

GeoGebra y los sistemas de funciones iteradas: socios en la creación de un árbol de sakura.

GeoGebra and the system of iterated functions: partners in the creation of a sakura tree.

ANA MARIA AMARILLO BERTONE ¹

LARA MARTINS BARBOSA²

Resumo

Este estudio ha tenido como objetivo trabajar con los llamados Sistemas de Funciones Iteradas (SFI). Estas herramientas matemáticas junto con el software GeoGebra, convergieron para construir un fractal que, debido a su forma y color, se lo ha identificado con el árbol de Sakura, flor de cerezo, en japonés. Basados en el fundamento teórico de los SFI, se ha utilizado el GeoGebra para crear macro herramientas que reproducen su dinámica. Como resultado, los conceptos matemáticos y los métodos computacionales se entrelazaron a la perfección, al punto de dejar los investigadores en un proceso de libre creatividad.

Palabras-clave: GeoGebra, Fractales, Sistemas de Funciones Iteradas

Abstract

This study aims to work with the so-called Iterated Function Systems (IFS). With the help of the software GeoGebra, a fractal was created that we associate with the Japanese national tree, the cherry tree, because of its shape and its colors. Based on the theoretical foundations of the IFS, we use GeoGebra to create macro tools that reproduces its dynamics. Mathematical concepts and computational methods intertwined, combining perfectly to create a process that has left the researchers with freedom for creativity.

Keywords: GeoGebra, Fractal, Iterated Function Systems

Introducción

Este estudio fue realizado como parte del trabajo de conclusión del curso de graduación, adonde se investigó sobre la Teoría Fractal y su desarrollo en el ambiente interactivo del software libre GeoGebra. Una de las propuestas fue de hacer una construcción original de un fractal, donde la base teórica y, al mismo tiempo, la belleza estética de estas figuras, se mezclaran con el objetivo de crear y descubrir.

¹ Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática FAMAT - UFU
Email: anamaria@famat.ufu.br

² Universidade Federal de Uberlândia. Email: lara-barbosa@hotmail.com

El modelo elegido para este trabajo fue de un árbol fractal, que por sus colores y formato fue identificado con el árbol de *Sakura*, *el árbol cerezo japonés*, símbolo de la cultura japonesa. Es conocido que en la época de floración del árbol de cerezo, millones de japoneses se reúnen en lugares donde están plantados estos árboles, para realizar una antigua tradición, el *Hanami*. Esta tradición, que viene desde el siglo VIII, consiste en tomar un tiempo para poder apreciar la belleza de esta flor y reflexionar sobre la naturaleza efímera de la vida, ya que la duración de la flor de cerezo es muy corta, sin embargo, de increíble belleza. De acuerdo con algunos especialistas, la palabra sakura podría tener su origen en el cultivo del arroz. De hecho, una parte de la palabra, KURA, significa en el idioma japonés, el depósito adonde se guardaba el arroz, alimento básico de los japoneses, que en su grande mayoría lo considera una dádiva divina. Inspiradas en su belleza y simbolismos, fue decidido construir el modelo del árbol fractal, buscando en sus resultados una imagen del cerezo japonés.

En términos matemáticos, es al comienzo de la década de los ochenta que investigadores se concentraron en los problemas sobre conjuntos no diferenciables, aquellos en que los métodos del cálculo clásico no podrían ser aplicados. Una de las más importantes contribuciones fue la obra de Benoit Mandelbrot MALDEBROT (1982), que abrió una nueva manera de modelar fenómenos naturales. Fue este fantástico investigador que inventó la palabra fractal. Muchas definiciones de esta palabra existen en la literatura. Pero fue Mandelbrot que define *fractal como aquel objeto matemático que posee auto- similitud*. Esta fue la definición que adoptamos para nuestra investigación.

