

Convergência de Sequências: uma abordagem com o *software*

GeoGebra

Convergence of Sequences: an approach with the *software* GeoGebra

LUCAS CARATO MAZZI ¹

Resumo

O objetivo deste artigo é avaliar o papel desempenhado pelo software GeoGebra quando utilizado em uma atividade de convergência de seqüências cujo objetivo era experimentar uma abordagem para o ensino dessa noção. Entendo a experimentação como o uso de métodos não dedutivos, como por exemplo, utilizar a intuição, a visualização e/ou o raciocínio por analogia. Ao elaborar a atividade, tomou-se como pressuposto o constructo teórico Seres-Humanos-com-Mídias o qual defende que o conhecimento é produzido por um coletivo formado de humanos e não-humanos. A aplicação, fundamentada na metodologia do Experimento de Ensino, foi feita com quatro alunas do curso de Licenciatura em Matemática. Os dados apontaram o dinamismo e a visualização que o software possibilita, tal como aspectos relevantes para a compreensão da noção de convergência de seqüências.

Palavras-chave: *Análise Real; Experimentação; Visualização, GeoGebra.*

Abstract

This paper aims to discuss the role played by the software GeoGebra on an activity which goal was to experiment a teaching approach of the notion of sequence convergence. By experiment, I mean the use of some non-deductive methods, for example, intuition, visualization and/or analogy reasoning. To create that activity, I was based on the theoretical construct Humans-with-Media, which says that knowledge is produced by a collective of humans and non-humans. To apply the activity, I used the Teaching Experiment Methodology and those who participated on this research were four students of a Mathematics undergraduate course. The results pointed that GeoGebra, its dynamism and capacity of visualization was important to build a comprehension about convergence of sequences.

Keywords: *Real Analysis; Experimentation; Visualization, GeoGebra.*

INTRODUÇÃO

A disciplina Análise², comumente oferecida em cursos de Licenciatura em Matemática, é considerada uma disciplina que traz dificuldades de aprendizagem, geradora de grande ansiedade nos alunos, cujo índice de reprovação costuma ser alto (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013). Segundo esses autores, o objeto de estudo dessa

¹ UNICAMP - lucascarato12@gmail.com

² Utilizarei os termos Análise, Análise Matemática e Análise Real como sinônimos, a fim de evitar repetições no decorrer do texto.

disciplina gira em torno dos processos infinitos, em que se tem no centro o conjunto dos números reais. Dentre os conteúdos abordados na Análise, as sequências numéricas geralmente aparecem em seu início, sendo então, um conceito básico para sua aprendizagem.

Nunes (2001, p. 9) afirma que "o estudo de sequências faz parte de um campo essencial nos fundamentos da Análise Matemática, campo que concerne às funções numéricas, limites, aos números reais". Aline Robert (1982, p. 320) defende que "os princípios da Análise não são tão simples para os estudantes, não apenas em razão do caráter não algorítmico das ferramentas postas à sua disposição, mas também da riqueza do conjunto dos reais". Desse modo, é necessário um trabalho cuidadoso com as sequências numéricas para que o estudante consiga compreender as principais ideias relacionadas a esse conceito e prosseguir nos estudos dessa área.

Um tipo particular, e com variadas aplicações tanto na Análise quanto na Matemática como um todo, são as *sequências convergentes*. Dizemos que uma sequência x_n converge para um número real L se para todo $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, tivermos $|x_n - L| < \epsilon$, ou de forma similar, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$.

Em termos sugestivos, uma sequência x_n é convergente se, à medida que o índice n cresce, o elemento x_n vai se tornando arbitrariamente próximo de um certo número L , também chamado o *limite* da sequência. A proximidade entre x_n e L é medida pelo valor absoluto da diferença entre esses dois números, isto é, por $|x_n - L|$. Portanto, dizer que x_n vai se tornando arbitrariamente próximo de L significa dizer que $|x_n - L|$ torna-se inferior a qualquer número positivo ϵ , por menor que seja, desde que façamos o índice n suficientemente grande.

