técnicas de integração” que, via de regra, não é explorada pelos autores que consultamos.

No que concerne ao caso (iii) $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$, os autores de livros de Cálculo sugerem o seguinte procedimento $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}$ que envolve o reconhecimento da necessidade de completar os quadrados. Mas vale observar o comportamento geométrico da função $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 8x + 20}$.

O método aqui envolve funções racionais particulares e, sua primitiva será dada

por $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + K$. Com base na figura 4, depreendemos que a integral

indefinida em (iii) está definida em toda a reta. Devido a expressão do denominador $2x^2 + 8x + 20$, não ocorrem assíntotas verticais (apenas assíntotas horizontais) ao gráfico de $f(x)$ e não há periodicidade.

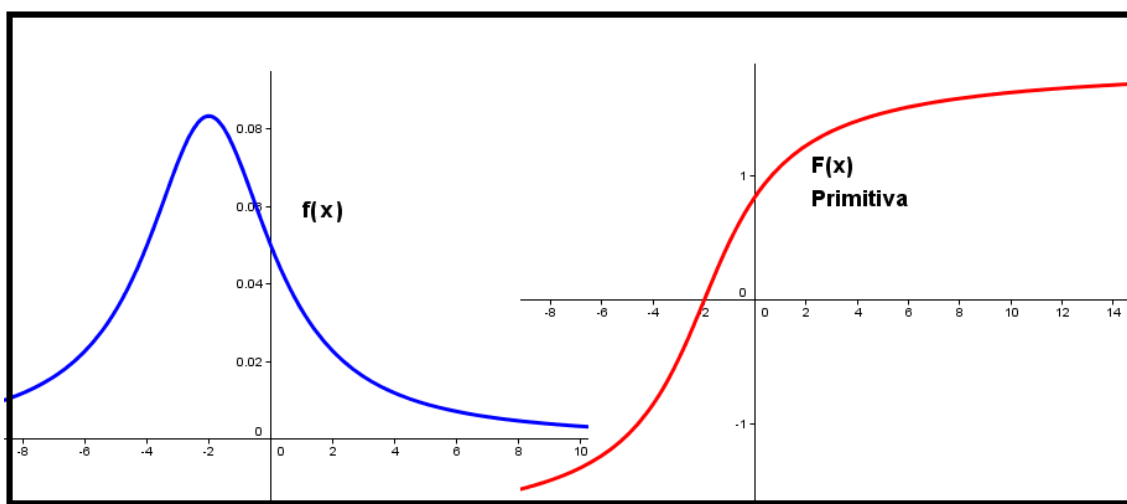


Figura 5: Comportamento geométrico do item (iii)

Vale observar que, por intermédio do *software Geogebra*, podemos realizar a verificação $F'(a) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Assim, para todo o intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

podemos avaliar a integral definida $\int_a^b \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$ como a noção da área.

No caso (iv), podemos obter que

$$\int \frac{\text{sen}(2x)dx}{\sqrt{2 + \cos(x) - \cos^2(x)}} = 2\sqrt{2 + \cos(x) - \cos^2(x)} - \arcsen\left(\frac{2\cos(x) - 1}{3}\right). \quad \text{No que}$$

concerne ao comportamento algébrico da função do integrando $f(x)$ e de sua primitiva $F(x)$, divisamos apenas combinações de funções trigonométricas. Com a inspeção da expressão $\sqrt{2 + \cos(x) - \cos^2(x)}$, identificamos que para valores $x_k = \pi + 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$, teremos uma quantidade infinita de trechos de interrupção no gráfico. Assim, se tentarmos avaliar a integral definida, não podemos considerar intervalos $[a, b]$ que contenham pontos x_k . Este tipo de comportamento é pouco explorado pelos livros consultados de Cálculo.

Vale observar que as retas verticais equivalem ao comportamento de $2 + \cos(x) - \cos^2(x) = 0 \leftrightarrow x = \pi + 2\pi \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Diferentemente do caso (ii), não há assíntotas verticais (nem assíntotas horizontais).