Existen muchas formas de construir figuras fractales. Una de ellas es por medio de *Sistemas de Funciones Iteradas* (del inglés Iterated Function System) HUTCHINSON (1981). En forma general, un sistema de funciones iteradas es un conjunto de funciones de contracción $C = \{ S_1, S_2, \dots, S_n \}$ actuando en un espacio métrico X . Tomando un conjunto compacto E_0 en X , efectuamos la *iteración* del sistema, que significa primeramente considerar a composición $S = S_1 \circ S_2 \circ \dots \circ S_n$ para después aplicar $S^k = S \circ S \circ \dots \circ S$ (k composiciones) al conjunto E_0 . Así, aplicando S en forma *iterada*, nos acercarán de un elemento E en X llamado de *atractor* del SFI. Este atractor, existe un conjunto E que es el límite de la secuencia $\{S^k(E)\}_k$ cuando k tiende para infinito. Este atractor es el que conocemos como *fractal*. Esto constituye la base para la creación de un algoritmo que lo hará aproximar del atractor en un SFI. Aplicando el mayor número de veces el SFI, nos dará una idea más exacta del atractor y, por lo tanto, del fractal.

En este trabajo fue estudiado el método de obtención de fractales en el plano euclidiano \mathbb{R}^2 , pensado como un espacio métrico (de dimensión finita) y utilizando como aplicación de contracción las *semejanzas*, que son la composición de rotaciones y translaciones con homotecias contractivas, o sea, homotecias de razón menor que 1. Así, apenas repitiendo el proceso en forma iterada, partimos de una figura E_0 compacta y, una vez definido el SFI, encontramos una aproximación del atractor del sistema. Se puede demostrar que el atractor es el único conjunto del plano euclidiano que verifica ser el *punto fijo del sistema*. Más precisamente tenemos la siguiente afirmación:

Dado un sistema $C = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ de semejanzas contractivas de \mathbb{R}^n e un conjunto compacto E_0 (dado inicial do sistema). Siendo $S = S_1 \circ S_2 \dots \circ S_k$ e consideramos el SFI determinado por la secuencia $\{S(E_0), S^2(E_0), \dots, S^k(E_0), \dots\}$. Entonces existe un único conjunto compacto y no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E)$.

Basados en esta proposición, pusimos las manos a la obra, utilizando el software GeoGebra para la construcción del árbol de Sakura. En la Figura 1 es mostrada una fotografía del modelo que inspiró la construcción del árbol de Sakura. El resultado final en el ambiente GeoGebra de la aplicación del SFI elegido, aparece junto con la imagen real en la misma Figura 1.

Figura 1: Un árbol de Sakura real en la Plaza del Japón – Curitiba-PR Brasil (foto extraída de http://www.flickr.com/photos/naj_photos/5966863315/). En el segundo plano el modelo final del fractal, creado en el GeoGebra.



Como complemento del estudio realizado, fueron hechos más variaciones del árbol de Sakura, en función de la distancia de la base a la primera rama y del ángulo formada por esta y el tronco del árbol. Los resultados fueron asociados con símbolos de la cultura japonesa.

1. Metodología

Para este estudio realizamos una pesquisa explicativa adonde, según FIORENTINI y LORENZATO (2006), el investigador busca explicitar las causas de los problemas o fenómenos. O sea, trata el porqué de las cosas. Es muy común en la investigación explicativa, apoyarse en un estudio del tipo descriptivo o investigativo. (p.70). Sin embargo, tratamos de avanzar en los resultados de las conclusiones hechas en trabajos anteriores e ir más allá de lo concluido.

Fueron divididas las discusiones en dos etapas: la primera en donde se aplica rigurosamente las ideas teóricas en el ambiente computacional y una segunda donde los mecanismos computacionales crean atajos a la finalización del modelo. La primera etapa fue caracterizada por la definición en el GeoGebra de las transformaciones geométricas (semejanzas) por medio de sus matrices. La segunda etapa se caracterizó por el uso de las macro herramientas del GeoGebra y, al final, la visualización de una aproximación del fractal y la concretización del modelo imaginado.

