Funções trigonométricas e números complexos: uma abordagem possível na Educação Básica

Trigonometric functions and complex numbers: a possible approach in Basic Education

REINALDO OLIVEIRA REIS JÚNIOR[1]
EDNAILTON SANTOS SILVA[2]

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem sobre a organização dos conceitos de Trigonometria que servem de referência para a exploração de propriedades no conjunto dos números complexos. Para evidenciarmos essas relações, elaboramos uma Sequência Didática, contendo um Dispositivo Experimental com cinco tarefas em uma sessão unitária, necessárias para a utilização dos conceitos referidos em um ambiente computacional, com o software GeoGebra, dispondo inclusive da resolução das tarefas em ambiente papel/lápis. Neste último, destacamos as características e comandos inerentes às possíveis estratégias de resolução confrontando com as técnicas utilizadas naquele. Dessa forma, evidenciamos que há interesse neste trabalho, uma vez que, o conjunto dos números complexos apresenta-se empiricamente esquecido das salas de aula. Esperamos assim, fornecer subsídios para o ensino e aprendizagem da Trigonometria mediado pelas ferramentas tecnológicas na Educação Básica.
Palavras-chave: *Ambientes de aprendizagem; Trigonometria; Números complexos.*

Abstract

We present an approach to the organization of the concepts of trigonometry that serve as reference for the exploration of properties in the set of complex numbers. To evidence these relationships, we developed a Didactic Sequence, containing an Experimental Device with five tasks in a unitary session, necessary for the use of the concepts referred to in a computing environment, with GeoGebra software, providing even the resolution of tasks on paper environment/pencil. In the latter, it highlights the features and commands inherent to the possible resolution strategies confronting the techniques used in that. Thus, we noted that there is interest in this work, since the set of complex numbers is presented empirically forgotten the classroom. We hope to provide grants for teaching and learning Trigonometry mediated by technological tools in the Basic Education.
Keywords: *Learning environments; Trigonometry; Complex numbers.*

Introdução

As representações assumem papel importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente no que tange aos conceitos que envolvem a Trigonometria. Nesse contexto, é importante que os alunos compreendam que existe uma variedade de

[1] Universidade Estadual de Santa Cruz. Email: oliveira981@hotmail.com
[2] Universidade Estadual de Santa Cruz. Email: edysantos-1@hotmail.com

representações para as ideias matemáticas e que adquiram a capacidade de passar informações de uma forma de representação para outra, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema, em particular no estudo da Trigonometria, domínio da Matemática onde existe uma grande riqueza de representações (Kieran, 2007). Ante estes fatores, é válida a observação de que os tópicos que abrangem a Trigonometria são contemplados em praticamente todas as instituições de ensino, desde a Educação Básica (EBa) até o Ensino Superior, ratificado tanto nos Projetos Políticos Pedagógicos (PPP, quando referido à Educação Básica) quanto nos Projetos Acadêmicos Curriculares (PAC, quando referido ao Ensino Superior). Em se tratando do Ensino Superior, o *habitat* da Trigonometria norteia algumas disciplinas principalmente no que diz respeito ao tópico *funções trigonométricas*. Além disso, evidenciamos que as *funções* trigonométricas, são objetos de estudo que favorecem a resolução ou modelagem de situações do cotidiano e de domínios científicos diversos (como aplicações na Física, em ondulatória, por se tratar de um fenômeno descrito por funções periódicas), bem como são utilizadas em outros campos conceituais da Matemática como os *Números Complexos*. Dessa forma, a tentativa de relacionar conteúdos propostos no Ensino Superior para a Educação Básica é possível, uma vez que, a organização dos conceitos de um dado conteúdo matemático oferece ao professor "caminhos" para a adequação destes a uma linguagem didática e acessível. Porém, para o desenvolvimento deste trabalho de forma efetiva é necessário ao docente, além de atualizar-se acerca destes conhecimentos, refletir sobre suas *escolhas metodológicas* para práticas em sala de aula, uma vez que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática,

> [...] a formação do matemático demanda do aprofundamento da compreensão dos significados matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. [...] É preciso que estes conhecimentos também sejam considerados ao longo de sua formação como professor. (Brasil, 1999, p. 4)

