

O uso do software educativo GeoGebra no estudo de Geometria Analítica¹

Using GeoGebra software to study Analytic Geometry

ANDRÉ TENÓRIO²

SANDRA MARA ROCHA DE SOUZA³

THAÍS TENÓRIO⁴

Resumo

A influência do GeoGebra no desempenho de alunos no estudo de distância entre dois pontos e de equação da reta foi analisada. Durante o primeiro semestre de 2015, 48 alunos de duas turmas da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro participaram da pesquisa. Os instrumentos de coleta de dados foram pré-teste, pós-teste, registro de atividades discente e questionários. Nas duas turmas, as etapas da pesquisa foram similares, contudo, entre o pré-teste e o pós-teste, uma manipulou o software enquanto a outra, não. Em ambas, erros em cálculos algébricos básicos e regra de sinais no cálculo de determinantes foram comuns. Todavia, nas duas houve evolução de desempenho entre os testes. No grupo que usou o GeoGebra, o progresso foi maior. Manusear o software promoveu interesse, participação e interação, além de desenvolver a autonomia. Na visão dos alunos, o software foi importante na aprendizagem por ajudar no entendimento, complementar as explicações do professor e dinamizar as aulas. A principal vantagem do GeoGebra no estudo de geometria analítica foi estabelecer uma ponte entre álgebra e geometria, ao possibilitar a observação simultânea de expressões algébricas e suas representações gráficas.

Palavras-chave: GeoGebra; geometria analítica; distância; equação da reta.

Abstract

The influence of GeoGebra on the academic performance of students in the distance between two points and linear equation was analyzed. During the first semester of 2015, 48 students from two High School classes from a public school in Rio de Janeiro participated of the research. Data collection instruments were pre-test, post-test, record of student activities and questionnaire. The research steps were similar to both classes, however, between the pre-test and post-test, one manipulated the software while the other does not. In both, mistakes in basic algebraic calculations and signs rule in determinants calculation were frequent. However, the two classes had evolution of academic performance between tests. The group that handled GeoGebra had higher progress. Using the software promoted interest, participation and interaction, and develop autonomy. According students, GeoGebra was important for learning because it helps in the understanding, complements explanations of the teacher and turns the lectures more dynamic. The main advantage of GeoGebra in the study of analytic geometry was to establish a bridge between algebra and geometry, enabling the

¹ Apoio: Fundação Cecierj/SEEDUC-RJ

² IFRJ/UFF (Cecierj/UAB) – tenorioifrj@gmail.com

³ SEEDUC-RJ/UFF – sandramararsouza@gmail.com

⁴ UFF (UAB) – tenoriocalc@gmail.com

simultaneous observation of algebraic expressions and their graphical representations.
Keywords: *GeoGebra; analytic geometry; distance; linear equation.*

Introdução

Tecnologias de informação e comunicação (TICs) podem ser empregadas no processo de ensino-aprendizagem de Matemática para despertar interesse e motivar (COLPO *et al.*, 2009; FIALHO, 2010; PAULA, 2013; REIS; SANTOS, 2013; COSTA *et al.*, 2014). De modo geral, softwares educativos favorecem a construção do conhecimento por estimular a investigação e a criatividade (FIALHO, 2010; PAULA, 2013; XAVIER *et al.*, 2014). De acordo com Paula (2013), eles ajudariam a desenvolver a capacidade de abstração matemática e evitar a mera memorização. Contribuiriam ainda para o desenvolvimento da capacidade de observação, da associação de ideias e do senso crítico (BORTOLOSSI, 2012; SOARES, 2012; TENÓRIO *et al.*, 2015a).

Dois grandes atrativos são gratuidade e simplicidade de uso, encontradas em aplicativos como GeoGebra, Régua e Compasso, DrGeo, Winplot, Wingeom, entre outros. Esses softwares oferecem a possibilidade de criar e analisar construções geométricas, o que ajudaria no entendimento de conteúdos matemáticos.

O GeoGebra, um dos softwares de geometria dinâmica mais conhecidos, permite ao aluno, a partir de uma interface didática, explorar conceitos como ponto, reta, plano, gráficos, e relacionar construções algébricas e geométricas (DIAS, 2012; SOARES, 2012; LÚCIO, 2013; TENÓRIO *et al.*, 2015b).

Empregar esse software no estudo de geometria analítica pode ajudar a mitigar dificuldades de aprendizagem relatadas por Celestino (2000), Di Pinto (2000), Richit (2005), Colpo *et al.* (2009) e Reis e Santos (2013), por ele favorecer a compreensão de conceitos matemáticos e propiciar animação e criatividade durante a aprendizagem (VALÉRIO; SOUZA, 2013; TENÓRIO *et al.*, 2014). Além de possibilitar ao aluno construir, visualizar e manipular objetos geométricos com autonomia (VENTURINI, 2009; LÚCIO, 2013).

De acordo com Nascimento (2012), ao testar o uso do GeoGebra com alunos de escolas do Ceará, cerca de 90% acharam mais fácil entender matemática com o uso do software do que em sala de aula, pois o GeoGebra minimizaria a necessidade de aplicar cálculos aritméticos e algébricos, além de exibir respostas rapidamente, o que facilitaria a

resolução de questões.

Colpo *et al.* (2009) propuseram desafios de Geometria Analítica a serem resolvidos com o uso do GeoGebra. Uma turma de terceira série do Ensino Médio de uma escola do Rio Grande do Sul participou da pesquisa. O software despertou a curiosidade e o interesse, além disso, os alunos conseguiram visualizar, experimentar, abstrair, interpretar, generalizar e demonstrar conceitos matemáticos.

Guedes (2013) experimentou, com alunos da terceira série do Ensino Médio de uma escola no Espírito Santo, o emprego do GeoGebra em Geometria Analítica. Os resultados das atividades mostraram um maior aprendizado e interesse dos alunos pelo conteúdo, de modo que o software seria capaz de favorecer o ensino-aprendizagem.

Vargas (2010), Correia (2011), Lima *et al.* (2011), Paula (2013) e Marins (2013) também investigaram os efeitos de usar o GeoGebra em aulas de Geometria Analítica e propuseram melhorias no ensino e na aprendizagem. Eles descreveram o software como uma boa opção para explorar distância entre dois pontos e equações de retas por favorecer a visualização e facilitar o entendimento.

