

Análisis de los métodos constructivos utilizados para obtener homólogas de la circunferencia¹

Análise dos métodos de construção utilizados para obter homólogas da circunferência

GRACIEL CARMEN LOMBARDO²

SILVIA CARONÍA³

ROXANA VERÓNICA OPERUK⁴

Resumen

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación de carácter exploratorio y descriptivo. En él se presentan distintas cuestiones observadas en la implementación de recursos informáticos en instancias del proceso de evaluación en la asignatura Geometría Proyectiva. En particular se muestra la incidencia del uso de GeoGebra en entrevistas clínicas. Se toma a la evaluación como eje principal, durante la instancia de diagnóstico continuo. La implementación de este recurso informático permitió dar cuenta de resultados satisfactorios, tanto por la información recabada del proceso de enseñanza y aprendizaje, como por la posibilidad de hacer una doble mirada: que los alumnos fueron capaces de construir las homólogas de la circunferencia mediante el software y cuál fue el proceso constructivo realizado.

Palabras clave: *GeoGebra, Evaluación, homólogas de la circunferencia*

Resumo

Este trabalho é parte de um projeto de pesquisa, exploratório e descritivo. Ele apresenta vários problemas encontrados na execução dos recursos do computador em níveis do processo de avaliação do curso de Geometria Projetiva. Em particular, apresentasse a incidência de utilização de GeoGebra em entrevista clínica. Avaliação é tomada como o foco principal durante a fase de diagnóstico contínuo. A implementação do recurso de computação permitiu observar resultados satisfatórios, tanto pela informação recolhida no processo de ensino e aprendizagem, bem como a possibilidade de uma visão dupla: que os alunos foram capazes de construir as homólogas da circunferência, utilizando o software, e qual foi o processo da construção realizada.

Palavras chave: *GeoGebra, Avaliação, homólogas da circunferência*

¹ Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) - Facultad de Ciencias Económicas (FCE) – Universidad Nacional de Misiones (UNaM)

² FCEQyN - FCE – gracielaombardo@gmail.com

³ FCEQyN – silvca2@gmail.com

⁴ FCEQyN – roxsoperuk@gmail.com

Introducción

Este trabajo es un avance del Proyecto de Investigación “Análisis de la implementación de herramientas computacionales aplicadas al proceso de evaluación en Matemática”, cuyo objetivo es valorar la aplicación de herramientas computacionales en el proceso de evaluación continua y forma parte de una línea de investigación llevada a cabo por este grupo desde el año 2009: “Uso de la entrevista clínica para la evaluación continua en Geometría Proyectiva” (Caronía, Lombardo, Operuk, 2009) y “Aplicación de herramientas metacognitivas integradas en el proceso de evaluación continua en la Geometría Proyectiva”, (Caronía, Lombardo, Operuk, Abildgaard, 2010-2011). En términos generales, los trabajos mencionados versan sobre el uso de herramientas metacognitivas para llevar a cabo la evaluación en todas sus dimensiones, en distintas promociones de la asignatura, Geometría Proyectiva del Profesorado en Matemática de FCEQyN de la UNaM.

El propósito de este trabajo es exponer las dos miradas que este equipo de investigación realizó a partir de las producciones de los alumnos. La primera es la evaluación de los conocimientos que subyacen en las construcciones, es decir, si evidencian comprensión del tema abordado. La segunda, reflexionar qué tipo de procedimientos y herramientas utilizaron en las construcciones, a saber, si son un mero “reemplazo” de la regla, lápiz y papel, o pusieron en juego estrategias, utilizando herramientas de GeoGebra que no hubieran sido posible concretar con los útiles escolares tradicionales.

1. Enfoque y ámbito de la investigación

Tal como fue señalado previamente, consideramos que no sólo es primordial integrar al alumno como actor fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino también considerar a la evaluación como vía potente que posibilita al docente hacer una retroalimentación de las actividades realizadas en su quehacer. Se considera imprescindible encontrar otros instrumentos evaluativos, que permitan determinar cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes, cuáles están relacionados con la temática a enseñar, cuáles están incorporados en forma significativa en su matriz cognoscitiva, como así también la forma en que se interrelacionan.

Por todo lo mencionado, se sostiene que es a través de la investigación educativa que el profesor puede contar con herramientas que contribuyan al proceso de evaluación y en

definitiva al mejoramiento de las prácticas educativas.

En esta etapa investigativa, dirigimos la mirada hacia la Geometría Proyectiva, materia del 3° año⁵, del Profesorado en Matemática. Apoyados en la teoría de la Asimilación de David Ausubel, y con el objetivo de mejorar la enseñanza en esta asignatura nos propusimos investigar en qué medida el uso de software específico empleado en las defensas de trabajos grupales, en entrevistas clínicas, resultan ser aliados de alumnos y docentes para realizar la evaluación diagnóstica continua de los aprendizajes que operaban los alumnos cursantes

En este trabajo se presenta algunas cuestiones observadas en la implementación de los recursos informáticos en instancias del proceso de evaluación en Matemática, en particular la incidencia del uso de GeoGebra en entrevistas clínicas grupales (evaluación diagnóstica continua).

2. Metodología

El presente trabajo tiene carácter exploratorio y descriptivo, y se enmarca dentro del Paradigma Hermenéutico o interpretativo del campo socio educativo.

Se toma como referencia a una parte de la población del Profesorado en Matemática, de la materia Geometría Proyectiva del 3° año, asignatura dictada en el 2° cuatrimestre del ciclo lectivo 2012. En la cual se establecieron siete grupos de hasta cuatro integrantes y, de los cuales, se consideraron para este estudio tres de los mismos.

Los instrumentos de análisis utilizados fueron los registros provenientes de grabaciones de las entrevistas clínicas grupales, y los archivos donde constan las construcciones realizadas por los educandos -en GeoGebra- que dieron fundamento a sus defensas (evaluación diagnóstica continua).

Para lograr los objetivos propuestos, en esta etapa de la investigación, se implementaron las siguientes acciones:

- Con el planteo de actividades grupales de estudio de temas inéditos, se pretendió que los alumnos, en forma colaborativa, logren la construcción de sus conocimientos.
- Con el diseño de entrevistas clínicas grupales se pretendió establecer la

⁵ Del Plan de Estudios de la Carrera del Profesorado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) de la Universidad Nacional de Misiones. (UNaM). Argentina.

forma en que los alumnos adquieren nuevos conocimientos, como también aquellos que no son incorporados por existir obstáculos de diversa índole.

Es dable señalar que la información recabada a partir de estas instancias, constituyó el medio de reflexión docente para delinear y perfilar la práctica.

3. Marco teórico

El fundamento teórico que sustenta esta estrategia de evaluación, se basa en la corriente epistemológica del Constructivismo, el cual se nutre de las teorías de Piaget, Vigotsky, Ausubel, entre otros. A diferencia de otras corrientes, esta centra su atención en el sujeto cognoscente, quien puede entenderse como un producto de su conocimiento, como consecuencia de lo que extrae del medio desde la interacción social en consonancia con parámetros sociales, y todo el bagaje cognoscitivo interno, el cual es realizado y modificado constantemente en todo instante de su vida.

Para Ausubel la nueva información será potencialmente aprendida y retenida siempre y cuando los conceptos relevantes sean claros y estén disponibles en la estructura cognitiva del individuo. Si los conceptos tienen la virtud de oficiar de nexos para la nueva información, ésta adquirirá significado y pasará a ser un elemento estable y relevante y es así que se produce el aprendizaje significativo. [...] Todo concepto que ha sido incorporado significativamente en la estructura cognitiva es cimiento para el asiento de la nueva información, la que potencialmente tendrá significado para el individuo. Este proceso se producirá en forma sucesiva cada vez que ingrese nueva información, y en la medida que se vaya eslabonando con ideas o conceptos relevantes previos, lo cual implica que al producirse un nuevo aprendizaje significativo, consecuentemente se reestructurará la organización jerárquica conceptual hasta entonces existente... (Lombardo, 2008, pp. 39-40)

3.1. Evaluación

En cuanto a la evaluación, se puede identificar una configuración en fases o etapas, siendo la primera de diagnóstico inicial, cuyo objetivo es establecer y reconocer los saberes que han incorporado los alumnos en años previos; la siguiente, de diagnóstico continuo, tiene la finalidad de recabar información sobre los conocimientos adquiridos en esa etapa, a efectos de delinear la propuesta de enseñanza, como también, establecer criterios tendientes a examinar los resultados de aprendizajes; y finalmente la fase de acreditación, donde se centra la atención en la verificación de resultados para certificar y legitimar sus conocimientos. Palou de Maté (2003).