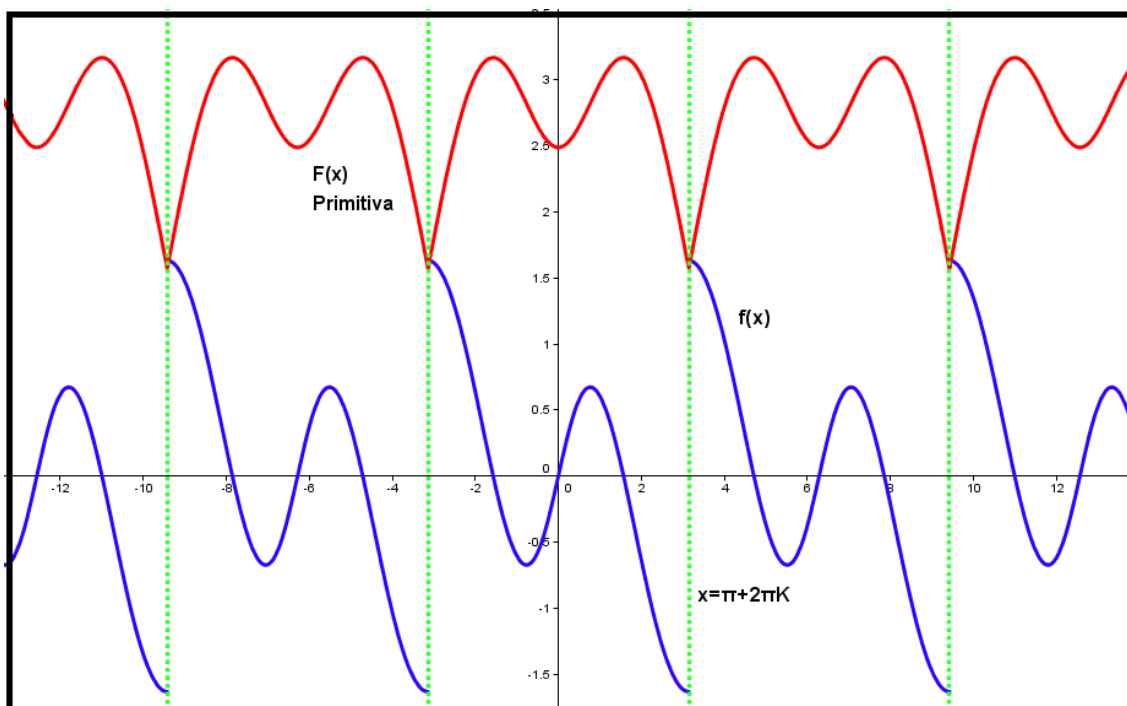


Figura 6: Descrição geométrica da técnica de integração de funções algébricas

Com respeito ao item (v), temos a integral definida $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx$. Este

tipo de técnica de integração envolve que apliquemos o método de substituição trigonométrica. Extraímos o exemplo de Stewart (2001, p. 487). A substituição sugerida pelo autor é descrita por $x = \frac{3}{2} \operatorname{tg}(\theta) \therefore dx = \frac{3}{2} \sec^2(\theta) d\theta$. Na sequência, o autor emprega

mais uma substituição com o intuito de resolver a integral $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx = \frac{3}{16} \int_0^{\pi/3} \frac{(1 - \cos^2(\theta))}{\cos^2(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) d\theta$. Stewart (2001, p. 487-488) usa

ainda $u = \cos(\theta)$ e mudam-se, mais uma vez, os limites de integração da integral definida. Por fim, escreve

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx = \frac{3}{16} \left[\cos(\theta) + \frac{1}{\cos(\theta)} \right]_0^{\pi/3} = \frac{3}{16} \left[\frac{3}{\sqrt{4x^2 + 9}} + \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{3} \right]_0^{3\sqrt{3}/2} = \frac{3}{32} = 0,09$$

Na figura abaixo, exibimos o comportamento geométrico da função integranda e a comparação dos dados numéricos originados com o método analítico descrito por

Stewart (2001, p. 488), juntamente com os dados fornecidos pelo *software Geogebra*. Vale comentar o caráter complexo da descrição dos gráficos abaixo, sobretudo, da primitiva $F(x)$.