A definição de convergência pode não fazer sentido para um aluno que esteja iniciando seus estudos na área de Análise. Assim, com o propósito de contribuir para a sua compreensão, foi proposto a quatro alunas da Licenciatura em Matemática uma atividade de convergência de sequências utilizando o *software* GeoGebra. A atividade proposta é um recorte da pesquisa que desenvolvi durante o mestrado (MAZZI, 2014), cujo objetivo foi investigar o papel do *software* GeoGebra no ensino de alguns conceitos da Análise Real. A pesquisa em questão era de cunho qualitativo, visto que minha preocupação consistia no aprofundamento da compreensão de um grupo particular de Alunos-com-GeoGebra³. Denzin e Lincoln (2006) afirmam que esse tipo

³ Metáfora baseada nos pressupostos do constructo Seres-Humanos-com-Mídias.

de abordagem enfatiza as qualidades das entidades e dos processos, e os significados não são examinados ou medidos em termos de quantidades, volume, intensidade ou frequência.

Tendo em vista os aspectos da metodologia de pesquisa qualitativa, pretendo, neste artigo, apresentar as discussões depreendidas durante a realização da atividade proposta a quatro alunas ao abordar o conteúdo convergência de sequências utilizando a mídia GeoGebra, desenvolvida em Mazzi (2014), com o intuito de identificar o papel do *software* nessa atividade. Para cumprir com esse objetivo, este artigo está estruturado da seguinte maneira, inicialmente apresentarei os referenciais teóricos desta pesquisa, os quais apoiam o uso da tecnologia no ensino. Na sequência apresentarei o cenário em que a atividade foi aplicada e exibirei alguns aspectos da mesma. Logo após, as discussões entre as alunas serão elencadas de modo a discutir os resultados obtidos. Para finalizar, realizarei algumas considerações acerca do tema.

INSPIRAÇÕES TEÓRICAS

Nesta pesquisa parto do pressuposto de que o conhecimento é produzido por um coletivo de seres-humanos e não-humanos, assim baseados nas ideias de Tikhomirov (1981) e de Lévy (1993), o constructo teórico Seres-Humanos-com-Mídias é elaborado por Borba e Villarreal (2005). Para a compreensão dessa noção, será necessária a apresentação de algumas das ideias dos autores supracitados, a fim de embasar teoricamente este trabalho.

Tikhomirov (1981) apresenta a noção de reorganização do pensamento de modo que, segundo o autor, a estrutura da atividade intelectual humana é modificada pelo uso do computador, reorganizando os processos de criação, busca e armazenamento de informações, emergindo assim novas formas de atividades.

Lévy (1993) apresenta algumas ideias que contemplam as dimensões técnicas e coletivas da cognição humana, propondo a noção de um coletivo pensante homens-coisas. Esse filósofo apresenta e descreve as tecnologias da inteligência, oralidade, escrita e informática, associadas à memória e ao conhecimento. Para o autor, a técnica e o ser humano devem ser vistos de forma conjunta, de modo que não haja uma dicotomia entre eles.

Trazendo essas ideias para o contexto da Educação Matemática, Borba e Villarreal (2005) elaboram a noção Seres-Humanos-com-Mídias. Nesse constructo teórico, as mídias têm participação ativa na construção de significados atribuídos a

resultados. Se não pensarmos em conhecimento como resposta de um determinado problema, e sim como todo o processo até sua solução, fica possível identificar o papel que as diferentes tecnologias podem ter no pensamento matemático produzido e expresso em falas ou em gestos (BORBA; VILLARREAL, 2005; VILLARREAL; BORBA, 2010). Na pesquisa de Mazzi (2014), em particular, foi possível observar a forma como a mídia, no caso o GeoGebra, foi relevante para a compreensão da ideia de convergência de sequências.

Além das ideias de Borba e Villarreal (2005), outro conceito utilizado neste artigo diz respeito ao uso da experimentação com tecnologia. Por experimentação, de acordo com De Villiers (2003), entende-se como sendo todos métodos não dedutivos, incluindo os raciocínios intuitivo, indutivo ou analógico. Em outras palavras, a experimentação é utilizada quando:

(i) conjecturas matemáticas e/ou sentenças são numericamente ou visualmente validadas, por meios de casos especiais, cuidadosas construções e medições geométricas, etc. (ii) conjecturas, generalizações ou conclusões são feitas com base na intuição, analogia ou experiência obtida através de algum método experimental, etc. (DE VILLIERS, 2003, p.174).