Assim, a fim de correlacionar a temática proposta com o universo teórico adequado optamos por elaborar uma Sequência Didática (SD) baseada na análise institucional em torno dos conceitos de Trigonometria (com atenção especial às funções trigonométricas) aplicados aos Números Complexos, explorando assim atividades que contenham elementos que favoreçam a abordagem destas ideias na EBa proporcionando também a utilização do *software* GeoGebra[3]. A seguir, apresentamos a conceitos de acordo com a

---

[3] O GeoGebra, é um software de geometria dinâmica, desenvolvido por pesquisadores da Universidade americana Florida Atlantic University. Este software vem sendo utilizado no

análise de um livro didático proposto para a EBa, bem como algumas definições que os norteiam, e em outras duas seções seguintes destacamos algumas referências que justificam a proposta deste trabalho, além da apresentação das tarefas que compõe a SD.

1. Funções trigonométricas e os números complexos

A abordagem das funções trigonométricas nos números complexos contempla o tópico Forma Trigonométrica ao Polar dos Números Complexos. Nesse sentido, como pré-requisito para o desenvolvimento deste conteúdo faz-se necessário recorrer imediatamente à organização dos conceitos relativos às funções trigonométricas. Assim, de forma sucinta apresentamos tal abordagem abaixo.

Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos

A representação trigonométrica dos números complexos é um caso particular da utilização das coordenadas polares. Na representação trigonométrica, um número z é determinado pela norma do vetor que o representa e pelo ângulo que faz com o semieixo positivo das abcissas. Ao ângulo θ chama-se argumento de z e a ρ dá-se o nome de módulo de z, com $z = a + bi$ e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observe na representação abaixo:

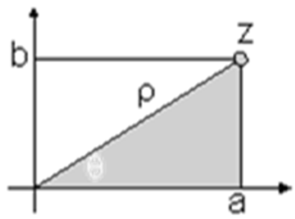

Figura 1: Representação do módulo e do argumento do número complexo z.

A partir das relações trigonométricas obtêm-se: $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho}$, onde manipulando algebricamente temos que: $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\operatorname{sen}\theta$. Substituindo o valor de a e b encontrados em $z = a + bi$, segue que, na forma trigonométrica, $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. Assim, duas operações podem ser definidas utilizando a forma trigonométrica dos números complexos: a multiplicação e a divisão.

Ensino da Matemática nas instituições da Educação Básica e Superior. Possui uma infinidade de ferramentas capazes de influenciar no referido ensino. Além de editado em uma versão em língua portuguesa, este software apresenta mais uma valia: é de domínio livre (gratuito), disponível pelo link http://www.geogebra.org/cms/download.

Dados os números complexos não nulos $z_1 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\alpha_2 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)$ calculemos o produto desses números e o quociente entre eles.

Multiplicação de Números Complexos na Forma Trigonométrica

$$z_1.z_2 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1).|z_2|(\cos\alpha_2 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)$$
$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 + i^2\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)$$
$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 - \mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)$$
$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|[\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + i(\cos\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2)]$$

Porém, duas identidades trigonométricas são notáveis na última equação, são elas:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2$$
$$\mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2$$

Dessa forma,

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\,\mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Portanto, o produto de dois números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica é o número cujo módulo é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2 e cujo argumento é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2.

Divisão de Números Complexos na Forma Trigonométrica

Consideremos inicialmente que $\frac{z_1}{z_2}$, com $z_2 \neq 0$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)}.\frac{(\cos\alpha_2 - i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 - i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2\cos\alpha_1 + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 - i^2\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)}{\cos^2\alpha_2 - i^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha_2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{[\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + i(\mathrm{sen}\,\alpha_2\cos\alpha_1 + \mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2)]}{\cos^2\alpha_2 + \mathrm{sen}^2\,\alpha_2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + i(\mathrm{sen}\,\alpha_2\cos\alpha_1 + \mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2)]$$

Porém, duas identidades trigonométricas são notáveis na última equação, são elas:

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$$
$$\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2) = \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_1$$

Portanto, o quociente entre dois números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica é o número cujo módulo é igual ao quociente entre os módulos de z_1 e z_2 e cujo argumento é igual à diferença entre os argumentos de z_1 e z_2.

Da multiplicação de números complexos em sua forma trigonométrico, evidenciamos também duas propriedades relevantes estudadas pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754), denominadas posteriormente de fórmulas de Moivre.