2. Resultados

La primera etapa de la construcción de la aproximación del fractal, consiste en definir un SFI adecuado para el modelo idealizado. El sistema elegido fue compuesto de tres transformaciones lineares del plano euclidiano (homotecia, rotación y simetría con respecto al eje Oy) y una transformación afín (traslación).

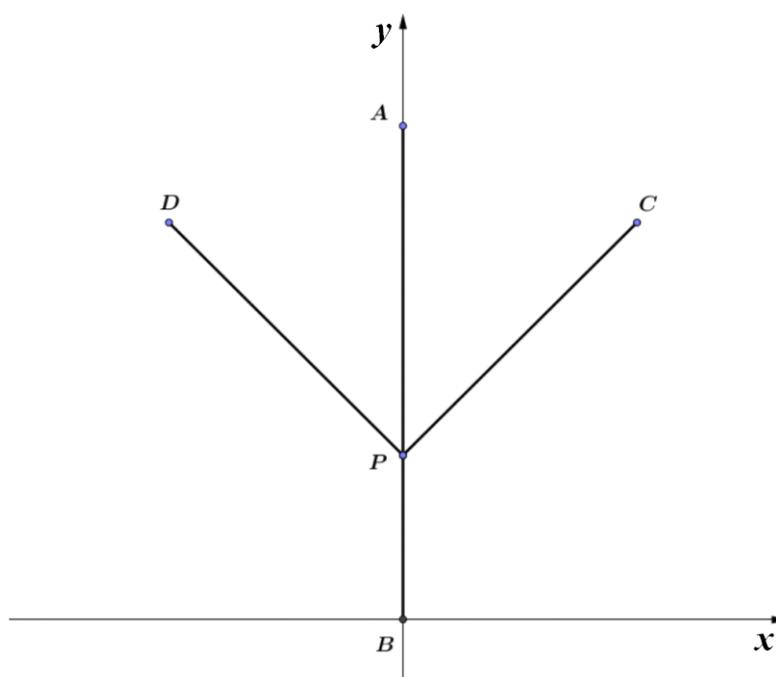
Partimos de un conjunto compacto E_0 definido por cinco puntos y los segmentos que los unen, de la siguiente manera:

- El punto B como el origen de coordenadas y el punto A, sobre el eje Oy a 1 unidad de medida del origen.
- Un punto P definido como $B + a*(A-B)$, donde a es una medida arbitraria entre 0 y 1.

- Los puntos, C y D, simétricos con respecto al eje 0y, formando un ángulo APC = ángulo APD = α , siendo α un ángulo de medida arbitraria entre 0 y 360 grados.

El conjunto compacto E_0 es mostrado en la Figura 1.

Figura 2: El conjunto compacto E_0 inicial do SFI. Imagen hecha por los autores en el GeoGebra.



A seguir, fueron ordenadas las transformaciones, para obtener la imagen del conjunto compacto por la primera aplicación del SFI. En nuestro estudio, definimos o sistema como siendo la composición de las siguientes transformaciones, representadas em forma matricial como:

Homotecia M con centro en B e razão 1-a:

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Rotación N centrada en B y ángulo α :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Traslación de vector a \vec{AB} :