Para Borba e Villarreal (2005), uma abordagem experimental em Educação Matemática implica no uso de tentativas e experimentos que dão suporte a elaboração de conjecturas matemáticas; na descoberta de resultados matemáticos previamente desconhecidos; na possibilidade de testar diferentes caminhos para alcançar o objetivo. Para os autores, a tecnologia proporciona uma nova dimensão à experimentação e consideram que esta seja uma nova forma de aprender matemática.

Há uma sinergia entre as noções de De Villiers (2003) e de Borba e Villarreal (2005). Esses autores acreditam no potencial da experimentação na aprendizagem matemática, porém, De Villiers (2010) considera o computador apenas como uma ferramenta importante de exploração, já Borba e Villarreal (2005) defendem que este possui papel importante na produção do conhecimento matemático. Dessa forma, utilizarei, então, o termo experimentação-com-tecnologia, para reforçar a visão de que a tecnologia não é apenas uma ferramenta, mas sim atriz nesse processo.

A ATIVIDADE

A atividade foi desenvolvida por quatro alunas da Licenciatura em Matemática da Unesp – Rio Claro, dentre as quais uma estava no quarto ano (Adriele) e três estavam

no quinto ano (Gislaine, Karen e Patrícia). As estudantes foram separadas em duas duplas e realizaram as atividades em momentos distintos, de modo a proporcionar um melhor acompanhamento das mesmas. Ao final da atividade, foram elaboradas algumas perguntas com intuito de saber o que as alunas pensaram sobre a atividade, assim como, se possuíam sugestões para mudanças. Todo o processo de realização da atividade foi gravado com o auxílio de câmeras fixas e do *software Blueberry*⁴, de modo que fosse possível retornar aos dados quantas vezes fossem necessárias.

O desenvolvimento da atividade se deu com base na metodologia de experimento de ensino. O termo "experimento de ensino" é entendido como uma série de encontros entre os participantes e o pesquisador, durante um período longo. O objetivo desses experimentos é buscar uma estruturação da forma como os estudantes estão pensando no processo de exploração de problemas (STEFFE; THOMPSON, 2000). Neste caso, busquei a compreensão a partir da forma como o coletivo, formado por alunos e GeoGebra, pensam matematicamente. Vale destacar que, diferentemente de Steffe e Thompson (2000), assumo a posição de que o tempo dos experimentos depende do tipo de atividade realizada. No desenvolvimento da atividade proposta, por exemplo, as alunas levaram cerca de duas horas para sua conclusão.

A atividade aplicada, intitulada *Convergência de Sequências*, objetivou compreender a relação entre ε e n_0 na definição de convergência de sequências numéricas. O *design* dessa atividade foi elaborado de modo que as alunas pudessem plotar sequências numéricas com o GeoGebra e, a partir da criação de comandos deslizantes e de uma faixa poligonal em torno dos pontos das sequências, discutissem a noção do ε e n_0 presentes na definição.

Antes do contato das alunas com o *applet* foi proposto um breve questionário, conforme exposto abaixo:

1. *Escreva com suas palavras o que significa uma sequência convergir.*
2. *Se você conhecer a definição de convergência, escreva-a e responda: qual a relação entre n_0 e ε nessa definição?*

Logo em seguida, cada aluna recebeu uma ficha com uma sequência de passos e de perguntas para que, seguindo cada item, elas fossem capazes de criar o *applet* e, ao