A partir de los diagnósticos, que elabore el docente, al inicio y durante el transcurso del ciclo lectivo, podrá establecer en forma continua y sincrónica el nivel alcanzado por los alumnos y al mismo tiempo obtener elementos de juicio que le permitirán realizar ajustes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Litwin (2008, p. 166) sostiene: “A la hora de evaluar los aprendizajes de los estudiantes, el problema se centra en encontrar estrategias de valor que permitan distinguir cabalmente los aprendizajes construidos de los simplemente almacenados. [...] Memorizar datos, hechos o conceptos no es desdeñable ni carece de importancia; por lo contrario, para pensar se utilizan hechos y conceptos que se recuperan a partir de la información almacenada. [...] En definitiva, son puentes necesarios para pensar. La evaluación debe distinguir estos puentes de los procesos comprensivos. Esto permite juzgar los resultados de la enseñanza y también valorar la tarea comprendida; se trata de procesos de análisis en los que podemos diferenciar los conceptos almacenados de las operaciones cognitivas reflexivas.”

De acuerdo con Carlino (2007, p.107), la evaluación, en este sentido, representa un medio potente en el que se produce la retroalimentación del aprendizaje y de la enseñanza. En efecto, lo producido por el alumno en instancias evaluativas confiere información al docente la cual puede ser devuelta al alumno, a fin de reorientar su desempeño, como así también le proporciona argumentos para repensar su práctica pedagógica posterior. Además, *“la función tácita de toda evaluación: señalar a los alumnos qué es importante en una materia”*.

3.2. Entrevista clínica

La entrevista clínica tiene sus antecedentes en trabajos de psicoanálisis realizados en el siglo XIX, posteriormente fue perfeccionada por Jean Piaget en la década de los veinte del siglo pasado. Mediante su uso, Piaget evaluaba la capacidad cognitiva de los niños y adolescentes. *“La teoría de Piaget, junto con los métodos de entrevistas asociados a ella para registrar datos sobre cómo razonan los niños, condujo a la identificación de cuatro estadios de desarrollo...”* (Novak y Gowin, 1988, p. 146). Posteriormente, Joseph D. Novak, las utilizó con los fines de determinar los conocimientos previos de los alumnos y la evolución producida durante el proceso de instrucción. Esta evolución está referida al concepto de aprendizaje significativo introducido por David Ausubel.

Las entrevistas clínicas son herramientas potentes de gran utilidad en la investigación educativa. Su aplicación permite determinar no solo las estructuras cognoscitivas de los educandos, sino también preconceptos y concepciones erróneas que puedan poseer y de

muy difícil desarraigo.

De acuerdo con Chrobak (1998), se deben determinar los conceptos centrales que están en relación con los contenidos a enseñar, los cuales están asentados en la memoria a largo plazo de forma singular en cada individuo. Según la Teoría de la Asimilación, estos conceptos son cimiento del nuevo material y funcionan como elementos de anclaje para la nueva información, la cual se eslabonará a la ya existente.

Para la aplicación de estas herramientas metacognitivas, se recomienda su planificación, es decir, diseñar con antelación las preguntas a formular, prever el lugar y momento donde se llevarán a cabo, como también respetar un tiempo de duración que no exceda los 30 minutos. Los resultados obtenidos de los registros en las entrevistas dependerán del grado de flexibilidad de las preguntas realizadas: a mayor nivel de flexibilidad mayor es la posibilidad de determinar los conocimientos y competencias que poseen los alumnos, como así también estrategias de aprendizaje, formas de razonamiento, etc. De acuerdo al momento de la instrucción, en el que sea implementada, servirá para el diagnóstico inicial o para el diagnóstico continuo, lo cual permite al docente evaluar los conocimientos previos, los adquiridos durante el proceso de enseñanza aprendizaje y, además, reflexionar y repensar acerca de su propia práctica docente.

No hay parámetros ideales para la elección del número de integrantes de un grupo. Existen diferentes variables que indican la dimensión más conveniente, verbigracia objetivos propuestos, edades, experiencia en trabajos de esta índole, tipo de material didáctico y/o bibliográfico a utilizar, tiempo disponible para la actividad, entre otras. La diversidad de destrezas, competencias y habilidades generalmente está en proporción directa al número de integrantes, el mayor número de éstos implica destinar mayor tiempo para que cada uno exponga su punto de vista y a su vez conjugarlo con los restantes.

3.3. Teorema de Desargues

“Entre las ideas más importantes debidas a Desargues [...] debe citarse la adición de un punto (denominado “impropio”) común a todas las rectas de un mismo haz de rectas paralelas,...” (Xambó Descamps, 2000, p. 166). De esta forma dos rectas coplanares diferentes siempre son secantes. Además, el conjunto de todos los puntos impropios del plano constituyen la recta impropia del mismo. O también, la recta impropia es el producto de la intersección de todos los planos paralelos no coincidentes.

Otro aporte significativo realizado por Desargues fue la proposición que lleva su nombre,

cuyo enunciado es el siguiente:

“Si dos triángulos de diferentes planos (Figura 1) o de un mismo plano (Figura 2), que tienen sus tres pares de vértices correspondientes en rectas que concurren a un mismo punto, entonces tienen sus tres pares de lados correspondientes en rectas que determinan puntos que están alineados”.

Tanto en la Figura 1 como en la Figura 2, puede apreciarse que los pares de vértices correspondientes (A y A' , B y B' , C y C') están alineados con el punto “ O ”, tal como reza la hipótesis del Teorema. En tanto que se cumple lo expresado en la tesis que las rectas que contienen pares de lados correspondientes (AB y $A'B'$, AC y $A'C'$, BC y $B'B'$) se cortan en puntos que están sobre la misma recta “ e ”.

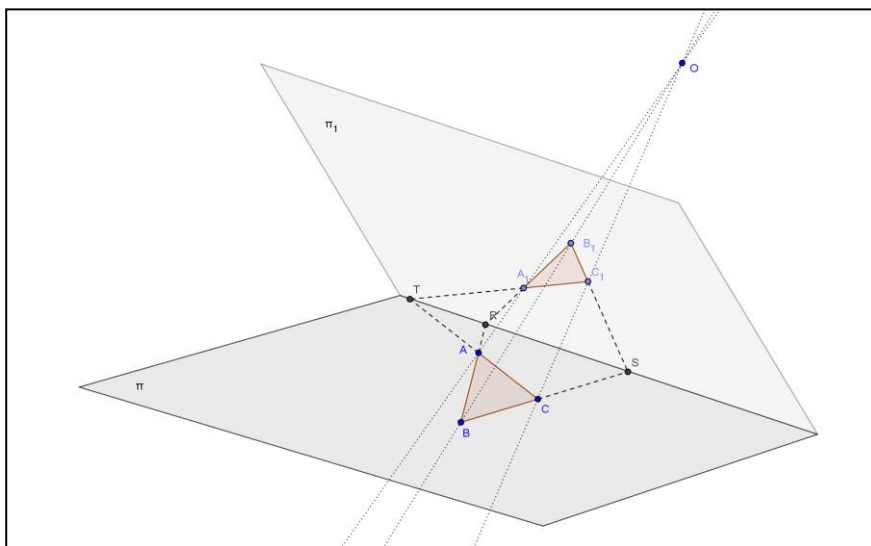


FIGURA 1: Caso de triángulos no coplanares
FUENTE: Elaboración propia

En la Figura 1, se pueden abstraer dos operaciones proyectivas fundamentales, a saber:

1ª operación: proyección, por ejemplo, del punto A desde el punto fijo O , es decir, construcción de la recta OA (denominada proyectante de A desde O).

2ª operación: corte de la recta OA con el plano π' , obteniéndose el punto A' .

La composición de transformaciones, dadas en el marco del Teorema de Desargues, recibe el nombre de “homología”; el punto “ O ” es el centro de homología; la recta “ e ”, el eje de homología y los puntos A y A' se dicen homólogos.

De acuerdo con Pascali (1952), si se proyecta desde O a la recta impropia del plano π , se construye un plano paralelo a π (contiene a O), que al cortarlo con el plano π' , queda

determinada la recta denominada “recta límite” del plano π' .

De manera semejante, si se proyecta desde O a la recta impropia de π' , se determina un plano paralelo a π' (al cual pertenece O), que al cortarlo con π se construye la recta límite del sistema del plano π .

Es así que puede definirse a la recta límite, de un sistema, como la imagen u homóloga de la recta impropia del otro sistema.