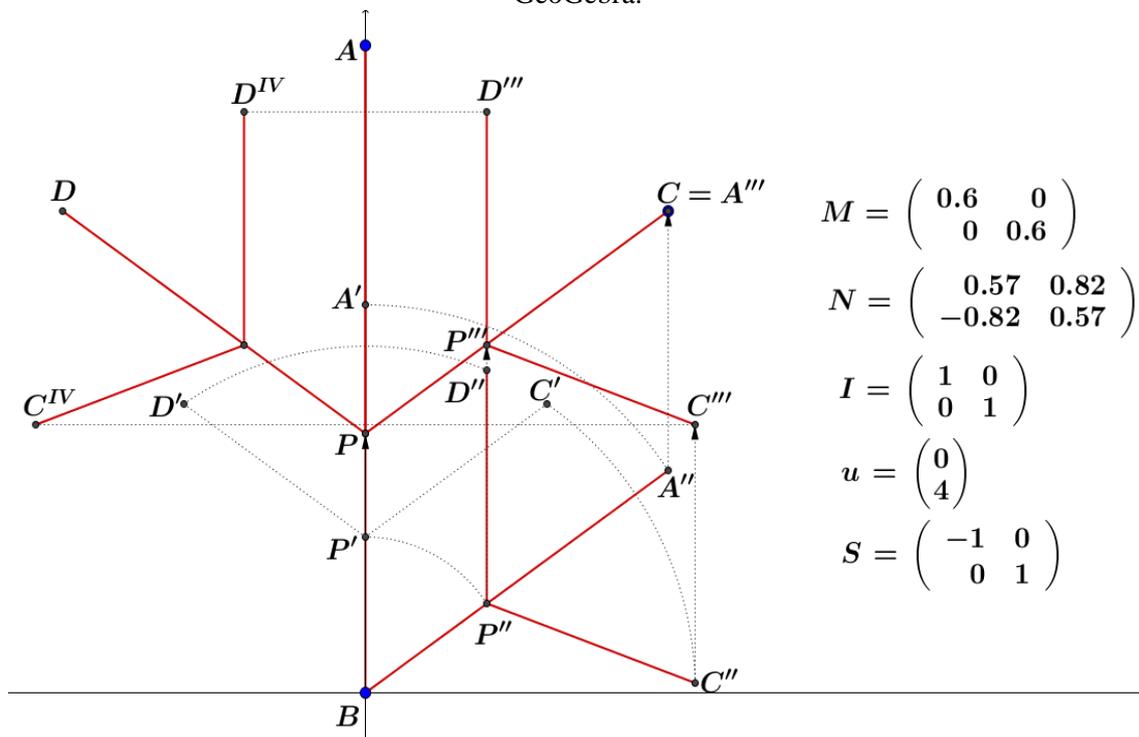
$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

Simetría de eje 0y:

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Los elementos del conjunto compacto son sometidos a la aplicación de la composición de las transformaciones geométricas para obtener la primera aproximación del fractal definido por el conjunto y el SFI. Esto es mostrado en la Figura 2.

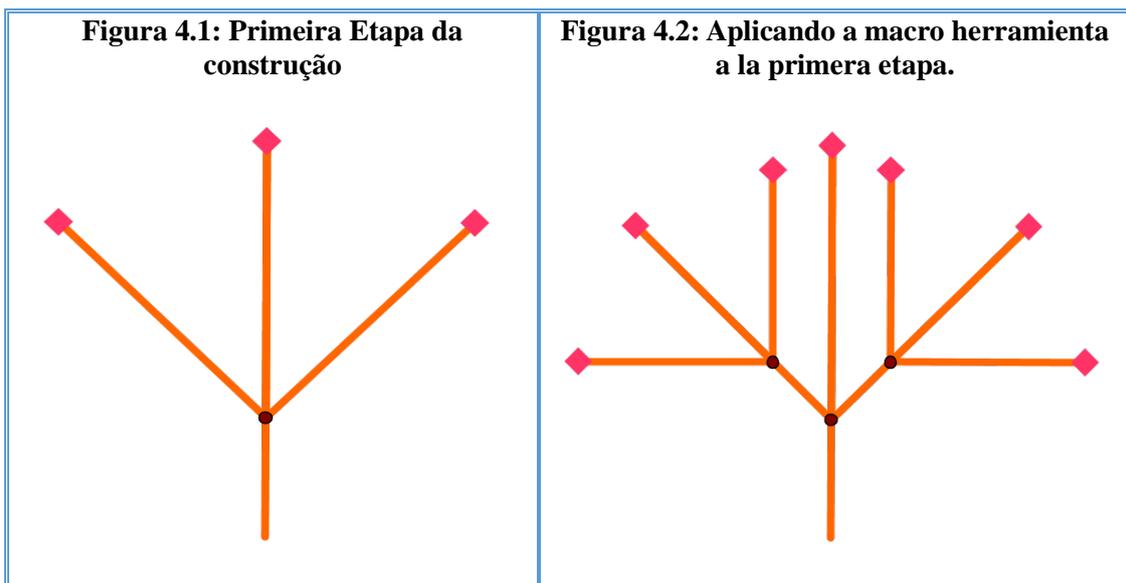
Figura 3: Los elementos del fractal y su primera etapa. Imagen hecha por los autores en el GeoGebra.