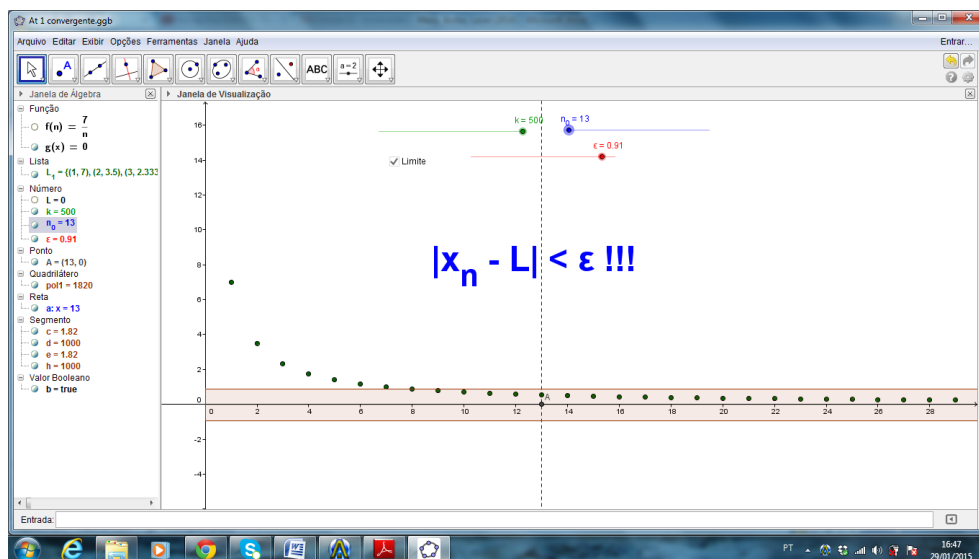
⁴ Com uma *webcam* e um microfone conectados ao computador, esse programa captura a imagem da tela do computador e da *webcam* simultaneamente, bem como o áudio do ambiente, podendo comparar o que está sendo falado pelos alunos e o que está sendo feito no computador, ao mesmo tempo.

mesmo tempo, refletirem sobre o que estavam fazendo. A ficha continha os seguintes itens:

1. Plote a sequência $x_n = n + 1$.
2. Para $k = 250$ e utilizando a ferramenta zoom, o que é possível observar sobre os pontos de x_n ?
3. Crie um comando deslizante n_0 no software.
4. Essa sequência converge? Justifique.
5. Calcule $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
6. Plote uma função $g(x) = L$, restrita ao intervalo $(0, +\infty)$.
7. Crie um comando deslizante $\varepsilon > 0$.
8. Pela definição de convergência, temos que uma sequência x_n converge para L se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$.
Vamos programar o software para realizar o cálculo $|x_n - L|$.
- Dado $\varepsilon = 0,5$, existe um valor de n_0 de forma que $|x_n - L|$ seja menor que ε ? E para $\varepsilon = 0,2$? E para $\varepsilon = 0,002$?
9. Crie uma faixa, dependendo de ε em torno do ponto L .
10. Varie os valores de ε e analise a faixa e os pontos da sequência.

Ao final da ficha, esperava-se que as alunas chegassem a um *applet* semelhante ao representado na figura abaixo.

Figura 1 - Applet de convergência de sequências



Fonte: Mazzi (2014)

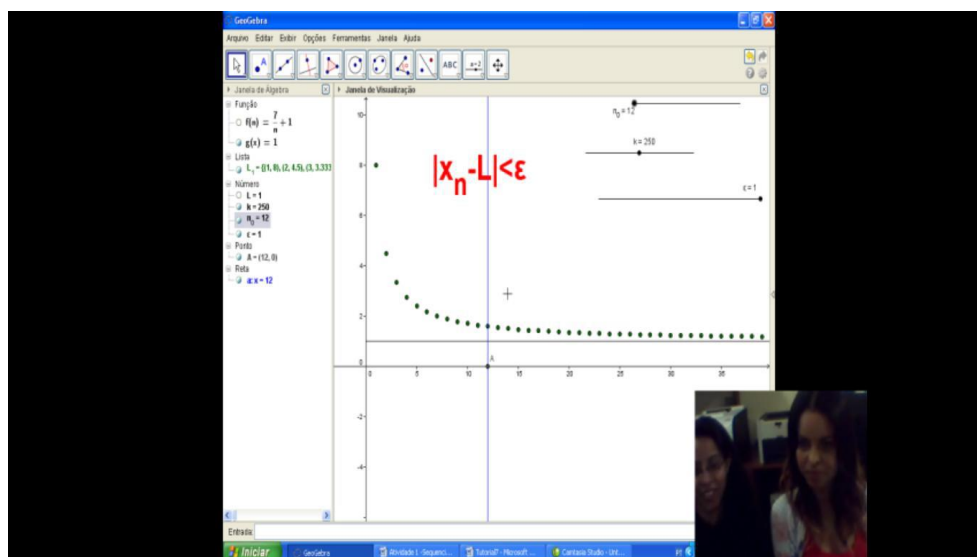
Na seção que segue, apresentarei as discussões que surgiram nos experimentos de ensino entre as duplas, de modo a compreender o papel assumido pelo *software* nessa experimentação-com-GeoGebra.