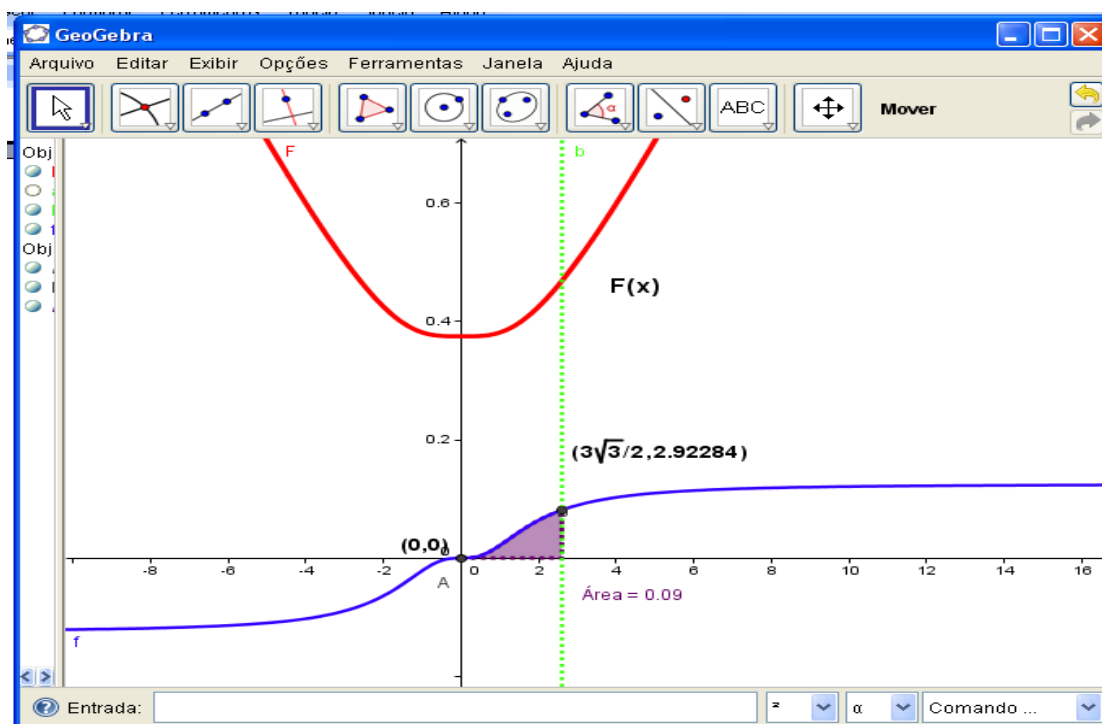


Figura 7: Interpretação geométrica da integral definida

Para concluir esta seção, vamos considerar o ultimo caso (vi) $\int e^{\frac{x^2}{2}} (ax^2 + bx + c) dx$. Neste, não aplicaremos (de modo particular, nenhum dos métodos analíticos discutidos nas situações anteriores. Nos apoiaremos, pois, na percepção de determinadas propriedades invariantes. Com efeito, a partir dos casos (i), (ii), (iii), (iv) e (v) podemos conjecturar que as primitivas das funções que avaliamos a *integral indefinida* preservam alguma propriedade comum.

Com base nesta conjectura, ao tomarmos a integral do item (v), esperamos obter uma primitiva que apresente, em suas combinações de soma e produto, função do tipo e^x . A propriedade invariante aqui diz respeito justamente à propriedade $D_x(e^x) = e^x$. Ademais, pelo fato de existir uma função polinomial, esperamos o surgimento de outra função polinomial, a incógnita aqui diz respeito ao comportamento do grau, se aumentará ou diminuirá, em virtude da aplicação do processo de integral.

Como propriedade fundamental na integração, esperamos que o grau deva aumentar, digamos, grau igual a 3. Assim, assumimos, de modo provisório e preliminar,

uma possível solução do tipo $e^{\frac{x^2}{2}} \cdot f(x)$. Reparemos que tal expressão é candidata a primitiva da função $e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (ax^2 + bx + c)$, assim, por definição, estabelecemos $D_x \left[e^{\frac{x^2}{2}} \cdot f(x) \right] = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (ax^2 + bx + c) \therefore x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot f(x) + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (ax^2 + bx + c)$. Mas agora, se tem: $x \cdot f(x) + f'(x) = (ax^2 + bx + c)$. A partir da comparação das expressões há pouco referidas, deduz-se que o grau da função $f(x)$ não pode aumentar e, sim, diminuir. Neste caso, a única alternativa é que $f(x) = px + q$.