Todavia, dados sistemáticos sobre os efeitos do software no desempenho de alunos são escassos. Não foram encontrados trabalhos de Geometria Analítica sobre o uso do GeoGebra onde houvesse a comparação de duas turmas com consideração de dados qualitativos e quantitativos obtidos durante um período.

O objetivo desta pesquisa foi avaliar a influência do GeoGebra no desempenho acadêmico de alunos da 3ª série do Ensino Médio no estudo de distância entre dois pontos e de equação da reta. As percepções dos alunos sobre a manipulação do software foram destacadas. A partir dos dados obtidos visou-se responder às seguintes questões:

- Quais seriam as dificuldades de aprendizagem em Geometria Analítica?
- O GeoGebra influenciaria na superação de dificuldades de aprendizagem?
- Como o GeoGebra influiria na aprendizagem de Geometria Analítica?

1. Metodologia

O estudo foi realizado durante o primeiro semestre de 2015 com duas turmas da 3ª série do Ensino Médio de um colégio público estadual no município do Rio de Janeiro, onde um dos pesquisadores lecionava. Quarenta e oito alunos do turno noturno, com idades próximas a 18 anos, participaram do estudo. Os alunos não tinham ciência de estar

participando da pesquisa.

Foram investigados os efeitos de empregar o GeoGebra em distância entre dois pontos e estudo da reta, conteúdos de Geometria Analítica previstos pelo currículo mínimo de Matemática (RIO DE JANEIRO, 2012).

A aplicação da pesquisa envolveu cinco etapas:

1. Aulas expositivas ministradas em sala e resolução de questões (duração de 400 minutos) – igual para as duas turmas;
2. Pré-teste com cinco questões (duração de 100 minutos) – igual para as duas turmas;
3. Reforço pedagógico – distinto para as duas turmas. Em uma, denominada controle, vinte e um alunos resolveram uma lista com vinte questões sem utilizar nenhum software educativo (duração de 300 minutos). Na outra, chamada turma alvo, vinte e sete alunos manusearam o GeoGebra no laboratório de informática (duração de 400 minutos).
4. Pós-teste com cinco questões (duração de 100 minutos) – igual para as duas turmas;
5. Questionários de percepções dos alunos sobre as aulas (duração de 300 minutos) – distinto para as duas turmas.

Durante o reforço pedagógico para a turma alvo, em um primeiro momento, os principais comandos e ferramentas do GeoGebra foram introduzidos. Vídeos tutoriais sobre o software, disponíveis em www.geogebra.im-uff.mat.br/vtt.html, foram apresentados com projetor multimídia para o aluno conhecer a interface gráfica do programa e suas características. Familiarizados com o software, os alunos fizeram construções e atividades sobre os conteúdos de cálculo da distância entre dois pontos e equações da reta, de modo a chegarem a conclusões sobre as construções.

A análise comparativa quantitativa e qualitativa foi usada para avaliar os dados. A comparação quantitativa considerou as notas das avaliações dos alunos das turmas distintas e foi embasada na comparação simples das médias e medianas. Os dois grupos fizeram duas avaliações similares (etapas 2 e 4 da pesquisa). Ambas valeram 10 pontos e tiveram grau de dificuldade similar.

A escolha de qual seria a turma alvo e qual seria a de controle foi aleatória. A metodologia foi divisada para lidar com o possível viés inicial, sob o pressuposto de que as turmas pudessem ter habilidades e competências diferentes, e contornar a inexistência de qualquer base prévia de comparação. Foram aplicadas duas avaliações a cada turma, consideradas com mesmo nível de dificuldade. O progresso entre as duas

avaliações da turma alvo foi comparado ao correspondente da turma de controle.

A comparação qualitativa apoiou-se na observação direta extensiva, com uso da observação participante e questionários para coleta de dados (GIL, 2002; MARCONI; LAKATOS, 2003; YIN, 2010).

Os questionários continham perguntas com respostas abertas, semifechadas e fechadas. Mas, as perguntas, na maioria, eram objetivas. As questões com respostas abertas e semifechadas possibilitaram livre expressão e obtenção de informações não conhecidas por itens fechados, além de reforçarem a ideia da importância das contribuições do respondente e do interesse do pesquisador em sua opinião. Respostas às questões abertas e semifechadas, quando apropriado, foram analisadas segundo o método de análise qualitativa de conteúdo a fim de exprimir e demonstrar a abrangência dos acontecimentos cotidianos. Essas respostas foram separadas em grupos por significado e analisadas por conteúdo (BARDIN, 1988; CÂMARA, 2013).

A compilação das informações colhidas com os questionários foi realizada com anonimato dos participantes. O estudo foi exploratório, explicativo e descritivo (GIL, 2002) – exploratório por buscar a construção de hipóteses sobre a inserção da GeoGebra na formação do aluno; explicativo ao visar à identificação de fatores capazes de potencializar ou limitar a aprendizagem; e descritivo em razão da análise detalhada das atividades realizadas pelos participantes nas etapas 1, 2, 3 e 4 da pesquisa e das respostas colhidas com os questionários na etapa 5.

2. Resultados e Discussões

Na etapa 1 da pesquisa, as duas turmas receberam aulas sobre os conteúdos de cálculo da distância entre dois pontos e de equação geral e reduzida da reta. A maioria dos alunos ficou apática. De acordo com Marins (2013), seria comum o aluno não participar, nem interagir em aulas expositivas.

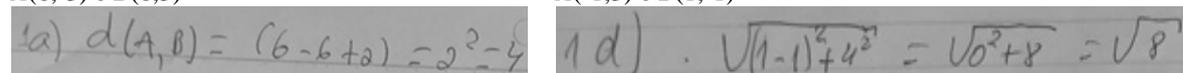
Na resolução de questões foram frequentes as dificuldades em cálculos aritméticos básicos (principalmente, com números negativos), em potenciação, em localizar pontos no plano cartesiano e em aplicar o teorema da distância entre dois pontos (Quadro 1). A interpretação de questões contextualizadas, apesar de suscitarem dúvidas, despertou o interesse. Os alunos gostaram por perceberem a aplicação do conteúdo na prática.