Los pasos de la construcción en el GeoGebra son los siguientes:

- Se creó el conjunto compacto como descrito en la etapa anterior, como muestra la Figura 4.1 de la Figura 1.
- Se creó una macro herramienta, que llamamos de Sakura1, con estos elementos como finales y como iniciales los puntos A, B y los dos controles deslizantes \mathbf{a} y $\mathbf{\alpha}$. Se obtuvo las “ramas” del árbol, como muestra la Figura 4.2

Figura 4: Primeira Etapa da construção Imágenes obtenidas por los autores en el GeoGebra.



- Con este resultado, se creó la segunda macro herramienta, Sakura2, que fue aplicada a nuevas ramas del árbol, que dio como resultado la imagen de la Figura 6.1.
- Con este resultado, se creó una última herramienta (Sakura3), para obtener una buena aproximación del modelo imaginado. Ésta es mostrada en la figura 6.2

En la figura 5 se muestra el “laboratorio” del ambiente GeoGebra adonde fueron trabajados el fractal y sus variaciones.

Figura 5: El laboratorio en el ambiente GeoGebra. Imágenes hecha por los autores en el GeoGebra.

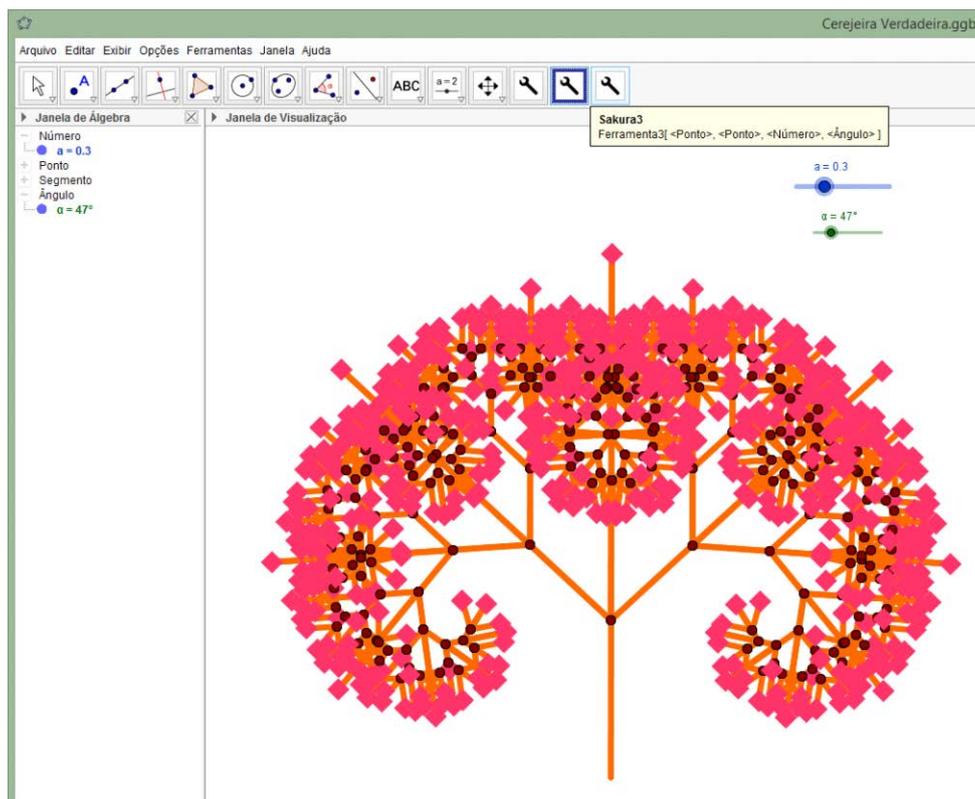
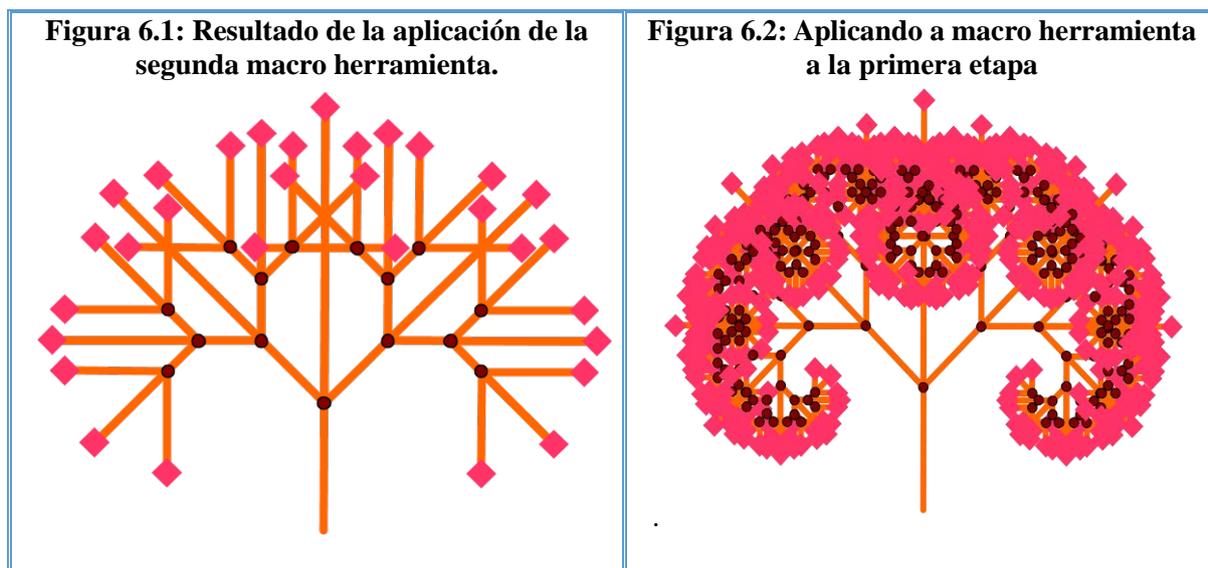
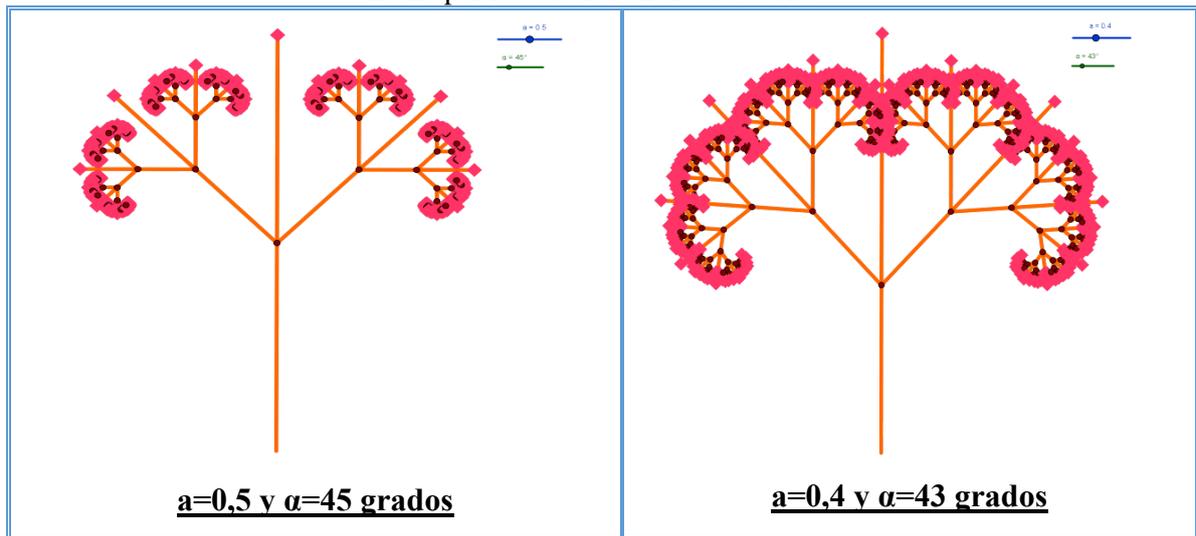