Na figura 7 destacamos em azul o rastro da função do integrando e o rastro em vermelho o comportamento do gráfico da primitiva. Nesta figura, reparamos que $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$, conseguimos determinar a integral definida. Neste ultimo caso, salientamos que pelo fato de não apoiar nosso raciocínio em método ou técnica específica de integração, desenvolvemos uma dedução apoiada na definição formal de integral indefinida e a noção de sua primitiva. A proficuidade neste ultimo caso reside no fato de haver espaço para a produção de conjecturas e possibilidades que exigem ser testadas. Deste modo, lidamos com o advento maior da possibilidade de argumentação.

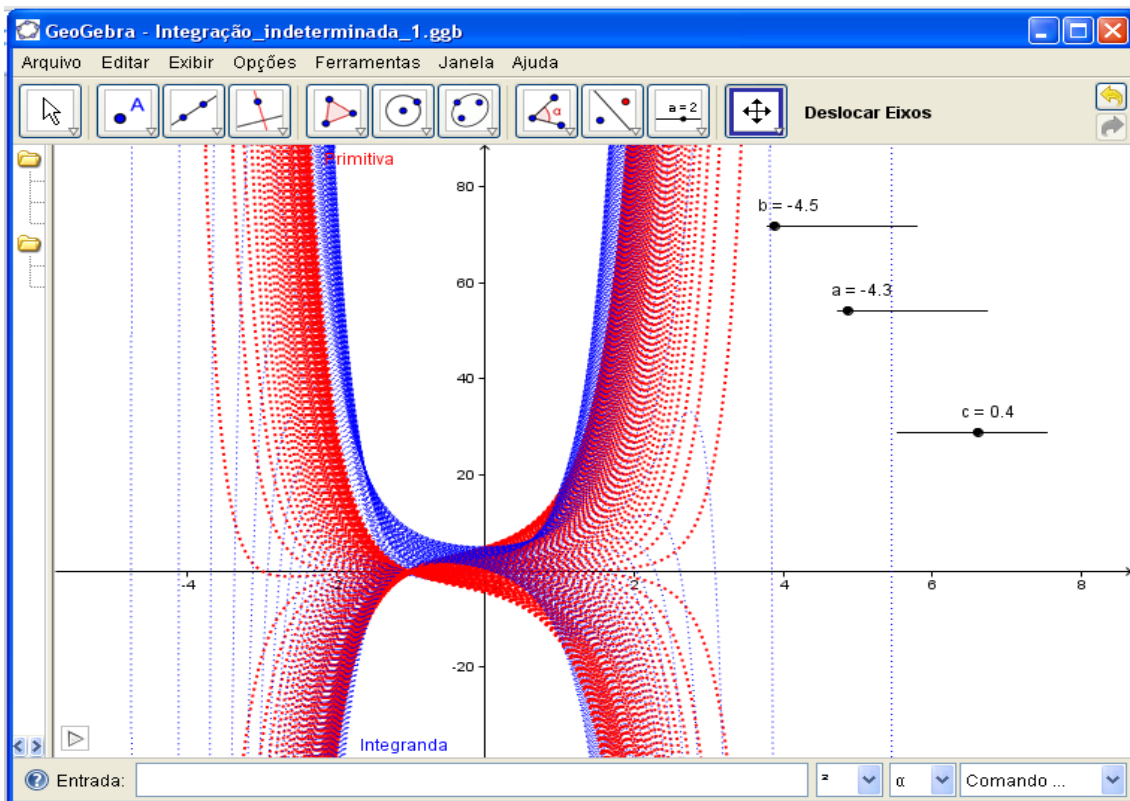


Figura 8: O software proporciona avaliar o comportamento e as condições de integrabilidade da função para todas as variações possíveis dos parâmetros

Para concluir esta seção, apresentamos a tabela 1 que relaciona os aspectos algébricos, tradicionalmente colocados em destaque pelos compêndios de livros consultados. Por outro lado, os aspectos evidenciados na coluna à direita, detêm a possibilidade de conduzir o estudante ao reconhecimento visual e perceptual do tipo de técnica de integração a ser utilizada em situações específicas, com apoio em ideias heurísticas.