Quadro 1. Erros comuns cometidos em questões de fixação por ambas as turmas envolveram teorema da distância entre dois pontos, potenciação e regras de sinais no cálculo de determinantes.

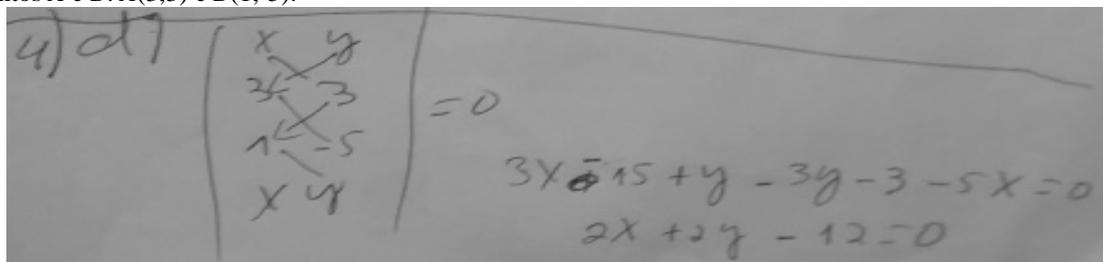
1. (Retirada na íntegra de PAIVA, 2013) Calcule a distância entre os pontos A e B em cada um dos seguintes casos:

A(6,-3) e B(6,5)

A(-1,3) e B(1,-1)



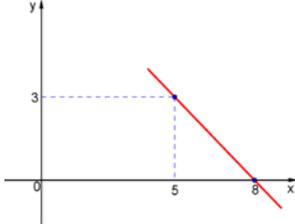
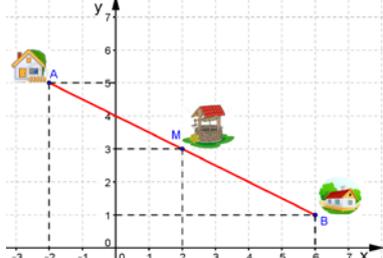
4. (Retirado na íntegra de DANTE, 2014) Em cada caso, escreva uma equação geral da reta definida pelos pontos A e B. A(3,3) e B(1,-5).



Durante o pré-teste, nas duas turmas, os alunos mostraram-se inquietos, e apresentaram dificuldades em relacionar os conteúdos estudados em sala às questões da avaliação ou falta de compreensão de conteúdos anteriores, como números fracionários, regra de sinais, potenciação, equação do 1º grau e localização de pontos no plano cartesiano. Mas, de modo geral, os alunos entenderam o conteúdo de Geometria Analítica.

Alunos das duas turmas tiveram melhor rendimento na questão 1 do pré-teste, por ela envolver a aplicação direta do teorema da distância entre dois pontos (Quadro 2).

Quadro 2. Questões do pré-teste.

<p>1) (2,0 pontos) (Retirado na íntegra de BONJORNO; GIOVANNI, 2005) Calcule a distância entre os pontos: A (-3,2) e B (1,-1).</p>	<p>2) (2,0 pontos) (Adaptada de BONJORNO; GIOVANNI, 2005) Obtenha a equação geral da reta que passa pelos pontos: a) (1,0 ponto) A (1,3) e B (4,7) b) (1,0 ponto) Construa o gráfico dessa reta.</p>
<p>3.a) (1,0 ponto) (Retirado na íntegra de BONJORNO; GIOVANNI, 2005) Escreva a equação reduzida da reta que passa pelos pontos: A(2,3) e B(4,8). 3.b) (1,0 ponto) Obtenha a equação reduzida da reta que passa pelo ponto P(-3,7) e pela origem do sistema cartesiano.</p>	<p>4.a) (1,0 ponto) (Retirado na íntegra de BONJORNO e GIOVANNI, 2005) Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos (-1,-2) e (5,2). 4.b) (1,0 ponto) (Adaptada de RIBEIRO, 2011) Obtenha a equação geral da reta no gráfico ao lado:</p> 
<p>5) (2,0 pontos) (Adaptada de SOUZA, 2010) No plano cartesiano, os pontos A e B representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível, conforme a figura ao lado. Qual a distância entre as casas e o poço?</p>	

Nas duas turmas, os alunos obtiveram pior desempenho na última questão do pré-teste (Tabela 1), por tratar-se de uma situação-problema que demandava a interpretação do

enunciado e de um gráfico para divisar a estratégia de resolução (Quadro 2). Rizzon (2008), Marins (2013) e Paula (2013) também assinalaram dificuldades de estudantes em interpretar questões contextualizadas de Geometria Analítica.

Tabela 1: Notas obtidas pelas turmas controle e alvo por questão do pré-teste.

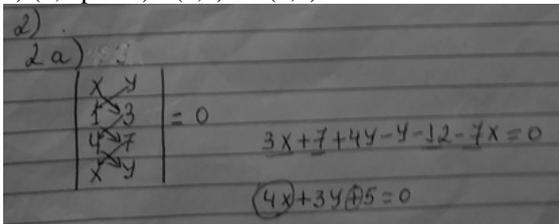
Turma	Média de pontuação obtida por questão do pré-teste								Média Nota (10 pt)	Mediana Nota
	1 (2 pt)	2a (1 pt)	2b (1 pt)	3a (1 pt)	3b (1 pt)	4a (1 pt)	4b (1 pt)	5 (2 pt)		
Controle	0,50	0,22	0,17	0,27	0,05	0,10	0,07	0,00B	1,4	1,0
Alvo	0,65	0,20	0,31	0,32	0,19	0,13	0,17	0,00B	2,2	1,0

Nota: 0,00B significa questão em branco.

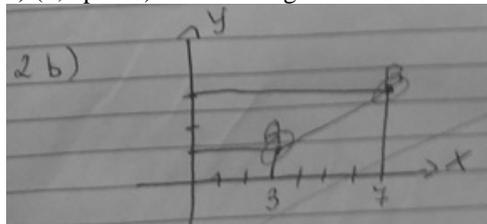
Alguns não conseguiram aplicar a regra de sinais no cálculo de determinantes (Quadro 3), erro repetido em outras questões. A construção e a análise de gráficos foram pontos críticos, pois houve dificuldade em identificar pontos no plano cartesiano (Quadro 3).