REFLETINDO SOBRE OS DADOS

Quanto às questões feitas antes da presença do GeoGebra, as quatro alunas souberam expressar ideias acerca da convergência de sequências (questão 1), no entanto, apenas uma aluna soube responder a segunda questão proposta. Esse fato evidencia que as alunas possuíam algumas ideias sobre convergência, entretanto, tinham dificuldades em formalizá-las matematicamente.

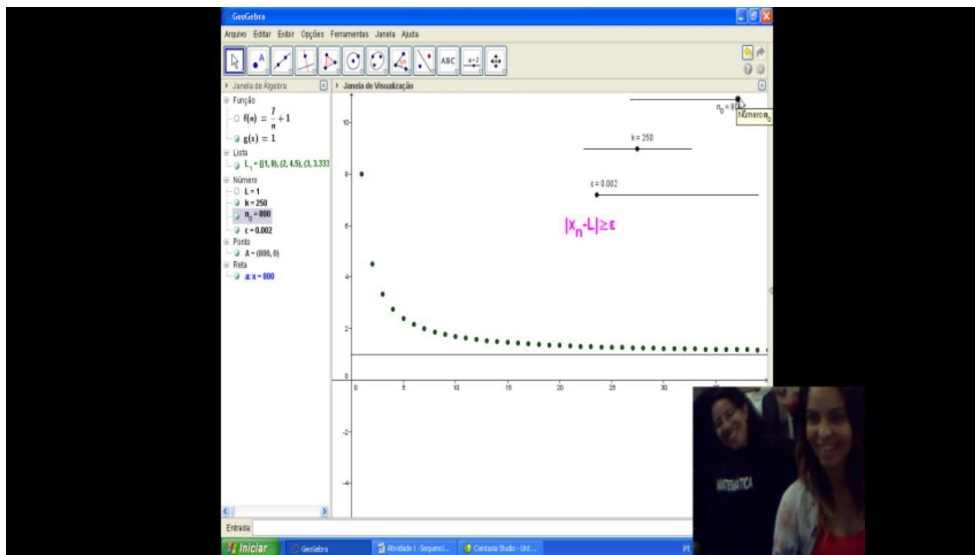
Quanto aos itens da ficha, elenquei alguns diálogos que ocorreram entre as alunas durante a realização dessa atividade. Elas criaram dois controles deslizantes, um chamado n_0 , variando de 1 a 500, e o outro chamado ϵ , variando de 0 a 1. Se a desigualdade $|x_n - L| < \epsilon$ fosse válida, este texto apareceria na tela do GeoGebra (fig. 2), caso contrário, a desigualdade $|x_n - L| \geq \epsilon$ apareceria (fig. 3).

Figura 2 - Investigando a desigualdade $|x_n - L| < \epsilon$



Fonte: Mazzi (2014)

Figura 3 - Investigando a desigualdade $|x_n - L| \geq \epsilon$



Fonte: Mazzi (2014)

Após a construção do *applet*, as alunas foram incentivadas a discutir sobre suas elaborações no GeoGebra. Seguem trechos dos diálogos:

Adrielle: Olha, se eu diminuir o meu *épsilon* aqui [$\epsilon = 0,5$], aí o $n_0 = 8$ não vai dar mais... A desigualdade vai ser maior! Ou seja, teremos $|x_n - L| \geq \epsilon$

Karen: Deixa eu ver... Verdade! Mas precisamos que $|x_n - L|$ seja menor!

Adrielle: Aí eu pego o *épsilon* tão pequeno quanto eu queira...

Mazzi: E quando eu pego o *épsilon* tão pequeno quanto eu queira, o que eu tenho que fazer para que $|x_n - L|$ continue sendo menor que *épsilon*?

Adrielle: Mandar a sequência para infinito? Os pontos têm que chegar mais pro infinito.