A partir del caso en que los triángulos no son coplanares, puede arribarse a la situación en la que los triángulos son coplanares. A saber: se rota el plano π' en torno al eje e, hasta que coincida con π ; y, además, se gira el centro de homología respecto del punto de intersección del plano π con un plano perpendicular π'' que contiene a O. De esta forma resultan coplanares los triángulos ABC y A'B'C', el centro de homología y las rectas límites de ambos sistemas.

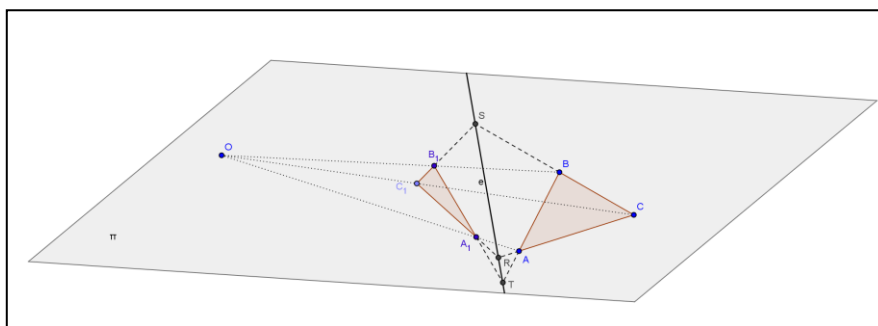


FIGURA 2: Caso de triángulos coplanares

FUENTE: Elaboración propia

A continuación se presentan dos ejemplos a efectos que el lector se familiarice con los métodos constructivos que se exponen en la siguiente sección:

Ejemplo 1: Dados el triángulo ABC, el homólogo A, el centro y el eje de homología. Construir el triángulo A'B'C'. (Figura 3)

Resolución: Para hallar el homólogo del triángulo ABC (Figura 4). se aplican, con el sustento del Teorema de Desargues, las siguientes operaciones:

- Se proyectan los puntos B y C desde O.
- Se cortan las rectas AB, AC y BC con el eje de homología, obteniéndose respectivamente los puntos R, S y T.
- Se proyectan, desde A', los puntos R y S, y se cortan respectivamente con OB y OC, obteniéndose así B' y C'.

- Se construye $A'B'C'$

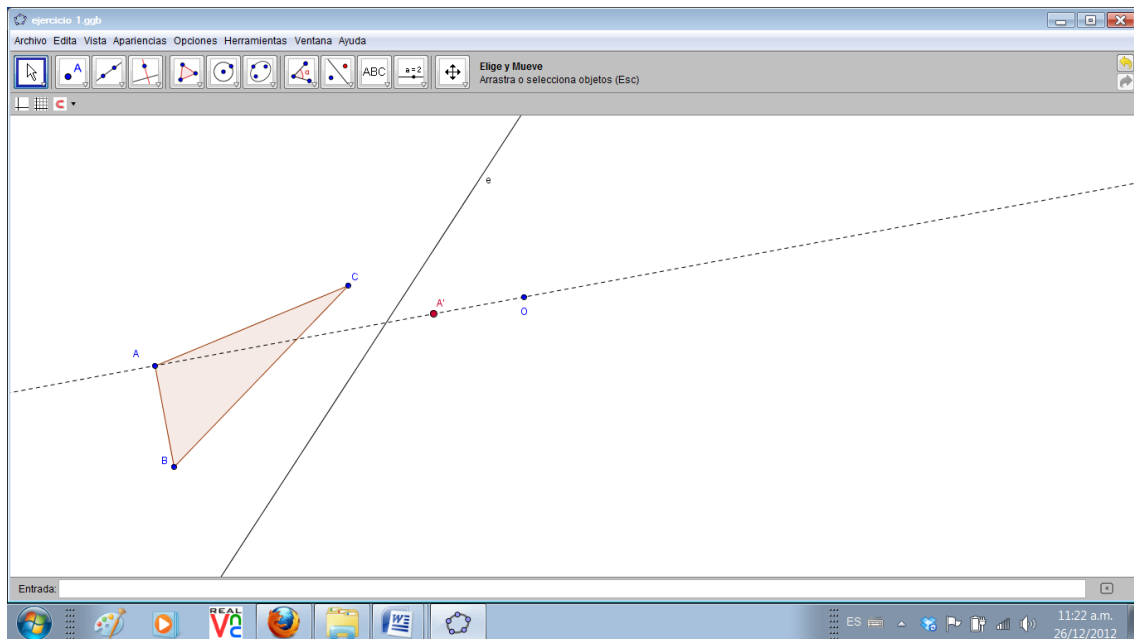


FIGURA 3: Ejemplo 1.Datos.
FUENTE: Elaboración propia.

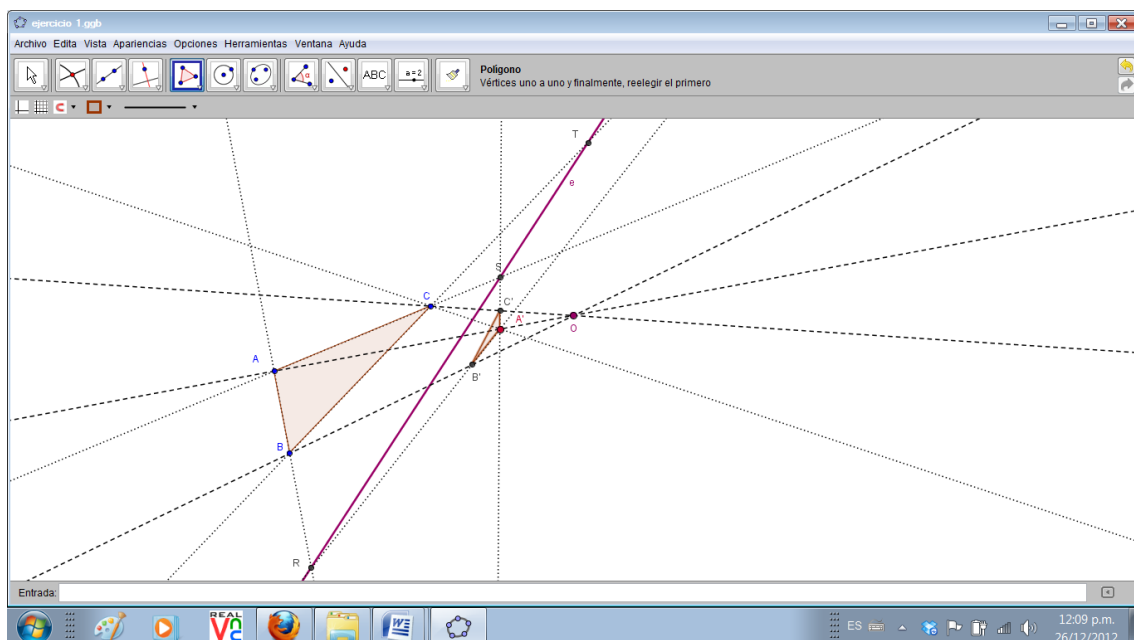


FIGURA 4: Ejemplo 1. Resolución
FUENTE: Elaboración propia

Ejemplo 2: Dados el triángulo ABC, la recta límite del sistema de ABC, el centro y el eje de homología, construir el triángulo $A'B'C'$. (Figura 5)

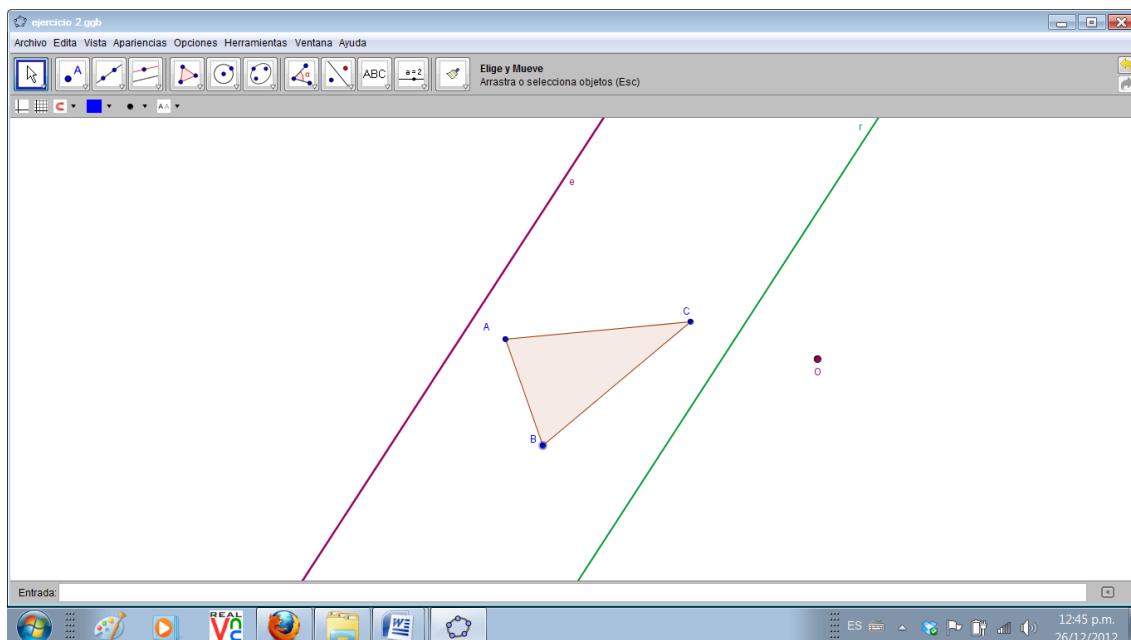


FIGURA 5: Ejemplo 2.Datos.
FUENTE: Elaboración propia.