Quadro 3. Erros comuns cometidos no pré-teste (regra de sinais no cálculo de determinantes e construção de gráficos).

2) (2,0 pontos) (Adaptada de BONJORNO; GIOVANNI, 2005) Obtenha a equação geral da reta que passa pelos pontos:
a) (1,0 ponto) A(1,3) e B(4,7)



b) (1,0 ponto) Construa o gráfico dessa reta.



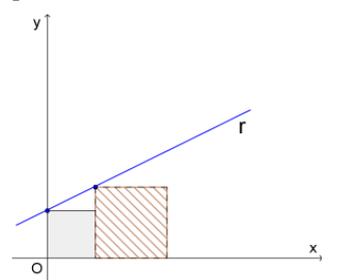
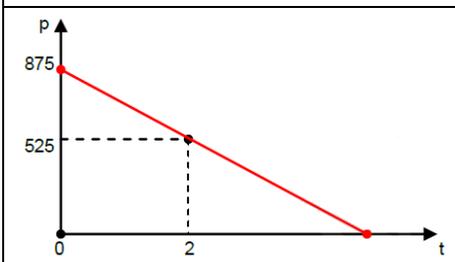
Na etapa 3 da pesquisa, cada turma recebeu um reforço pedagógico distinto, uma empregou o GeoGebra (turma alvo) e outra, não (turma controle).

A turma controle resolveu uma lista de questões em aula. De início, os alunos tiveram dificuldades em interpretar enunciados e aplicar conteúdos anteriores, como conceituar triângulo isósceles, perímetro, área de polígonos, semelhança de triângulos, operações com radicais e equações equivalentes. Mas, à medida que as questões eram debatidas, eles pareceram ter uma pequena melhora na interpretação dos enunciados, além de ficarem mais participativos na execução das atividades.

De maneira geral, ao término do reforço pedagógico, os alunos apresentaram melhor desempenho em identificar as coordenadas de pontos no plano cartesiano, calcular a distância entre dois pontos e construir equações da reta. Mas, continuaram a ter dificuldades em interpretar enunciados, relacionar Geometria Analítica à resolução de situações-problema e a conteúdos anteriores (como Geometria Plana).

Para os alunos, questões com aplicação direta de fórmulas foram mais simples de resolver. Todavia, houve dificuldades em problemas. Por exemplo, em um os alunos tiveram dúvidas em conceituar a área do quadrado para determinar as coordenadas dos vértices dos dois quadrados e em escrever a equação da reta que passa por esses dois pontos (questão 8, Quadro 4). Em outro, não conseguiram interpretar o enunciado e empregar o conceito de semelhança de triângulo na resolução (questão 18, Quadro 4).

Quadro 4. Exemplos de questões de reforço consideradas difíceis.

<p>8) (Retirado na íntegra de PAIVA, 2013) Na figura a seguir estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:</p> <p>a) $x - 2y = -4$ b) $4x - 9y = 0$ c) $2x + 3y = -1$ d) $x + y = 3$ e) $2x - y = 3$</p>	
	<p>18) (Adaptado de ELIAS, 2011) Suponha que o preço p (em reais) de um determinado computador diminua linearmente com o passar do tempo t (em anos), de acordo com o gráfico. Desse modo, é correto afirmar que o número de anos necessários para que esse computador não tenha valor algum é:</p> <p>a) 5 b) 6 c) 4 d) 7</p>

No reforço de conteúdo, a turma alvo foi apresentada ao GeoGebra. Em um primeiro momento, o professor usou o datashow para mostrar tutoriais sobre o software e fornecer dicas gerais sobre seu manuseio. Os alunos, embora não conhecessem o programa, mostraram interesse e ansiedade em manipulá-lo.

Inicialmente, eles exploraram os recursos básicos. Motivados com o emprego do GeoGebra, participaram ativamente do desenvolvimento de doze atividades roteirizadas. Uma delas é exemplificada no Quadro 5.

A cada aula, notou-se um maior empenho dos alunos. Alguns verbalizaram o desejo de criar atividades próprias sobre distância entre dois pontos e equação da reta com o programa, proposta aceita e incentivada pela professora.

Para isso, os alunos inseriram pontos e equações diversas nas atividades roteirizadas, de modo a personalizarem-nas.

Quadro 5. Exemplo de uma atividade roteirizada com uso do GeoGebra.

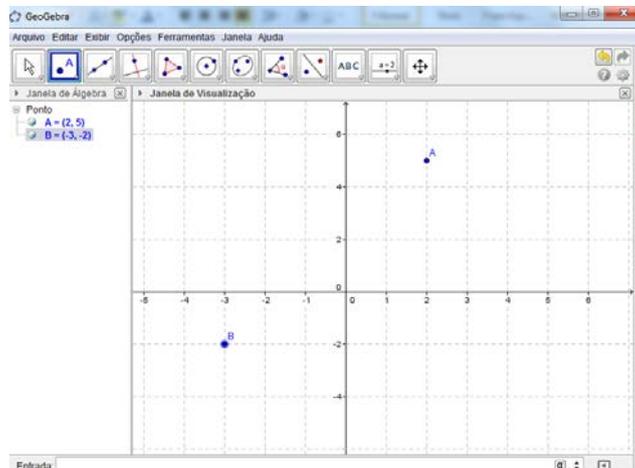
Para calcular o coeficiente angular de uma reta definida por dois pontos, por exemplo, $A(x_a; y_a)$ e $B(x_b; y_b)$, deve-se usar a seguinte expressão:

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{\text{variação das ordenadas}}{\text{variação das abscissas}}$$

- Abra o software GeoGebra. É importante que a tela esteja no formato de uma malha quadrangular com linhas tracejadas com os eixos coordenados desenhados.

- Caso queira movimentar a janela de visualização, clique na opção “Mover” e, em seguida, marque a opção “Mover Janela de Visualização” . Aperte o botão esquerdo do mouse e movimente-o. O ideal é que os eixos coordenados fiquem centralizados.

- Marque dois pontos no plano cartesiano. Procure pela opção “Novo ponto” , digite no campo de entrada as coordenadas de pontos: A(2,5) e B(-3,-2). Caso queira, escolha suas próprias coordenadas.