Karen: Você tem que ir aumentando [o n_0] olha... [manipulando no software]...

Nesse primeiro momento, Adrielle e Karen, alterando os valores dos comandos deslizantes n_0 e ϵ , discutem sobre a desigualdade presente na definição de convergência. A partir da experimentação, elas notam que se fixarmos um n_0 , a desigualdade não se mantém, ou seja, é necessário variar o *épsilon* para que $|x_n - L|$ continue sendo menor que o *épsilon* escolhido. Esse rápido *feedback* que a mídia oferece é defendido por Borba e Villarreal (2005) e De Villiers (2010). Este último defende que com a contribuição da tecnologia, os alunos podem elaborar ideias e testá-las, obtendo pareceres rápidos sobre o que haviam conjecturado.

Um segundo episódio acerca da convergência de sequências se deu quando as alunas discutiram a ideia da faixa de convergência criada no passo 9 da atividade. As alunas-com-GeoGebra, a partir da construção da faixa poligonal⁵, discutiram a relação entre os termos n_0 e ϵ , presentes na definição de convergência. A abordagem visual proporcionada pelo GeoGebra fez com que as alunas se convencessem e compreendessem o conceito de convergência, como podemos ver no diálogo, entre Adriele e Karen, que segue.

Adriele: Ah, esse polígono (fig. 4) mostra pra gente que quando o ponto estiver dentro dele, quer dizer que a desigualdade é válida, não é?

Karen: Não entendi... Deixa eu mexer.

Adriele: Vai indo com o n_0 ... Repara no que está aparecendo na tela... Para o $n_0 = 23$ o ponto está ficando quase dentro do polígono.

Karen: Se eu mudar meu n_0 , aí o ponto em que $n_0 = 24$ vai estar dentro do polígono?

Adriele: Olhando não...

Karen: Tem que dar zoom...

Adriele: É oh... O $n_0 = 23$, tá na fronteira... Mas o $n_0 = 24$ já está dentro da faixa!

Karen: É o que fala a definição né, dado um valor ϵ , vai ter um n_0 , e os pontos da sequência vão estar dentro do polígono...

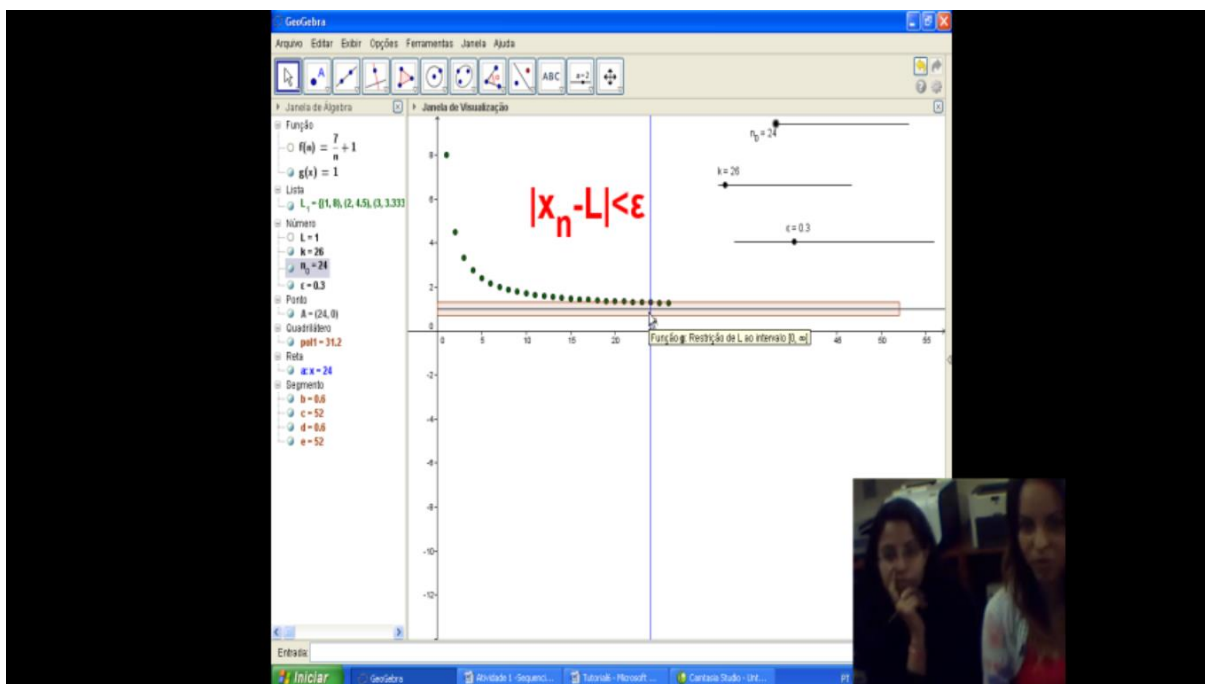
Adriele: E conforme eu aumento o ϵ , aumenta o meu polígono.