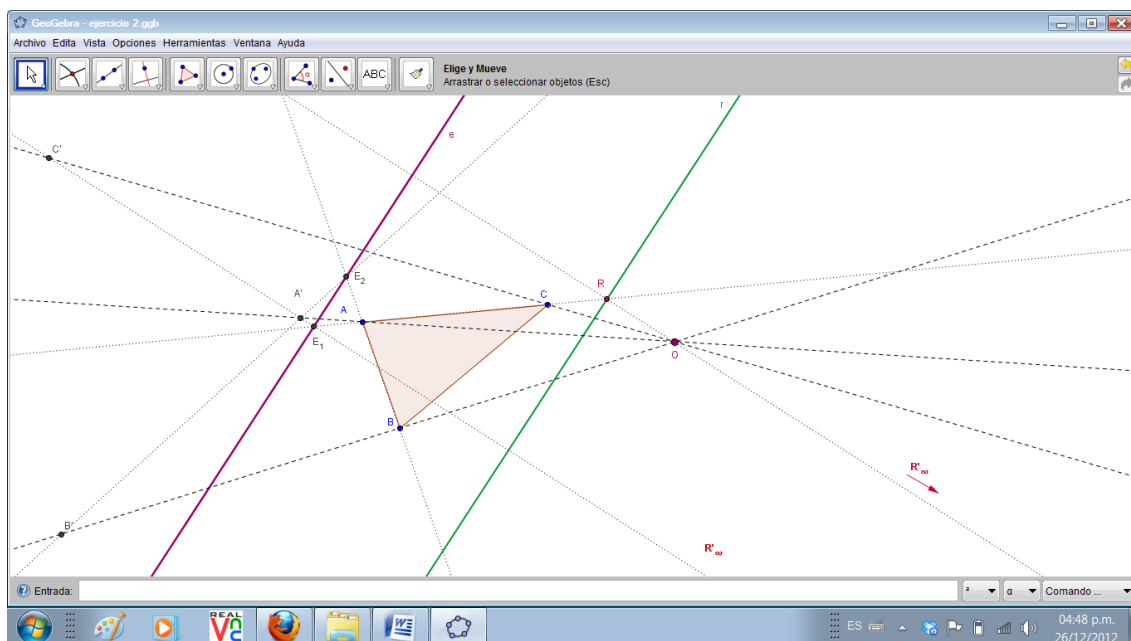


FIGURA 6: Ejemplo 2.Resolución.
FUENTE: Elaboración propia.

Resolución: Para hallar el homólogo del triángulo ABC (Figura 6). se aplican las siguientes operaciones y razonamientos:

- Se cortan las rectas AC y r, obteniéndose el punto R.
- Se proyecta, desde O, al punto R, alineados con el punto impropio R'_∞ (homólogo de R).

- Se corta la recta AC con el eje de homología, definiendo el punto E_1 .
- Como E_1 , A, C y R están alineados, entonces sus respectivas imágenes también lo están; por tanto se proyecta desde E_1 (punto doble) a R'_∞ , y se corta la recta resultante con OA y OC, obteniéndose A' y C' respectivamente.
- Se corta el eje de homología con la recta AB, dando como resultado el punto E_2 .
- Se proyecta E_2 desde A' , y se corta con la recta OB, ubicándose a B' .
- Se construye el triángulo $A'B'C'$.

4. Primeros avances de la investigación

4.1. Descripción de la Implementación

Al inicio del ciclo lectivo 2012 se acordó, con los alumnos, la constitución de equipos reducidos, conformado por cuatro integrantes como máximo. Estos grupos tuvieron la tarea de llevar a cabo trabajos de estudio sobre temas de la Geometría Proyectiva (no desarrollados aún en las clases), para luego, en una fecha acordada, defender sus producciones, dar muestra de un genuino trabajo colaborativo, ya que no solo serían evaluados por el desempeño individual sino por la interacción entre los miembros del equipo.

Los objetivos establecidos para implementar las entrevistas clínicas grupales fueron:

- Lograr que los alumnos aborden temas inéditos como un proceso de construcción del conocimiento.
- Propiciar que los alumnos realicen análisis y discusiones sobre la temática presentada, a través de la negociación de significados en un ambiente de camaradería y cooperación.
- Realizar una evaluación integrada que tenga en cuenta, por un lado los aprendizajes individuales de los alumnos y por otro, el cumplimiento del objetivo del trabajo en equipo como propiciador de los aprendizajes de todos sus integrantes. (Evaluación diagnóstica continua)
- Evaluar cuáles son los conocimientos que ofrecieron dificultad en el aprendizaje, o en los que no se produjo aprendizaje alguno, y determinar una estrategia para revertir esas situaciones, como medio apropiado para evaluar la práctica docente. (Evaluación diagnóstica continua)
- Propender el uso de recursos informáticos como una instancia complementaria para su formación.

Si bien las preguntas se diseñaron con antelación a las entrevistas, se hicieron algunas

modificaciones en función de las respuestas dadas por los alumnos entrevistados, procurando promover en ellos procesos asociativos y/o reflexivos conforme lo ameritaba la situación.

Está previsto que, en el cursado de la asignatura, se realicen en dos oportunidades entrevistas clínicas grupales, pero hasta la fecha de la elaboración del presente artículo, sólo se ha implementado la primera, respecto de la cual se exponen los resultados correspondientes.

Los propósitos que se establecieron para implementar la primera entrevista grupal fueron:

- Comprobar que los alumnos adquirieron el significado de homología en general (y evaluación diagnóstica continua)
- Analizar el grado de conceptualización logrado por los alumnos en torno a las cónicas como homológicas de la circunferencia, métodos constructivos sustentados por la proposición de Desargues. (Evaluación diagnóstica continua)

Las preguntas formuladas, en la oportunidad, se consignan en el Cuadro 1.

Primera entrevista clínica grupal
1) ¿Cuáles son las diferentes posiciones relativas que pueden tener una circunferencia y la recta límite de ese sistema? ¿Cuántos puntos comunes podrán, en cada caso, tener las mismas?
2) ¿Cuáles son los homólogos de los puntos de intersección considerados en cada uno de los casos? ¿Qué inferencias realizaron respecto de estos puntos –los homólogos- en relación a la cónica a la que pertenecen?
3) A partir de conocer la posición relativa de una circunferencia y la recta límite del mismo sistema, ¿cuáles son las cónicas que obtuvieron como homológicas de la circunferencia? ¿Me pueden explicar en cada caso el método constructivo utilizado?

Cuadro 1. Preguntas formuladas en la primera entrevista clínica grupal

Con la formulación de las primeras preguntas, del Cuadro 2, se determinó el nivel de conceptualización alcanzado en torno a los conceptos que subyacen en la proposición de Desargues, tales como eje y centro de homología, puntos homólogos y rectas límites. Esta instancia fue propicia para realizar la evaluación diagnóstica de los aprendizajes de conceptos trabajados en clases anteriores, cimientos para el abordaje de los nuevos temas objetos de estudio que realizaron los jóvenes. Como también se pudo establecer que los educandos disponían, como elementos de anclaje, conceptos tales como posiciones relativas de una circunferencia y una recta (conceptos abordados en

Geometría Métrica⁶). La posesión de estos conceptos no es una cuestión menor, por ser un tema que probablemente tengan que enseñarlo en su futura labor docente.