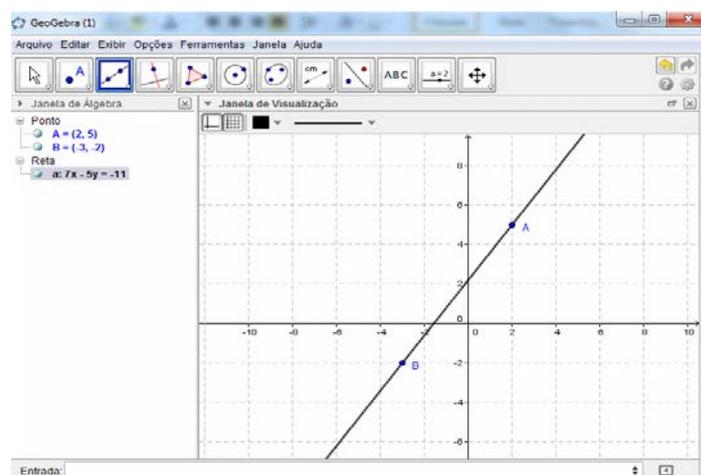


- Observe os pontos A e B, identifique as suas coordenadas e calcule o coeficiente angular da reta definida por eles.

$$A(2,5) \text{ e } B(-3,-2)$$

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{-2 - 5}{-3 - 2} = \frac{-7}{-5} = 1,4$$

- A partir dos mesmos pontos, é possível construir uma reta de A até B, na opção “Reta definida por dois pontos” . Em seguida, clique no ponto A. Neste momento, você observará o desenho de uma reta que se desloca. Para fixá-la clique no ponto B.

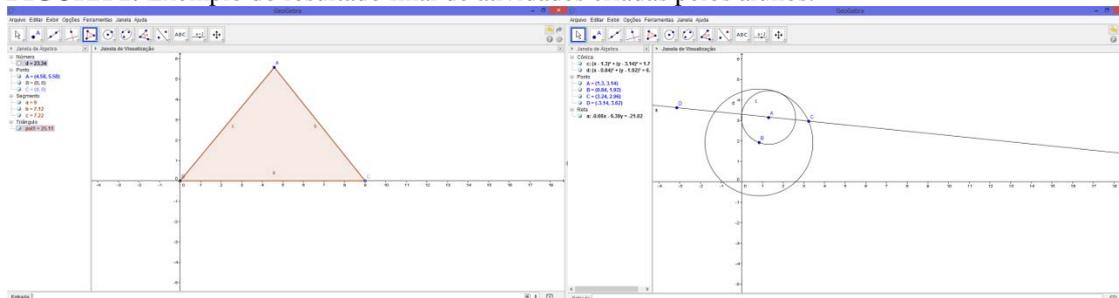


- O GeoGebra permite visualizar a representação gráfica na “Janela de visualização” e a equação na “Janela de Álgebra”.

Outros relacionaram os conteúdos de distância entre dois pontos e equação da reta a figuras geométricas próprias (Figura 1). A iniciativa de criar atividades e chegar a

conclusões sobre as construções, além de gratificante, promoveu o desenvolvimento da autoestima e autonomia do aluno. Benefícios também relatados por Venturini (2009), Lúcio (2013) e Marins (2013).

FIGURA 1: Exemplo do resultado final de atividades criadas pelos alunos.



A interação durante o estudo de matemática também foi propiciada pelas atividades, pois os estudantes sentados lado a lado buscavam conferir se os colegas tinham obtido os mesmos resultados.

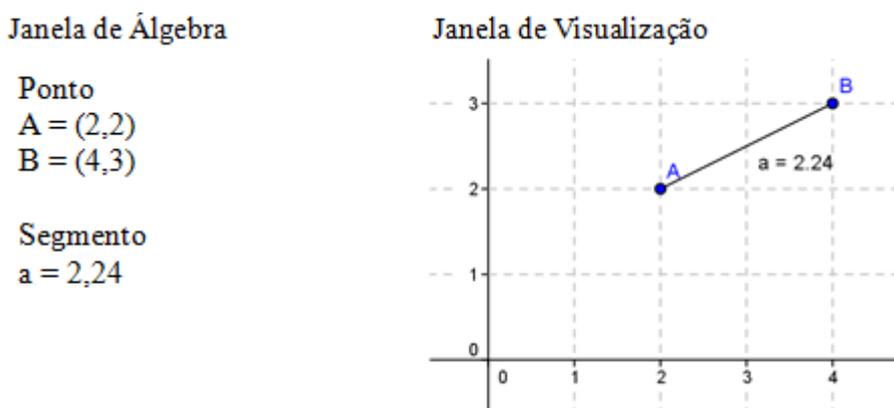
Ao término das atividades com o GeoGebra, a maioria destacou pontos positivos sobre o uso do software, como ser um recurso didático de fácil manuseio, dinâmico e que auxiliou a construção do conhecimento dos conceitos. Outro aspecto importante foi a maior interação professor-aluno para a discussão de conceitos matemáticos, pois, havia dúvidas e debates sobre o conteúdo, mas o aluno participava ativamente.

Em comparação subjetiva entre as duas turmas, na etapa de reforço de conteúdo, pareceu que os alunos da turma alvo relacionaram melhor a teoria com a prática, com facilitação da aprendizagem.

Ao marcarem dois pontos no plano cartesiano para determinar a distância entre eles, os alunos visualizaram, por meio de situações similares, o segmento de reta cuja medida era a distância entre os pontos, dada pela expressão algébrica $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. A representação gráfica os fez lembrar que por dois pontos distintos passa uma única reta.

A possibilidade de mover os pontos no plano cartesiano auxiliou os alunos a concluir que a distância sempre seria positiva, mesmo se as coordenadas dos pontos fossem negativas. A observação simultânea das duas janelas permitiu que percebessem a necessidade de elevar as diferenças das abscissas e das ordenadas dos pontos ao quadrado para obter-se a raiz de um número positivo (Figura 2).

FIGURA 2: Possibilidade de observação simultânea de duas janelas, a de álgebra e a de visualização.



Outra vantagem do GeoGebra foi possibilitar aos alunos moverem um dos pontos da reta para variar a inclinação em relação ao eixo x , com a percepção de que o coeficiente angular da equação reduzida da reta corresponderia à tangente trigonométrica do ângulo formado com o eixo das abscissas.