Potenciação de Números Complexos na Forma Trigonométrica

Note que o produto de *n* números complexos $z_1.z_2.z_3...z_n$ é dado por:

$$z_1.z_2.z_3...z_n =$$
$$|z_1||z_2||z_3|...|z_n|[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n) + i\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n)]$$

Mas, e se $z_1 = z_2 = z_3 = z_n$, temos, nesse caso, $z^n = \underbrace{z.z.z...z}_{n \text{ fatores}}$, isto é,

$$z^n = z.z.z...z = |z||z||z|...|z|[\cos(\alpha + \alpha + \alpha + ... + \alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha + \alpha + \alpha + ... + \alpha)]$$

Como, $|z||z||z|...|z| = |z^n|$ e $\alpha + \alpha + \alpha + ... + \alpha = n\alpha$, então:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha)]$$

A equação acima, na organização praxeológica da abordagem das funções trigonométricas nos números complexos, é denominada de **1ª Fórmula de Moivre.** Portanto, portanto z^n, com $n \in \mathrm{N}$ e $z \neq 0$ na forma trigonométrica, é o número cujo módulo é igual ao módulo de z elevado a *n* e cujo argumento é igual ao de z multiplicado por *n*. Esta relação também é válida para expoentes inteiros negativos.

Radiciação de Números Complexos na Forma Trigonométrica

Dado um número complexo $z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, não nulo, pretendemos calcular $\sqrt[n]{|z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}$, ou seja, a raiz *n*-ésima de z com $n \in \mathrm{N}$ e $n \geq 2$. Calcular a raiz *n*-ésima de um número complexo na forma trigonométrica consiste em determinar o número complexo w, tal que, $w^n = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, isto é, $w^n = z$.

Fazendo, $w = |\mathrm{w}|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$, temos:

$$w^n = z \Leftrightarrow [|w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)]^n = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Pela 1ª Fórmula de Moivre, segue que:

$|w|^n [\cos(n\beta) + i\,\mathrm{sen}(n\beta)] = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$

Como números complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes:

(i) $|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$;

(ii) $n\beta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$;

Como $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ e $\beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$, então:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}.\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Essa relação é conhecida como a **2ª Fórmula de Moivre**. Para $k = 0,1,2,3,...,(n-1)$, temos argumentos diferentes entre si e pertencentes ao intervalo [0, 2π[. Consequentemente, obtemos valores diferentes para w, ou seja, $w_0, w_1, w_2, w_3, ..., w_{n-1}$ distintos entre si, o que significa que há *n* raízes distintas para *k* de 0 a *n-1*. Note que, para valores maiores que *n-1*, os valores de w começam a se repetir. Assim, evidenciados os tópicos de funções trigonométricas presentes na abordagem dos números complexos na EBa, destacaremos a seguir o quadro teórico utilizado como justificativa para a elaboração de uma intervenção para o ensino-aprendizagem de tais conceitos.

2. Quadro teórico

Henriques, Serôdio (2013) concebem um quadro teórico, “como o referencial teórico de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que se pretende desenvolver”. Assim, este trabalho está fundamentado nos pressupostos teóricos da Abordagem Praxeológica da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, com foco na noção de Sequência Didática (SD) e na Transposição Didática, pois pretendemos relacionar um saber científico – as Funções de uma Variável Complexa – com um saber escolar. A seguir, evidenciamos os principais fios condutores dessas abordagens no sentido inverso apresentado acima.

A transposição didática

Transposição didática é um instrumento que possibilita transformar o saber sábio, ou *conhecimento científico*, em saber ensinado, ou *conhecimento escolar* (Polidoro; Stigar, 2010). Nesse sentido, deve-se compreender o conhecimento científico para, a partir do processo de análise, modificar sua forma mantendo os aspectos essenciais de seu conteúdo, e por fim, estabelecer o saber ensinado, isto é, aquele que pode ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos. Três etapas são notáveis e fundamentais no processo de transposição didática, são elas: *compreensão* e *aprofundamento* do *saber sábio* (aquele que os cientistas estabelecem; o conhecimento difundido nas Universidades); *transposição* para o *saber ensinar* (o conhecimento que está nos livros didáticos); e por meio desta última etapa, *transformá-lo* no *saber ensinado* (aquele que acontece em sala de aula). Assim, a Teoria da Transposição Didática mostra-se importante no ponto de vista da metodologia a ser adotada pelo docente. No que se refere ao preparo das aulas, por exemplo, deve haver a preocupação em como organizá-las, redigi-las e como contextualizá-las, uma vez que, em essência o trabalho de transposição didática diz respeito aos saberes. Uma forma de integrar os conteúdos desejáveis para uma aula e contribuir para o construtivismo por parte dos alunos (formulação de hipóteses e validação dos conhecimentos) perpassa pela elaboração de Sequências Didáticas. Passaremos ao estudo da abordagem referente a esta metodologia de ensino/pesquisa.