Karen: Ah, agora tudo faz sentido.

Com base no excerto acima, é possível observar que as alunas, a partir da Experimentação-com-GeoGebra e da visualização (utilização do *zoom*), compreenderam a definição de convergência de sequências. Desse modo, por visualização, corroboro da ideia de Arcavi (2003) que a considera como uma habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação e o uso da reflexão sobre retratos, imagens, diagramas em nossas mentes ou no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensando e desenvolvendo ideias anteriormente desconhecidas e avançando os entendimentos já existentes.

⁵ Denominei por faixa poligonal ao polígono criado ao redor dos pontos da sequência estudada. O comando no GeoGebra para tal era Polígono [(0, L + ϵ), (0, L - ϵ), (K + ϵ), (K - ϵ)], onde cada item em parênteses é um vértice desse polígono, L é o limite da sequência, K é a quantidade de pontos da sequência e ϵ é um número real que varia de 0 a 1.

Figura 4 - Investigando a ideia de convergência com a faixa poligonal



Fonte: Mazzi (2014)

As alunas utilizaram uma faixa poligonal como sendo o raio de convergência da sequência e, a partir de simulações, notaram o que acontecia conforme se alteravam os valores do ϵ e do n_0 . Quanto à utilização das manipulações com as tecnologias, Rieber (1990) defende que o uso de animações interativas pode ser interessante na medida em que os estudantes têm a possibilidade de controlar seu aprendizado manipulando a tecnologia em questão. Nessa direção, e reforçando a importância da visualização, Flores; Wagner e Buratto (2012) defendem que

adicionar visualização no contexto da educação matemática, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma maior abrangência da cobertura em assuntos matemáticos, permitindo que os estudantes não somente aprendam matemática, mas também se tornem capazes de construir sua própria matemática (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 34).

Essa "nova Matemática" criada pelos estudantes é uma Matemática com significado, com compreensão. Desse modo, concordo com Stewart (1996, p. 2) quando este ressalta que "Matemática não trata de símbolos e de cálculos. Matemática trata de ideias. Em particular, das maneiras pelas quais diferentes ideias se relacionam (...) Acima de tudo, Matemática possui significado". Considero que, com essa abordagem tecnológica, foi possibilitada aos alunos a capacidade de produção de significado para a noção trabalhada.

Por fim, nos diálogos das alunas durante o desenvolvimento da atividade, pode-se comprovar a importância da abordagem visual proporcionada pelo GeoGebra:

Karen: *A visualização ajudou muito... Dá pra ver a faixa de convergência... Dá pra ver direitinho... Uns pontos a gente fica na dúvida se estão dentro da faixa ou não... Aí a gente coloca zoom e resolve tudo.*

Mazzi: *Pra fecharmos essa discussão, vocês conseguem me dizer qual a relação que vocês veem entre n_0 e ϵ ?*

Karen: *Que nosso ϵ é muito pequenininho... E o nosso n_0 tem que ir lá longe...*

Adrielle: *É... Eles estão interligados. Para convergir, dado um ϵ bem pequeno, sempre vai existir um n_0 muito grande, de forma que todos os pontos vão ficar dentro daquela faixa de convergência.*

Karen: *É, quanto menor esse ϵ , maior o n_0 .*

Nesse momento reforça-se a compreensão da ideia de raio de convergência, proporcionada pela faixa poligonal. Esse fato nos faz refletir sobre a importância de uma abordagem geométrica quanto se discute conceitos de Análise. Pela fala das alunas podemos induzir que "esse entendimento visual" da definição de convergência foi possível devido ao cenário e à atividade desenvolvida neste trabalho.