Mais um benefício do software foi ajudar o aluno a relacionar uma dada situação-problema à aplicação de determinado conteúdo como na questão observada no Quadro 6. A construção da solução com o software facilitou distingui-rem se o problema envolveria cálculo da distância entre dois pontos ou equação da reta. Também favoreceu conectarem a Geometria Analítica a conteúdos anteriores, como triângulos.

Quadro 6. Exemplo de uma atividade roteirizada com uso do GeoGebra.

(Adaptado de DANTE, 2014) Com o GeoGebra, mostre que um triângulo com vértices $A(0,5)$, $B(3,-2)$ e $C(-3,-2)$ é isósceles e calcule o seu perímetro.

Apesar dos pontos positivos, uma desvantagem do software é fornecer diretamente os cálculos aritméticos e algébricos, sem mostrar o desenvolvimento ao aluno. Para mitigar a situação, os alunos devem ser estimulados a transpor para o papel as resoluções.

Depois do reforço pedagógico foi aplicado um pós-teste idêntico para ambas as turmas. Os alunos parecerem concentrados. A turma alvo apresentou melhores médias em todas as questões se comparada à turma controle, como observado na Tabela 2.

Tabela 2: Notas obtidas pelas turmas controle e alvo por questão do pós-teste.

Turma	Média de pontuação obtida por questão do pós-teste								Média Nota (10 pt)	Mediana Nota
	1a (0,5 pt)	1b (0,5 pt)	1c (1 pt)	2 (2 pt)	3a (1 pt)	3b (1 pt)	4 (2 pt)	5 (2 pt)		
Controle	0,22	0,27	0,45	0,55	0,23	0,33	0,11	0,10	2,4	2,0
Alvo	0,36	0,35	0,74	1,21	0,53	0,46	1,00	0,59	5,2	5,0

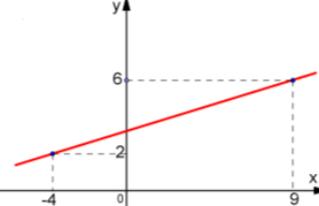
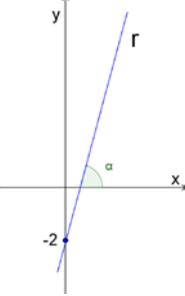
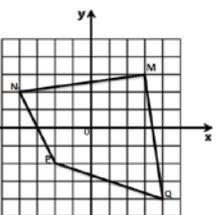
Entre o pré-teste e o pós-teste, a mediana das notas aumentou de 1,0 para 2,0 na turma

controle e de 1,0 para 5,0 na alvo (Tabelas 1 e 2). As diferenças entre o desempenho acadêmico das turmas, provavelmente, ocorreu pelo uso do GeoGebra.

Nas duas turmas, sobretudo na turma alvo, os alunos tiveram melhor desempenho ao marcarem pontos no plano cartesiano, traçarem retas e relacionarem o conteúdo à questões com enunciados objetivos (questões 1 e 2, Quadro 7).

Apesar de superarem alguns obstáculos de aprendizagem, alunos das duas turmas continuaram a não conseguirem interpretar enunciados mais complicados, como o da questão 5 apresentada no Quadro 7. Mas, do total de quarenta e oito alunos pesquisados, somente sete da turma controle não tentaram fazê-la. Entre eles, apenas dois não deixaram nenhuma outra questão do pós-teste em branco.

Quadro 7. Questões do pós-teste.

<p>1) (2,0 pontos) (Adaptada de SOUZA, 2010) Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos: a) (0,5 ponto) $A(2,2)$ e $B(-2,-2)$ b) (0,5 ponto) $C(3,6)$ e $D(2,9)$ c) (0,5 ponto/reta) Agora, desenhe cada uma dessas retas em um mesmo plano cartesiano.</p>	<p>2) (2,0 pontos) A casa de João (J) e de Paulo (P), estão localizadas no mesmo plano cartesiano, XOY, pelo ponto J de coordenadas $(4,-5)$ e pelo ponto $P(-1,7)$. Calcule em metros a distância entre suas casas.</p>
<p>3) (2,0 pontos) (Adaptada de RIBEIRO, 2011) Obtenha a equação geral de cada reta representada nos gráficos a seguir: a) (1,0 ponto)  b) (1,0 ponto) </p>	<p>4) (2,0 pontos) (Retirado na íntegra de PAIVA 2013) A inclinação α da reta r representada abaixo, é tal que $\text{tg } \alpha = 3$. Obtenha a equação reduzida de r.</p> 
<p>5) (2,0 pontos) Um helicóptero sobrevoa uma área do Rio de Janeiro onde foi construído o Túnel da Grota Funda, que liga a Zona Oeste à Barra da Tijuca, com 4 engenheiros para fazer um estudo do local. Foi observado que a área ocupada, na vista superior, formava o quadrilátero $MNPQ$ descrito no plano cartesiano abaixo. Supondo que seja necessária uma obra de contenção das encostas no contorno dessa área, a expressão que representa essa distância é: a) 42 b) $4\sqrt{5} + 15\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{15} + 10\sqrt{2}$</p>	

Os alunos da turma alvo cometeram falhas em regras de sinais no cálculo de determinantes (questões 1 e 3, Quadro 7), potenciação (questão 2, Quadro 7), cálculo algébrico (questão 4, Quadro 7), interpretar situações-problema e identificar coordenadas de vértices de quadrilátero em malha quadriculada (questão 5, Quadro 7). Alunos da turma controle erraram em regra de sinais no cálculo de determinantes (questão 1, Quadro 7), potenciação com números negativos (questão 2, Quadro 7), aplicar conceito de equação geral da reta (questões 1 e 3, Quadro 7), identificar coordenadas de pontos (questões 3 e 4, Quadro 7), conceituar coeficiente angular

motivação, participação e aprendizado aquém do esperado (Tabela 3).

Tabela 3: Percepções da turma controle sobre as aulas de Geometria Analítica.