Ademais, a exploração da tecnologia pode proporcionar este tipo de categorização, o que evita o desenvolvimento de hábitos algorítmico-computacionais e promove a acuidade visual atinente a conceitos matemáticos específicos. A visualização proporciona o entendimento relativo à possibilidade ou impossibilidade de se calcular a *integral definida* em cada caso, por intermédio do TFC. Por esta via, suavizamos uma abordagem restrita (CAMPOS, 2007, p. 198) deste teorema.

Tabela 1: Descrição comparativa dos aspectos algébricos e geométricos envolvidos no processo dos métodos de integração

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO	Aspectos e Características Algébricos	Aspectos Geométricos
Integração por partes $\int f(x) \cdot g(x) dx$ $\int u dv = uv - \int v du$	A escolha dos fatores u e dv são determinantes para a simplificação e solução da integral	O caráter de continuidade e diferenciabilidade das funções $f(x)$ e $F(x)$ se sobressaem. Não há assíntotas verticais. Em cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sempre existe a integral definida. Há periodicidade no gráfico. Sempre verificamos a condição $F'(a) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ que caracteriza o TFC.
Substituição trigonométrica	Identificação e aplicação de identidades algébricas trigonométricas	Identificamos periodicidade no gráfico nas regiões em que podemos definir a função inversa trigonométrica. Não ocorrem assíntotas verticais. Nem sempre verificamos a condição $F'(a) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Nestas regiões, o método não pode ser empregado.
Integração de funções racionais por frações parciais $\int \frac{(a_n x^n + \dots + a_0) dx}{(b_m x^m + \dots + b_0)}$	Exigem em certos casos a divisão das funções polinomiais e a identificação das raízes da função presente no denominador	As funções são ilimitadas (descontínuas) nos pontos em que ocorrem assíntotas verticais. Existe apenas uma quantidade finita de assíntotas verticais. Nem sempre verificamos a condição $F'(a) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Nestas regiões, o método não pode ser empregado.

<p>Integração de funções algébricas</p> $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$	<p>Identificação de substituições envolvendo expressões com radicais</p>	<p>O gráfico admite uma quantidade infinita de regiões aonde não temos a função integranda definida. Divisamos a periodicidade no gráfico. A integral definida não pode ser avaliada em qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.</p>
--	--	--

Fonte: Elaboração própria dos autores

4. Considerações e recomendações finais

Logo de início deste texto, colocamos em destaque alguns posicionamentos de Lima et al (2001), no que concerne as características e elementos negativos atinentes ao livro didático empregado no contexto escolar. Nossa intenção visou registrar a manutenção de hábitos inapropriados (que enfatizam a manipulação), encontrados no ensino de Matemática, os quais, em muitos casos, têm sua origem na escola, e vêm a se perpetuar, a se cristalizar no *locus* acadêmico. Uma das consequências visíveis, por exemplo, é a concepção de que o ensino visa instrumentar o estudante “na aplicação de determinada regra” (VOLLRATH, 1968, p. 441).

Assim, pontuamos alguns exemplos que exigem (sem o apoio tecnológico), de modo padrão, um raciocínio eminentemente algorítmico-procedural do aprendiz, em detrimento de um conhecimento conceitual (rico em relações e significados). O ensino que prioriza esta primeira forma raciocínio se encaixa na categoria de pensamento que Otte (1991, p. 285) chama de “pensamento algorítmico”. Uma das características marcantes destes é a possibilidade “de conhecer sem a percepção.”. Otte (1991, p. 285) explica ainda que “os algorítmicos estão relacionados apenas funcionalmente com a realidade objetiva; eles não a explicam em nada.”. Outrossim, priorizar a algoritmização constitui uma subversão da ordem natural histórica dos conceitos.

Vale destacar que o relato do matemático e filósofo Michael Otte se coaduna com o que temos discutido até este momento. Assim, na qualidade de professores, precisamos ser cômicos de que o fato de resolver algumas dezenas de casos inseridos num repertório de “técnicas de integração”, não garante e, muito menos assegura que, o entendimento conceitual a respeito das noções de integral definida e integral indefinida.

Deste modo, assumimos uma posição que valoriza um ponto de vista didático concernente a presença de figuras (gráficos) e imagens no texto matemático, que assumem um papel relevante, funcionando como guias para o raciocínio intuitivo, semelhante ao descrito por Freudenthal (1968), apesar de tratarmos, neste artigo, de outro objeto conceitual.