Nesta seção apresentei algumas discussões sobre a experimentação-com-GeoGebra realizada pelas alunas de Licenciatura em Matemática durante a minha pesquisa de mestrado. Esses resultados me fazem pensar que momentos com a tecnologia podem ser relevantes no estudo de conceitos da Análise, de modo a tornar-se uma alternativa para contribuir com sua compreensão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo busquei fomentar algumas reflexões acerca do papel do *software* GeoGebra no estudo do conceito *Convergência de Sequências*, a partir da experimentação com quatro alunas de Licenciatura em Matemática ao realizar uma atividade desenvolvida em minha pesquisa de mestrado.

As tecnologias digitais têm sido utilizadas em diversas pesquisas da Educação Matemática, envolvendo variados conteúdos matemáticos (ALVES, 2012; ALVES; BORGES NETO, 2012; JAVARONI, 2007; OLIMPIO JUNIOR, 2006; SCUCUGLIA, 2006). Pensar no seu uso em Análise Matemática talvez seja contra intuitivo, devido a

associação imediata dessa disciplina com as noções de rigor. Esta pode ser uma das razões dentre as quais as tecnologias não são utilizadas na disciplina, embora exceções existam (ALVES, 2012).

Neste artigo, propus uma abordagem diferenciada para a discussão de ideias acerca de seqüências convergentes. Apresentei como o coletivo formado por estudantes e GeoGebra pode ser utilizado de modo a oportunizar uma ressignificação da noção de convergência. Estudantes que já concluíram o curso de Análise passaram a compreender – com a participação ativa do *software* e do desenho pedagógico formulado – a noção de convergência com base no processo de visualização e experimentação, sendo então, uma possibilidade uso no trabalho em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o GeoGebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. 165–179, 2012.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. Interpretação geométrica para a Regra de L'Hopital com o auxílio do GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, Montevideu. *Anais...* Montevideu: Editora Universitária, 2012. p. 330–337.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. 2003, Mexico. *Anais...* Mexico: [s.n.], 2003.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Análise Matemática no Século XIX*. Campinas: Sbhmat, 2013.

BORBA, M. C; VILLARREAL, M. E. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005. v. 39.

DENZIN, N. K; LINCOLN, Y. S. *O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens*. Tradução Sandra Regina Netz. Porto Alegre: Artmed, 2006.

DE VILLIERS, M. Experimentation and proof in mathematics. In: JAHNKE, H. B.; HANNA, G.; PULTE, H. (Org.). *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Toronto: Springer, 2010. p. 205–221.

DE VILLIERS, M. The value of experimentation in mathematics. In: NATIONAL CONGRESS OF AMESA, 9, 2003, Cape Town. *Anais...* Cape Town: University of the Western Cape, 2003. p. 174–185.

FLORES, C. R; WAGNER, D. R; BURATTO, I. C. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 14, p. 31–45, 2012.

JAVARONI, S. L. *Abordagem Geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. 2007. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2007.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

MAZZI, L. C. *Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da Análise Real*. 2014. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2014.

NUNES, M. N. F. *Sequências Numéricas: um estudo da convergência através de atividades*. 2001. 126 f. Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

OLIMPIO JUNIOR, A. *Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática - uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática*. 2006. 273 f. Doutorado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

RIEBER, L. P. Animation in computer-based instruction. *Educational Technology Research and Development*, v. 38, p. 77–86, 1990.

ROBERT, A. L'Acquisition de La Notion de Convergence Des Suites Numeriques Dans L'Enseignement Superieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 3, p. 307–341, 1982.

SCUCUGLIA, R. R. S. *A investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas*. 2006. 145 f. Dissertação – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

STEFFE, L; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essentials elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Org.). . *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267–307.

STEWART, I. *From Here to Infinity - A Guide to Today's Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1996.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Org.). . *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981. p. 256–278.

VILLARREAL, M. E; BORBA, M. C. Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and...notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education*, v. 42, p. 49–62, 2010.