Questões respondidas pelos alunos	Total de alunos			
	Ótimo	Bom	Regular	Ruim
O que você achou das aulas antes do pré-teste?	0	1	4	16
Como você classificaria a sua participação nas aulas de Geometria Analítica:	1	3	10	7
Como você classificaria a sua motivação nas aulas de Geometria Analítica:	2	3	7	9
Como você classificaria o seu aprendizado de Geometria Analítica:	1	2	5	13
Como você classificaria as atividades após o pré-teste?	0	1	11	9

Vinte e quatro alunos da turma alvo consideraram regulares ou ruins as aulas de Geometria Analítica antes do pré-teste (Tabela 4). As principais razões foram: desgostar de Matemática (12), déficits em pré-requisitos (10), dificuldades em interpretar enunciados de questões (10), as aulas serem chatas (6) e necessidade de fazer exercícios (5). Todavia, apenas cinco mantiveram suas percepções após o uso do GeoGebra (Tabela 4). Os motivos foram não gostar de Matemática (4), não apresentar base nos conteúdos anteriores (5) e ter dificuldade em interpretar enunciados de questões (5).

Segundo os alunos da turma alvo, as aulas com o GeoGebra promoveram motivação, participação e aprendizado. Nenhum considerou o emprego do software negativo.

Tabela 4: Percepções da turma alvo sobre as aulas de Geometria Analítica.

Questões respondidas pelos alunos	Total de alunos			
	Ótimo	Bom	Regular	Ruim
O que você achou das aulas antes do pré-teste?	0	3	5	19
Como você classificaria o estudo de Geometria Analítica sem o uso de software:	0	2	6	19
Como você classificaria a sua participação antes das atividades com o software:	0	3	14	10
O que você achou das aulas depois do pré-teste?	18	4	3	2
Qual a sua opinião sobre o uso do software GeoGebra em aulas de Matemática?	20	5	2	0
Como você classificaria sua participação nas aulas com o software:	17	5	3	2
Como você classificaria o seu aprendizado a partir do software:	15	4	5	3
Como você classificaria a sua motivação nas aulas com o software:	18	5	2	2
Como você classificaria as atividades desenvolvidas nas aulas com o software:	20	5	1	1
Como você classificaria o estudo da Geometria Analítica com o uso de software:	20	4	2	1

Para todos, o manuseio do GeoGebra foi de fácil entendimento. Vinte reputaram ótimo

utilizar o software em aulas de Matemática por ele melhorar a aprendizagem, propiciar a visualização e ajudar na construção de gráficos. Cinco acharam-no bom, mas sentiram faltar de instruções sobre os cálculos algébricos e dois consideraram-no regular por não poderem usá-lo em dias de avaliações (Tabela 4). Muitos alunos (20) consideraram ótimo usar o software para estudar Geometria Analítica.

Quase todos consideraram o software importante na aprendizagem de Matemática por ajudar a entender Geometria Analítica (25), complementar a explicação do professor (25) e dinamizar as aulas (20). Entretanto, para dois ele não interferiria no entendimento pela disciplina ser reputada muito difícil.

Considerações Finais

Em um mundo globalizado onde as tecnologias são rotineiramente utilizadas é natural aproveitar recursos digitais na escola. Existem softwares educativos que podem ser usados no ensino-aprendizagem de Matemática, por exemplo, o GeoGebra. Neste trabalho foram investigados os efeitos de empregar o GeoGebra no estudo de Geometria Analítica e as dificuldades de alunos em distância entre dois pontos e equações da reta.

Duas turmas da 3ª série do Ensino Médio do turno noturno participaram da pesquisa. A metodologia compreendeu cinco etapas. Na primeira, ambas tiveram aulas tradicionais com questões de fixação. Na segunda, um pré-teste foi aplicado. A terceira envolveu reforços pedagógicos distintos – uma resolveu questões em sala de aula e a outra manuseou o GeoGebra no laboratório de informática. Então, um pós-teste foi dado. Na última etapa, os alunos responderam a questionários sobre as atividades.

De início, os alunos tiveram dificuldades em potenciação, regras de sinais em operações aritméticas e no cálculo de determinantes, bem como em aplicar o teorema da distância entre dois pontos. No pré-teste, as medianas das notas nas duas turmas foram iguais a 1,0. Os principais erros foram em construção e análise de gráficos, regra de sinais no cálculo de determinantes e resolução de situações-problema.

Com o reforço pedagógico, ambas as turmas apresentaram melhor desempenho, porque foram revisados pré-requisitos e discutidas dificuldades dos alunos. Todavia, na turma que não manipulou o software, continuaram a prevalecer défices de aprendizado de conteúdos anteriores (como Geometria Plana) e dificuldades em interpretar enunciados.

Com a turma que manipulou o GeoGebra, a principal influência do programa na

aprendizagem foi estabelecer uma ponte entre Álgebra e Geometria, por permitir relacionar facilmente as expressões algébricas às representações gráficas. Ele também ajudou os alunos a identificarem pontos no plano cartesiano, reconhecerem o comprimento do segmento de reta como a distância entre dois pontos e observarem como alterações nos gráficos das retas refletiam-se nos coeficientes de suas equações. O GeoGebra influenciou na superação de dificuldades em Geometria Analítica.

Ir ao laboratório de informática e empregar o GeoGebra provocaram interesse, motivação, participação e interação, e estimularam o desenvolvimento de autoestima e autonomia. Todavia, desenvolver aulas nesse ambiente demanda infraestrutura escolar adequada, mais tempo de aula e atualização contínua do professor para inserção de novos recursos em sua prática didática. Antes do estudo, o laboratório de informática não estava em condições de uso. Foi preciso prepará-lo para a pesquisa. Os computadores foram atualizados e os programas necessários instalados.

Entre o pré-teste e o pós-teste, a mediana das notas aumentou de 1,0 para 2,0 na turma que não manipulou o GeoGebra e de 1,0 para 5,0 na que empregou o programa. Os alunos superaram dificuldades como marcar pontos no plano cartesiano e traçar retas. Mas, nas duas ainda houve erros em cálculos algébricos básicos e regra de sinais no cálculo de determinantes.

Segundo as percepções dos alunos, colhidas por questionário, o software seria de fácil manuseio e interativo, capaz de promover motivação, participação e aprendizado. Eles reportaram efeitos positivos do GeoGebra como ajudar a entender Geometria Analítica, complementar a explicação do professor e dinamizar as aulas. Empregar tecnologias é uma forma de aprimorar o ensino-aprendizagem de Matemática e melhorar o desempenho acadêmico, mas demanda planejamento prévio das aulas e infraestrutura escolar adequada.