En tanto, la segunda y tercera pregunta perfilaron la relación existente entre los elementos de la recta límite de un sistema y sus respectivos homólogos en el otro.

Para poder obtener las diferentes variedades fue necesario que los jóvenes realicen precisas construcciones, en GeoGebra, tomando como fundamento a la proposición de Desargues, explícitamente requerido en la última pregunta.

A continuación se muestran algunos ejemplos (tres), los más representativos del total de trabajos realizados (siete), los que permitieron dar cuenta de los aprendizajes operados en cuanto al tema abordado.

En aquellos casos en que los grupos hicieron sus defensas mediante un software de presentación los recursos dispuestos fueron animaciones, efectos de transición y links a construcciones en GeoGebra. Otros grupos emplearon exclusivamente los archivos de GeoGebra en los que constaban las respectivas producciones. En todos los casos utilizaron la herramienta “Barra de navegación por pasos de construcción”, para exhibir los diferentes objetos, transformaciones e instrumentos manipulados en sus producciones.

4.2. Análisis

A continuación se hace un análisis de los métodos constructivos obrados por los grupos, para la elaboración de las diferentes variedades de cónicas, homólogas de la circunferencia. De acuerdo a la posición relativa de la recta límite y la circunferencia, se obtiene un tipo de cónica diferente. En el caso que la recta límite sea exterior se obtiene una elipse; si es tangente, una parábola; si es secante, una hipérbola y si es impropia, se obtiene una circunferencia.

Grupo A: Se puede observar en la Figura 7, que para hallar los homólogos de los puntos A y B, trazaron por dichos puntos la recta r que corta a la recta límite en el punto R. Como R está, por un lado, alineado con su imagen -el punto impropio R'_∞ -, y el centro de homología O, y por otro lado con A, B y la intersección de la recta r con el eje de homología, resulta que éste último punto es colineal con A' , B' y R'_∞ , siendo esta recta paralela a la determinada por O y R.

⁶ Materia del primer año, del plan de estudio de la Carrera.

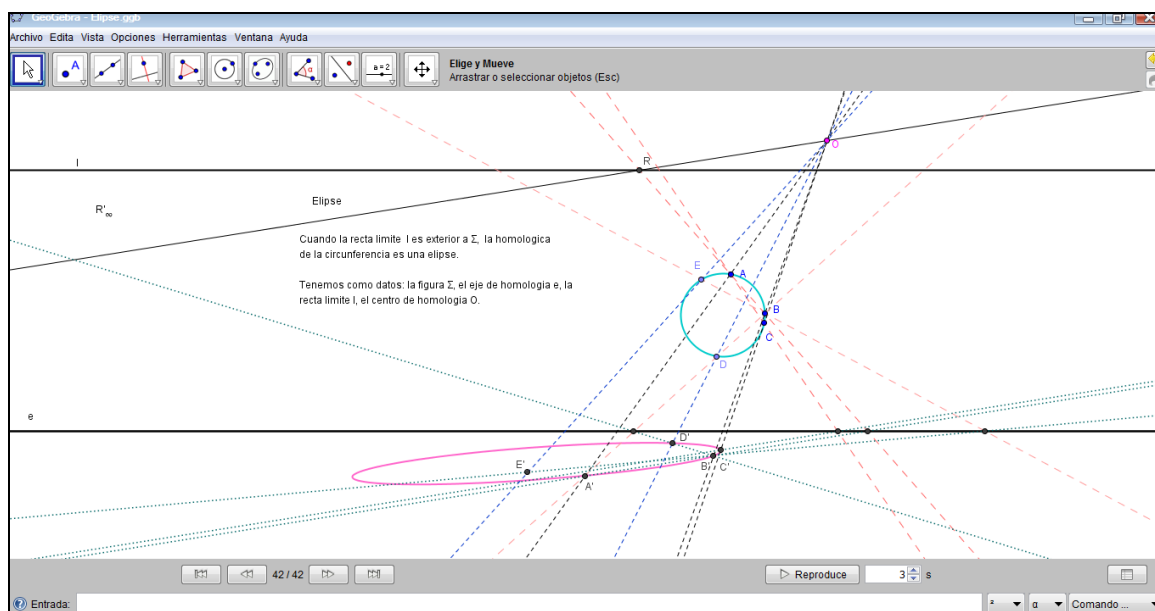


FIGURA 7: Elipse. Grupo A
FUENTE: Elaboración propia.

En el intento de identificar C' , se evidencia que fue erróneamente ubicado, ya que trazaron una paralela a la recta OR desde el punto de intersección de AC con el eje e . La construcción correcta consiste en trazar la recta determinada por los puntos A y C , la cual corta al eje de homología en un punto, que a su vez está alineado con A' y C' .

A partir de allí, hallaron correctamente D' y E' . Para construir la homóloga $A'B'C'D'E'$, utilizaron la herramienta, que ofrece GeoGebra, “Cónica dados cinco de sus puntos”. Es dable aclarar, que en la posibilidad de identificar una cónica a partir de cinco puntos, subyace el teorema de Steiner⁷.

En el caso que la recta límite es tangente a la circunferencia, procedieron a ligar el punto A con el punto T , sin utilizar el punto B como fue explicado en el caso anterior (Figura 8). A partir de ahí obraron análogamente en la obtención de A' .

A diferencia de la construcción anterior, para obtener los homólogos de B , C , D y E , en todos los casos la estrategia utilizada fue idéntica a la usada en la obtención de A .

⁷ Cinco puntos, entre los cuales no hay tres alineados, determinan una cónica y solo una.

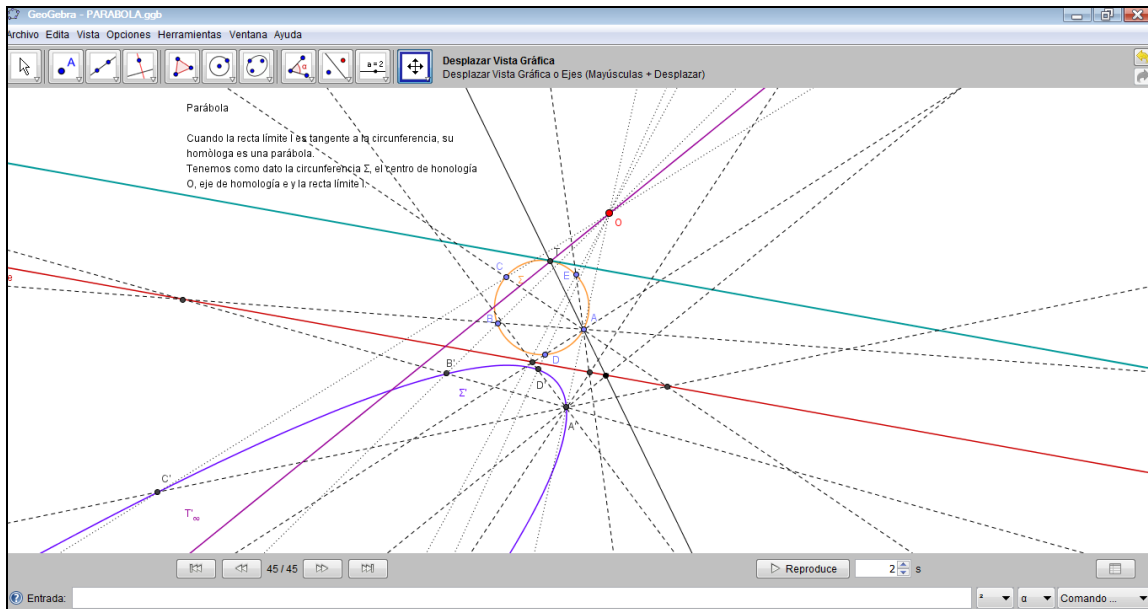


FIGURA 8: Parábola. Grupo A
FUENTE: Elaboración propia.

El método constructivo utilizado para graficar la hipérbola, caso en que la recta límite es secante a la circunferencia (Figura 9), radicó en ligar cada uno de los puntos A, B, C, D y E con el punto R perteneciente a la recta límite. Es así que las cinco rectas determinadas por R y los cinco puntos antes mencionados, cortan al eje de homología en puntos desde los cuales trazaron paralelas a la recta OR, las cuales contienen a R'_{∞} . A partir de allí se prosiguieron, según la proposición de Desargues, con la determinación de A', B', C', D' y E'.