Figura 6: Resultado de la aplicación de las macro herramientas. Imágenes hecha por los autores en el GeoGebra



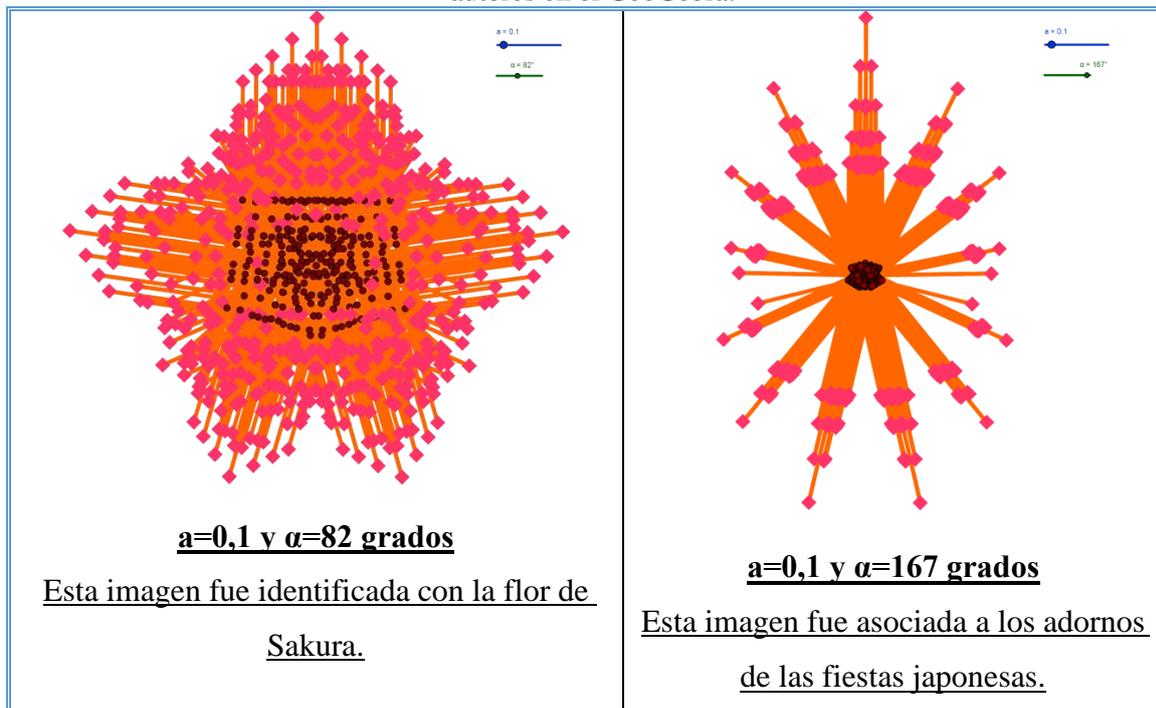
Como estudio final, se hicieron algunas simulaciones para diferentes valores de a y α . Los valores usados en la Figura 6.2 fueron $a=0,5$ y $\alpha=47$ **grados**. Otras dos de esas simulaciones, que muestran el árbol de Sakura menos “lleno”, son ilustradas en la Figura 7.