Em uma pesquisa futura, com vista a ampliar a análise qualitativa e para compreender melhor a influência do GeoGebra no desenvolvimento cognitivo, poder-se-ia investigar as estratégias adotadas pelo aluno para a criação e resolução de situações-problema. E, então, compará-las com as empregadas por ele na solução de problemas semelhantes propostos em sala de aula.

Referências

- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: edições 70, 1988. 226 p.
- BONJORNO, J.C.; GIOVANNI, J.R. **Matemática completa**. São Paulo: FTD, 2005.
- BORTOLOSSI, H.J. Criando conteúdos educacionais digitais interativos em matemática e estatística com o uso integrado de tecnologias GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 1, p. 28-35, 2012.
- CÂMARA, R.H. Análise de conteúdo: da teoria à prática em pesquisas sociais aplicadas às organizações. **Revista Interinstitucional de Psicologia**, v. 6, p. 179-191, 2013.
- CELESTINO, M.R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear**: as pesquisas brasileiras na década de 90. 2000. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)– Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.
- COLPO, A.G.; BONOTO, D.L.; BERTA, D.M.M.M; SOARES, M.A.S.; CORSINI, M.G.S. Contribuições do GeoGebra no ensino-aprendizagem da Geometria Analítica. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. **Anais eletrônicos...** Ijuí: UNIJUÍ, 2009. p. 3-8. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_11.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2015.
- CORREIA, W.M. **Aprendizagem significativa, explorando alguns conceitos de geometria analítica**: pontos e retas. 2011. 169 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2011.
- COSTA, B.J.F.; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A. A educação matemática no contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional. **Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 50, p. 1095-1116, 2014.
- DANTE, L.R. **Matemática**: contextos e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.
- DI PINTO, M.A. **Ensino e aprendizagem da Geometria Analítica**: as pesquisas brasileiras da década de 90. 2000. 77 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)– Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.
- DIAS, M.S.S. Resolução de problemas geométricos no GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v.1, p. 1-15, 2012.
- ELIAS, A. **Geometria Analítica**: questões contextualizadas. 2011. Disponível em: <<http://www.ambrosioelias.com.br/wp-content/uploads/2011/04/Professor-Ambr%C3%B3sio-Elias-Material-Geometria-Anal%C3%ADtica.pdf>>. Acesso em: 19 jul. 2015.
- FIALHO, E.S.C. **Uma proposta de utilização do software GeoGebra para o ensino de Geometria Analítica**. 2010. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)– Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2010.
- GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- GUEDES, P.C.C. **Aplicação do software GeoGebra ao ensino da geometria analítica**. 2013. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)– Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.
- LIMA, A.S.; SILVA, D.A.; DUARTE, R.C.; SOUZA, G.C. Atividades usando o

software GeoGebra. In: ENCONTRO REGIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DIÁLOGOS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E OUTROS SABERES, 3., 2011, Mossoró, **Anais...** Mossoró: UFRN, 2011. p. 8-9. 1 CD-ROM.

LÚCIO, J.T. **Uso de TICs para o ensino de matemática um estudo com o software GeoGebra.** 2013. 32 f. Monografia (Especialização em Fundamentos da Educação)– Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

MARCONI, M.A.; LAKATOS, E.M. **Fundamentos da metodologia científica.** 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARINS, L.S. **O uso do GeoGebra no ensino da geometria analítica:** estudo da reta. 2013. 47 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)– Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

NASCIMENTO, E.G.A. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: reflexão da prática na escola. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 2012. **Anais eletrônicos...** Uruguai, 2012. Disponível em: <<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf>>. Acesso em: 19 jul. 2015.

PAIVA, M. **Matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAULA, T.O. **O ensino de Geometria Analítica com o uso do GeoGebra.** 2013. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)– Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2013.

REIS, F.S. SANTOS, I.N. Usando tecnologias da informação e comunicação no ensino de geometria analítica plana: explorando os conceitos de feixe de retas paralelas e concorrentes. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, Ouro Preto, v. 1, n. 1, p. 2-7, 2011.

RIBEIRO, J. **Ciência, Linguagem e Tecnologia.** v. 3. São Paulo: Scipione, 2011.

RICHIT, A. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica:** repensando a formação inicial docente em Matemática. 2005. 171 f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática)– Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

RIO DE JANEIRO. **Currículo Mínimo 2012 Matemática.** Rio de Janeiro: Secretaria Estadual de Educação, 2012. 23 p.

RIZZON, K. **Análise da linguagem matemática à geometria analítica do ensino médio.** 2008. 73 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)– Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

SOARES, L.H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do GeoGebra no estudo de funções. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 2, p. 1-15, 2012.

SOUZA, J. **Matemática:** novo olhar. v. 3. São Paulo: FTD, 2010.

TENÓRIO, A.; COSTA, Z.S.S.; TENÓRIO, T. Resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau com e sem o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra**, São Paulo, v. 3, n. 2, p. 104-119, 2014.

TENÓRIO, A.; CORREIA, C.P.; TENÓRIO, T. O estudo de polígonos com o software Régua e Compasso Metal. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 127-154, 2015a.

TENÓRIO, A.; OLIVEIRA, M.E.F.; TENÓRIO, T. A influência do GeoGebra na resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 98-126, 2015b.

VALÉRIO, A.V.; SOUZA, L.R. Ensino da geometria analítica com o uso do software GeoGebra. **Revista Eletrônica de Educação e Ciência**, Avaré, v. 3, n. 1, p. 7-14, 2013.

VARGAS, L. G. **Uso do software Geogebra**: uma proposta no ensino da Matemática. 2010. 42 f. Monografia (Especialização em Mídias Integradas na Educação)– Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

VENTURINI, D.M. **Geometria Analítica e Geogebra**: uma combinação perfeita na exploração de conceitos e propriedades. 2009. 32 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática)– Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2009.

XAVIER, S.A; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A. Uma proposta de ensino-aprendizagem das leis dos senos e dos cossenos por meio do software Régua e Compasso. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v.7, n. 3, p. 158-190, 2014.

YIN, R.K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. São Paulo: Bookman, 2010.