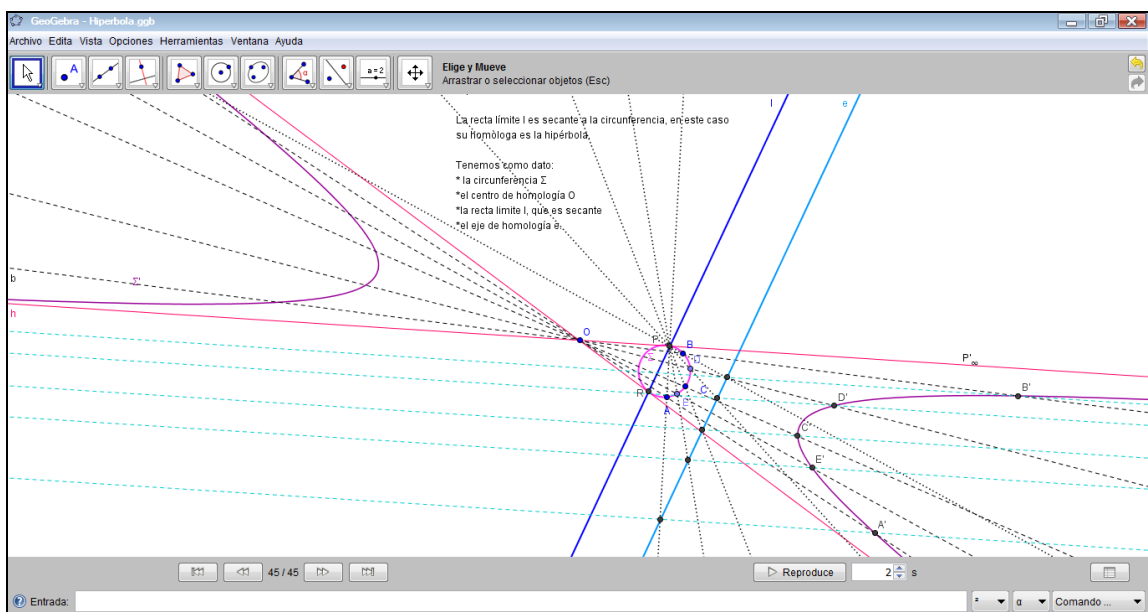


FIGURA 9: Hipérbola. Grupo A
FUENTE: Elaboración propia.

Grupo B: En la Figura 10, se ve que los alumnos construyeron la elipse adoptando un criterio similar al visto en la Figura 7, a diferencia del Grupo A, no incurrieron en error alguno.

Por razones de espacio no se exponen las construcciones de la parábola e hipérbola por las similitudes presentadas con las Figura 8 y Figura 9 respectivamente.

A diferencia del Grupo A, este equipo construyó la homóloga de la circunferencia en el caso que resulte ser otra circunferencia. La inferencia que realizaron fue que, como son figuras semejantes y en caso especial congruentes, la homología que intercede es una homotecia o una traslación respectivamente. En el primer caso, el centro de homología es un punto propio, en tanto que tanto el eje de homología como la recta límite son impropios. La construcción se expone en la Figura 11. En cambio en el segundo caso, que se muestra en la Figura 12, el centro de homología, eje de homología y la recta límite son impropios. En ambos casos se valieron de la propiedad que tres puntos no alineados definen una circunferencia y solo una.

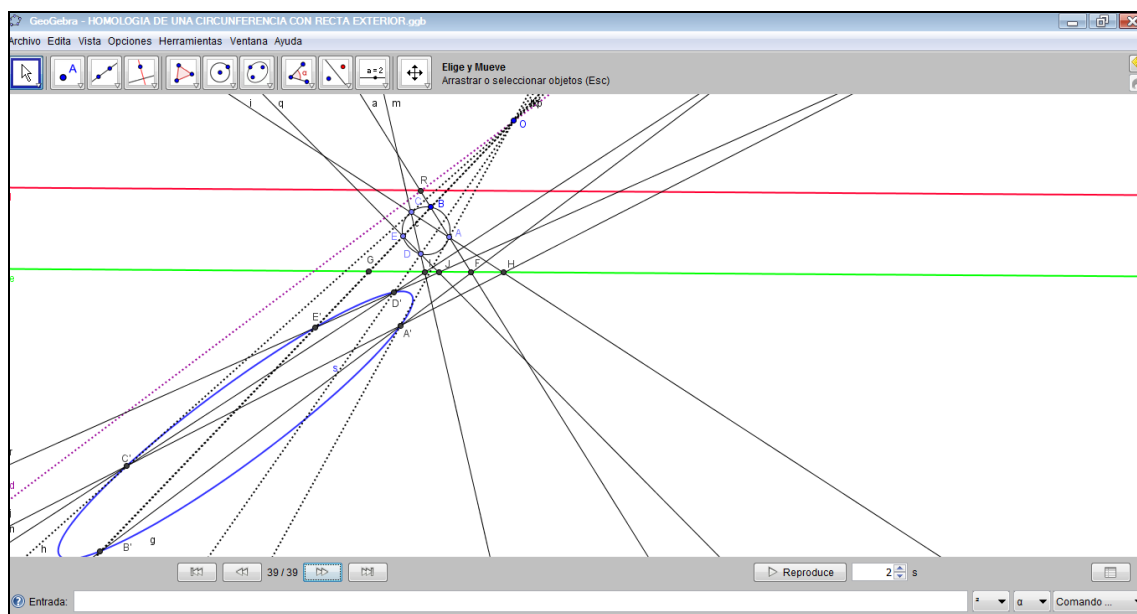


FIGURA 10: Elipse. Grupo B
FUENTE: Elaboración propia.

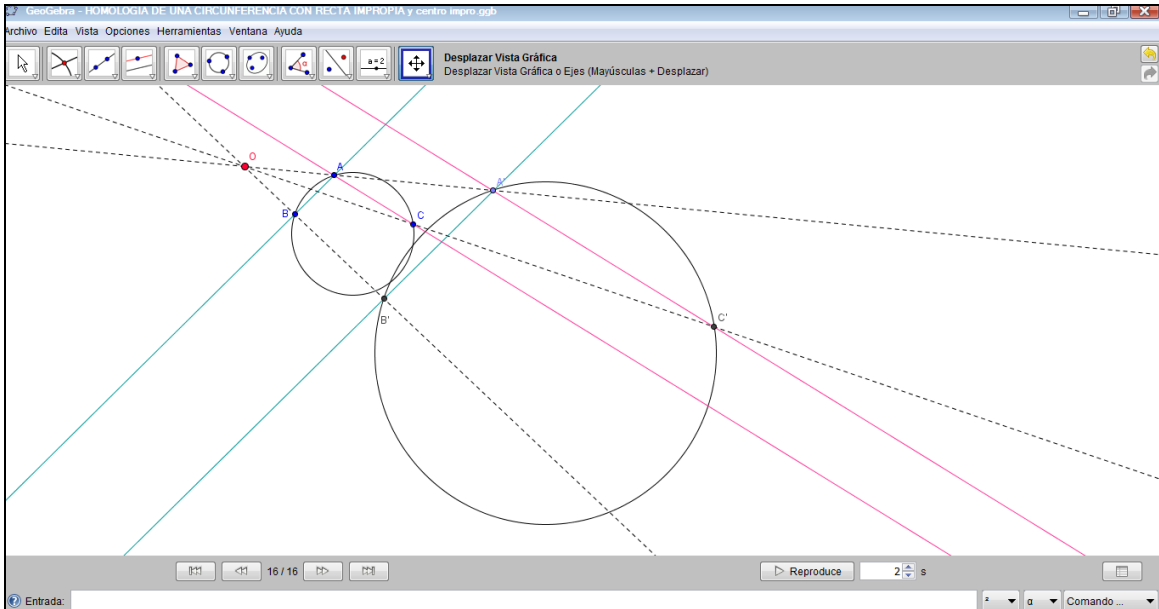


FIGURA 11: Circunferencia: Homotecia. Grupo B
FUENTE: Elaboración propia.