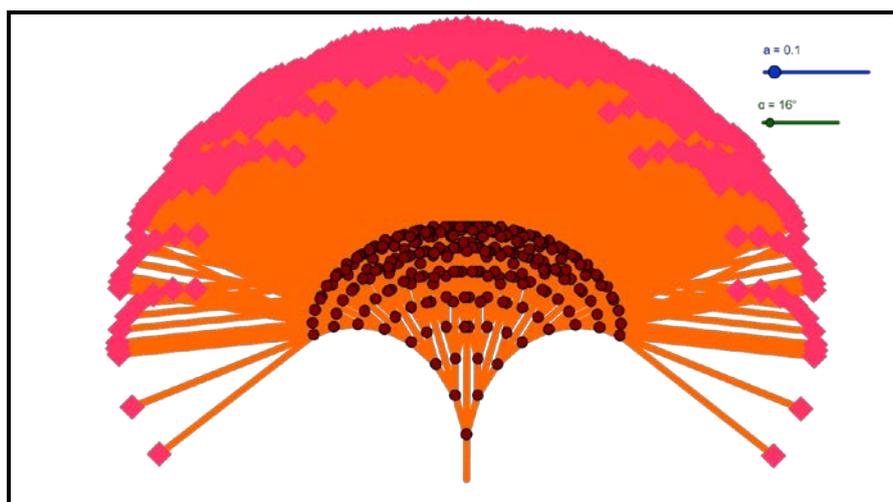
Figura 7: Simulaciones del árbol de Sakura para diferentes valores de a y α . Imágenes hecha por los autores en el GeoGebra.



En las siguientes simulaciones son mostradas en la Figura 8 algunas imágenes curiosas obtenidas a partir de valores altos de α y pequeños de a , o los dos pequeños, que “escaparon” de la imaginación del modelo. Fueron escogidas, entre muchas imágenes obtenidas para diferentes valores de los parámetros, por ser imágenes asociadas de alguna forma a la cultura japonesa.

Figura 8: Simulaciones para valores altos e pequeños de a y α . Imágenes hecha por los autores en el GeoGebra.





$\alpha=0,1$ y $\alpha=16$ grados

Esta figura fue identificada con el abanico japonés.

Conclusiones

La inquietud que nos llevó a realizar este estudio, refuerzan la hipótesis de que el entorno informático puede potencializar el pensamiento de los individuos, liberándolos para las actividades de planificación y creación, para la actividad de producir situaciones que los alienten y desafíen. A diferencia del lápiz y el papel, en la pantalla del ordenador, es posible cambiar de forma dinámica y ágil, con el fin de ampliar la capacidad de darse cuenta de la necesidad de cambios y ajustes. De esta forma, las representaciones obtenidas serán la concretización del modelo imaginado. Esta dinámica fue comprobada una vez más, en nuestra experiencia investigativa, superando las expectativas y reforzando la importancia del uso de GeoGebra como medio de potencialización de la creatividad y la confirmación de ideas matemáticas rigurosas.

Referencias

FIorentini, D. y Lorenzato, S. (2006), *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados.

HUTCHINSON, J. E. (1981), *Fractals and self-similarity*, *Indiana U. Math. J.* 30 (5), 713 – 747.

MANDELBROT, B. (1982), *Fractal Geometry of Nature*, New York Freeman & Co.

MANUAL GEOGEBRA disponible en <http://www.geogebra.org/cms/>

Último acceso en: 18 julio de 2015.