Recordando e parafraseando ainda os posicionamentos de Otte (1991, p. 286), sublinhamos que o algorítmico empregado na resolução de determinada integral resolve um problema particular, todavia, não fornece qualquer *insight* para um entendimento globalizante do mesmo problema. Outrossim, não se fica mais sábio pelo fato de conseguirmos passar de um patamar de 30 para uma quantidade maior, envolvendo 60 integrais indefinidas, resolvidas analiticamente, desprovidas de uma discussão da região ou dos intervalos $[a,b]$, nos quais, obtemos a noção de área. Tal feito não pode ser tomado, por parte do professor, como indicador para a evolução da compreensão.

Para concluir, no contexto didático metodológico, lançamos uma pergunta emblemática sugerida por Otte (1991, p. 287) quando questiona: o que realmente aprendemos com a solução de um problema? Ora, pelo exposto neste artigo, a partir da exploração do *software Geogebra*, descrevemos um cenário de descobertas para o estudante, que envolve a identificação de padrões de natureza geométrica, topológica e, sobretudo, suas ligações com os padrões tradicionalmente exigidos no quadro algébrico. Com base neste ponto de vista, ampliamos o viés restrito das abordagens ordinárias encontradas nos compêndios de Cálculo.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Francisco R. V. (2012a). **Interpretação geométrica para a regra de L'Hospital com o auxílio do Geogebra**. In: *Conferência Latinoamericana de Geogebra*. Montevideu, 1-8. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php>. Acessado em: 18 out. 2012.
- ALVES, Francisco R. V. (2012b). **Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do Geogebra**. In: *Conferência Latinoamericana de Geogebra*, Montevideu. 9-18. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php>. Acessado em: 18 out. 2012.
- ALVES, Francisco R. V. (2012c). **O papel do contraexemplo no ensino do Cálculo: uma discussão com o uso do Geogebra**. In: *Conferência Latinoamericana de Geogebra*. Montevideu, 18-27. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php>. Acessado em: 18 out. 2012.
- AYRES, Franck. & MENDELSSON, Elliott. (1990). **Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential and Integral Calculus**. New York: MacGraw-Hill. 489p.
- BANACH, Stefan. (1967). **Calculo Diferencial e Integral**. Mexico: Union Tipográfica Hispano Americana.
- BELL, E. T. (1945). **The development of Mathematics**. London: McGraw-Hill Book Company. 651p.
- BOYER, Carl. B. (1959). **The concepts of the Calculus: a critical and historical discussion of the derivative and the integral**. New York: Columbia University Press, 344p.

- CAMPOS, Ronaldo, P. (2007). **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica** (dissertação de mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 202p.
- CHOQUET, Gustav. (1963). **What is Modern Mathematics**. England: Lamport Gilbert & Co.
- EDWARDS, C. H. (1979). **The Historical Development of Calculus**. New York: Springer Verlag, 362p.
- FREUDENTHAL, Hans. (1968). **Brace and venn diagrams**. *Educational Studies in Mathematics*. nº1, 408-414.
- GONSALEZ-VÉLASCO, Enrique. (2011). **Journey through mathematics: creative episodes in its history**. New York: Springer, 479p.
- GUIDORIZZI, Hamilton. (1958). **Um curso de Cálculo**. v. 1, 3ª edição, São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 576p.
- GUINNESS-GRATTAN, Ivor. (1978). **On the relevance of the History of Mathematics in Mathematics Education**, v. 9, nº 3, 275-285.
- HAIRER, E. & WANNER, G. (2008). **Analysis by Its History**. New York: Springer, 389p.
- KLINE, Morris. (1972). **Mathematical thought from ancient and modern times**. New York: Oxford University Press, 428p.
- LEITHOLD, Louis. (1994). **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Editora Harbra, 770p.
- LIMA, Elon, L. (2001). **Exame de textos: análise de livros de Matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 467p.
- LIMA, Elon. L. (2010). **Análise Real**. v. 1, Rio de Janeiro: SBM, 148p.
- OTTE, Michael. (1991). **O formal, o social e o subjetivo**. São Paulo: UNESP Editora, 322p.
- STEWART, James. (2001). **Cálculo**. v. 1, São Paulo: Pioneira & Thomson Learning, 490p.
- VOLLRATH, Hans. J. (1968). **Some algebraic aspects in analysis teaching**. *Educational Studies in Mathematics*. nº1, 440-444.