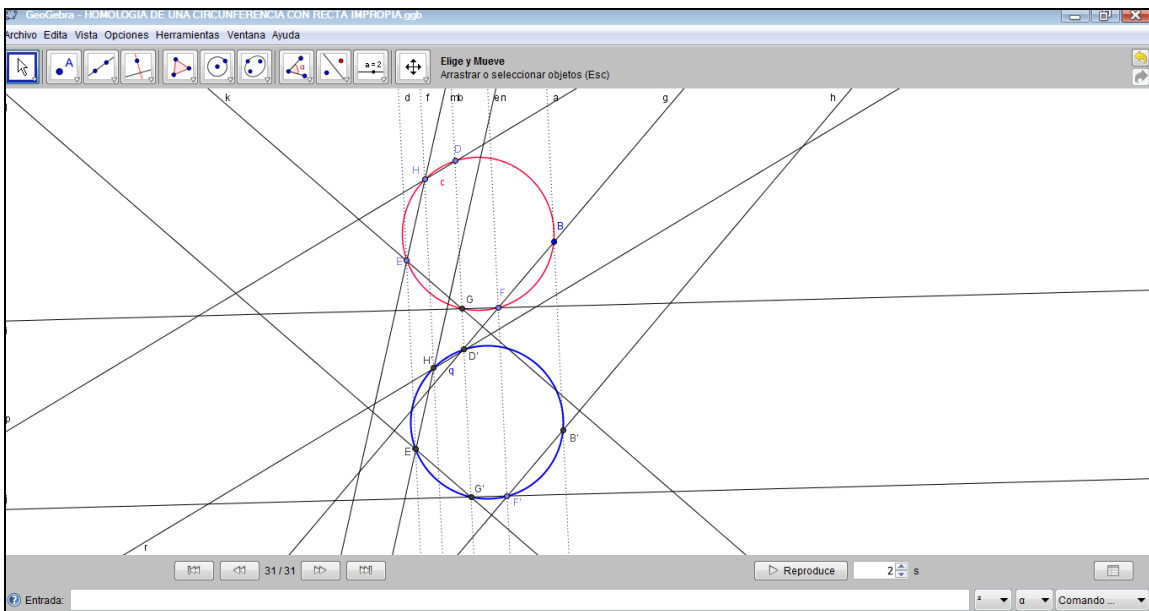


FIGURA 12: Circunferencia: Traslación. Grupo B
FUENTE: Elaboración propia.

Grupo C: A diferencia de los restantes, ubicó un punto F sobre la recta límite, el cual está alineado con el centro de homología y su imagen F'_{∞} . Tomó un punto arbitrario E perteneciente a la circunferencia, y junto con F les permitió trazar la recta que corta al eje de homología en G. La intersección de la recta paralela a OF por G con la recta OE les permitió obtener el punto E_1 , homólogo de E (Figura 13).

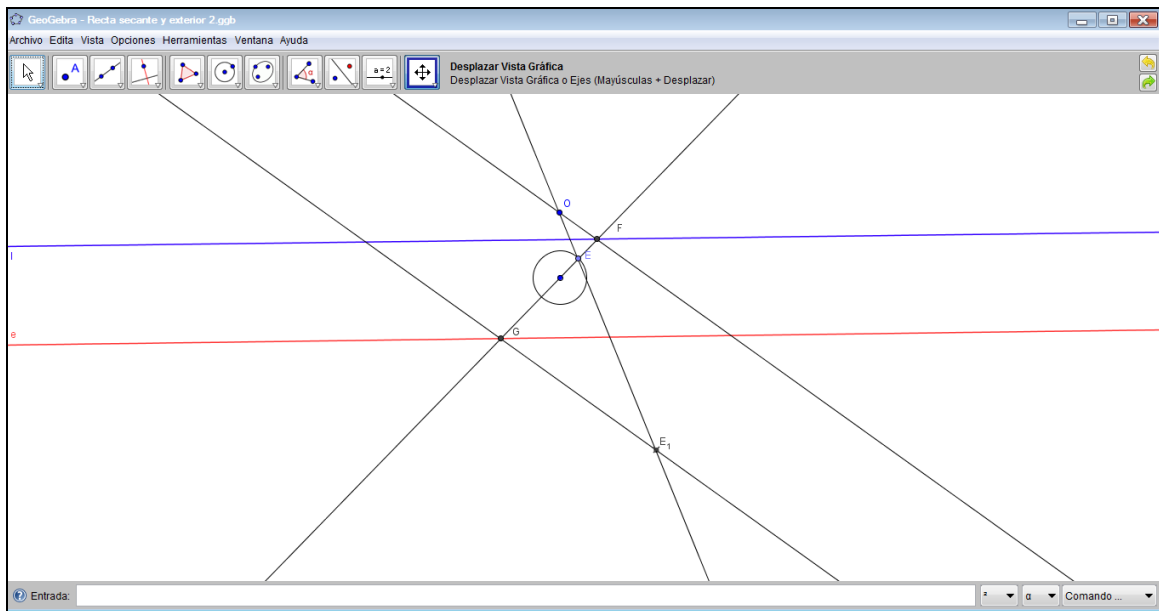


FIGURA 13: Disposición geométrica para construcción de elipse. Grupo C
FUENTE: Elaboración propia.

El activar el rastro del punto E y su posterior deslizamiento sobre la circunferencia, tal como si fuera uno cualquiera de los infinitos puntos situados en ésta, permitió generar las respectivas e infinitas imágenes de los mismos, tal como se puede percibir en la Figura 14.

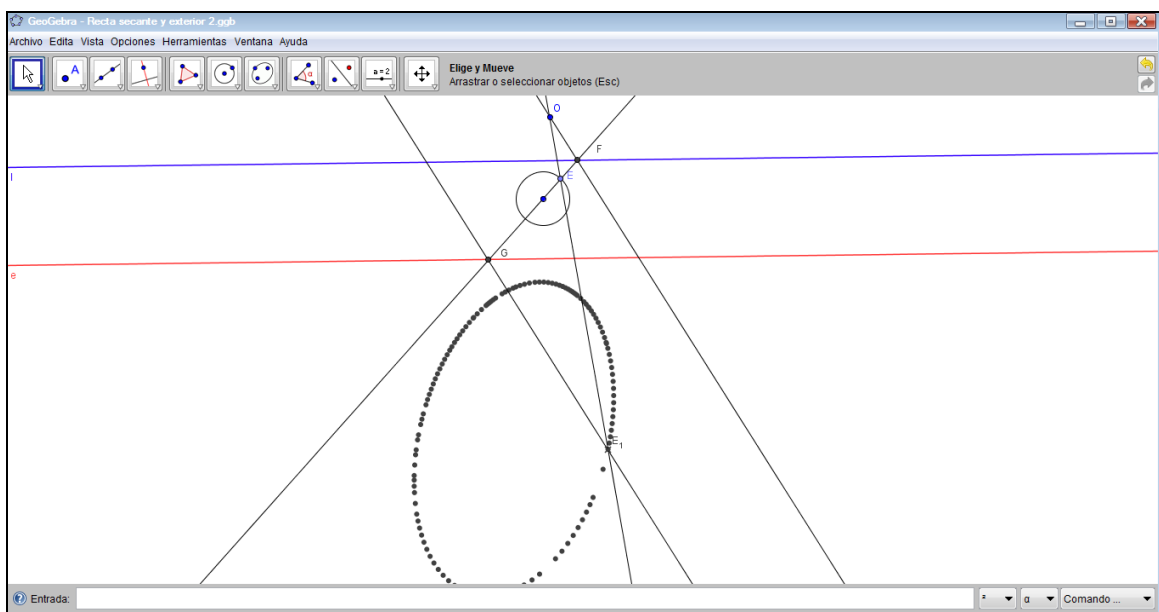


FIGURA 14: Elipse. Grupo C
FUENTE: Elaboración propia.

El procedimiento que utilizaron para la obtención de la parábola (Figura 15) y la

hipérbola (Figura 16), es análogo, a diferencia que en estas dos construcciones la recta límite es respectivamente tangente y secante a la circunferencia.

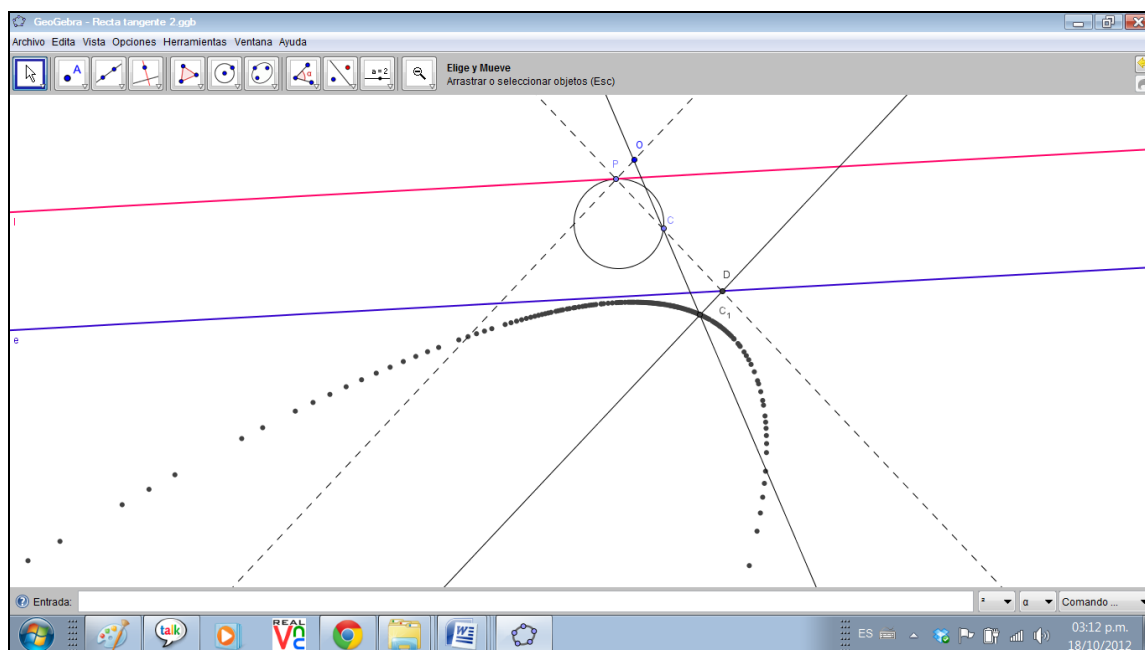


FIGURA 15: Parábola. Grupo C
FUENTE: Elaboración propia.

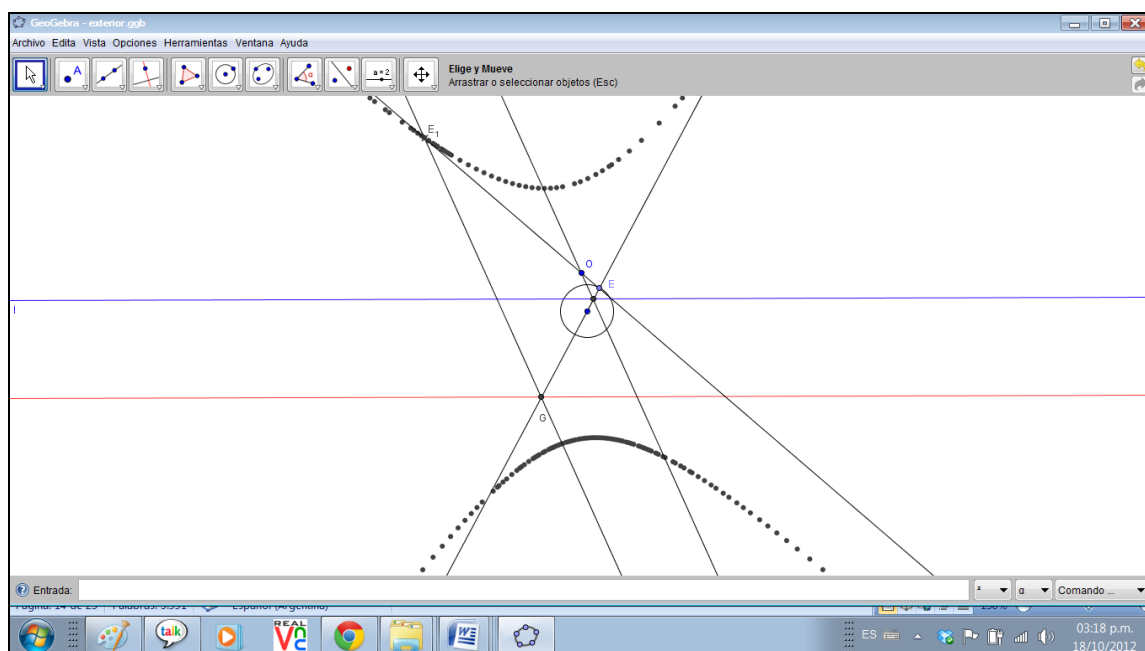


FIGURA 16: Hipérbola. Grupo C
FUENTE: Elaboración propia.

En general, las construcciones fueron realizadas en forma correcta. Durante la instancia de defensa, en la entrevista clínica grupal, recurrieron al “paso a paso” (Barra de navegación por pasos de construcción) para recrearlas, y en algunos casos mostraron el “protocolo de construcción”, lo cual evidenció no solo dominio en su uso, sino también la posibilidad de utilizar el software como medio de evaluación de sus propias acciones.

Se pudo advertir una clara diferencia en la metodología de trabajo empleada por el grupo C, respecto de las recorridas por los grupos A y B. El grupo C utilizó un método constructivo que no hubiera sido factible realizar con los útiles escolares tradicionales.

Se percibió también que, la totalidad de los grupos realizaron una construcción por cada una de las posiciones relativas posibles que puede tener la recta límite y la circunferencia. Circunstancia que sorprendió a la docente dado que GeoGebra ofrece la posibilidad de, a partir de una única construcción, realizar la manipulación de los objetos para dar respuesta a diversas conjeturas.

Razón por la cual se los interrogó al respecto, y en todos los casos respondieron que, durante la etapa de estudio, previo al día de la defensa, “jugaron” (término utilizado por uno de los alumnos) con la recta límite y obtuvieron las diferentes variedades de cónicas. Pero, en particular, una alumna manifestó que *“pensamos que no estaba permitido, y que si utilizáramos ese recurso estaríamos haciendo trampa”*. Ante tales respuestas, se explicó a los alumnos que GeoGebra es un software potente el cual tiene la virtud de conservar las propiedades conferidas a los objetos creados, aún después de modificar su posición.

Asimismo, todos los alumnos usaron un adecuado léxico específico, no incurrieron en errores conceptuales; tuvieron en cuenta las recomendaciones hechas respecto al trabajo en equipo como propiciador de construcción de conocimientos, negociación de significados, aprendizajes y metas de comprensión y, tal como fuera anticipado, reconocieron que estas son instancias adecuadas para concretar aprendizajes complementarios y realizar auto evaluaciones.

Consideraciones finales

Tal como se observa, esta investigación, hasta la fecha muestra que:

La formalización de las entrevistas clínicas grupales se constituyeron en instancias propicias para llevar a cabo la evaluación diagnóstico inicial y continua. Esta herramienta

metacognitiva permitió obtener información eficaz para enmarcar la propuesta de enseñanza, establecer criterios de valoración de los aprendizajes logrados, determinar la existencia de concepciones alternativas a fin de revertirlas y propender a la autoevaluación de los alumnos.

Las actividades grupales, realizadas por los estudiantes, fueron acciones apropiadas para realizar la integración con pares, las cuales permitieron el intercambio de opiniones y puntos de vistas, promovieron el proceso de comprensión y consecuentemente el aprendizaje significativo.

Esta introspección encierra dos intenciones: por una parte la construcción de una actitud crítica con conciencia social que permite observar, analizar y repensar la propia práctica en forma argumentada y por otra, la responsabilidad multiplicadora que induce la compartir experiencias, con los alumnos futuros profesores en Matemática.

Este es un aporte para el estudio y profundización de las herramientas que nos brinda la tecnología aplicada a la educación. Creemos que la reflexión, la discusión de un conocimiento más exhaustivo acerca del uso del software en las resoluciones de situaciones problemáticas, debería ser una cuestión explícitamente considerada en la formación de los docentes.

De acuerdo a este primer análisis comenzamos a vislumbrar resultados satisfactorios en beneficio de sus actores: los alumnos reconocieron a estas instancias como adecuadas para concretar aprendizajes complementarios y realizar auto evaluaciones; y los docentes como medio satisfactorio para continuar con este método de evaluación.

Referencias

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Chrobak, R. (1998). *Metodologías para lograr aprendizaje significativo*. Neuquén: Educo.

Litwin, E. (2008). *El oficio de enseñar: Condiciones y contextos*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Lombardo, G. (2008). *Análisis de la Efectividad de la Aplicación de Herramientas Metacognitivas Integradas en el Proceso de Evaluación Continua en la Geometría Proyectiva*. Tesis de Maestría publicada ISBN 978-950-766-079-5. FI de UNCOMA. Neuquén, Argentina.

Novak, J. y Gowin, D. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Palou de Maté, C. (2003). Evaluar para enseñar y evaluar para acreditar. Palou de Maté (Comp.). *La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua*. Buenos Aires: GEEMA – U.N.Co. Facultad de Cs. de la Educación – C.E.Di.Co.

Pascali J. (1952). *Geometría Proyectiva*. Buenos Aires: Talleres Gráficos Pagani Hnos.

Xambó Descamps, S. (2000). *Geometría*. México: Alfaomega.