3. Sequência Didática (SD)

Uma SD tangencia fortemente o conceito de *análise institucional* em torno dos objetos de estudo nela envolvidos, afirmam Nagamine, et al. (2011). Ela deve abarcar sujeitos (como estudantes, professores, etc.) de uma dada instituição de referência.

Sequência Didática, o que é?

Entendendo uma SD como um dos aspectos da Engenharia Didática[4], Henriques (2001) propõe a seguinte definição:

> "Uma sequência didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada situação, problema ou tarefa [constituinte de uma praxeologia]".

[4] A *engenharia didática*, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na *concepção, realização, observação e análise sequencial de atividades de ensino* (Artigue, 1988).

As análises matemáticas/didáticas destacam as resoluções possíveis, a forma de controle e os resultados esperados em cada situação, pré-requisitos e competências. Estes são, portanto, parte da *análise a priori* e desenvolvem-se de acordo com a *praxeologia de referência* do objeto de estudo.

Organização de uma Sequência Didática

Consideramos cinco momentos essenciais no desenvolvimento de uma SD: *análise preliminar* (ou *institucional*), *organização do dispositivo experimental* (*DE*)[5], *análise a priori*, *aplicação da SD* e *análise a posteriori*.

1. Na *análise institucional* a *SD* é idealizada com base nos objetos de estudo reconhecidos na instituição de referência.
2. Na *organização do dispositivo experimental* (DE) consideramos as tarefas correspondentes a praxeologia destacada na análise institucional.
3. Na *análise a priori* estudamos as condições de realização, da caracterização dos objetivos específicos e da explicitação das técnicas institucionais de realização de cada tarefa, colocando em evidência as variáveis didáticas, estratégias e soluções possíveis, resultados esperados, pré-requisitos e competências.
4. Na *aplicação da SD* observamos as relações pessoais com o objeto de estudo, com poucas ou nenhumas intervenções do pesquisador. É neste momento que constituímos um protocolo experimental[6] a partir das práticas efetivas dos alunos/estudantes.
5. Na *análise a posteriori* analisamos as práticas institucionais dos sujeitos envolvidos na pesquisa, com base no protocolo experimental.

O confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* deve possibilitar a discussão de algumas questões de pesquisa, reflexões sobre o papel da instituição de referência no aprendizado dos sujeitos envolvidos na pesquisa, bem como contribuir na realização de outras pesquisas. A evolução no DE deve permitir acompanhar a aprendizagem dos

[5] É o instrumento de análise de práticas institucionais em torno do objeto de estudo utilizado pelo pesquisador.

[6] O protocolo experimental é um documento construído pelo pesquisador durante as investigações. Esse documento é constituído de manuscritos de alunos/estudantes, filmagens, transcrições de entrevistas faladas, entrevistas escritas, arquivos de computadores etc. A construção do protocolo experimental é essencial em pesquisas educacionais e deve constar como anexo na versão final do manuscrito da pesquisa.

sujeitos *“X”* envolvidos, de uma tarefa para outra, com intenções a um dado objeto *“O”***,** na mesma sessão, e/ou de uma tarefa para as outras de sessões distintas, delineado a relação *R(X,O)*. A Tabela (1) resume a organização do DE duma SD. Nesta organização, cada *ki* representa o número de tarefas que compõem cada uma das P sessões da SD.

Sessão I	→	**Sessão II**	→	**...**	→	**Sessão P**
T1		**T1**		**...**		**T1**
T2		**T2**		**...**		**T2**
. . .		. . .		. . .		. . .
Tk_1		**Tk_2**		**...**		**Tk_p**

Quadro 1: Organização do DE duma Sequência Didática

Deste quadro, surge um outro que resume a organização de uma sessão. A sequência que analisaremos é baseada nesta organização, característica de uma sequência didática unitária (SDU). Apresentamos a seguir a SD deste trabalho.

Sessão I	**Objetivos da Sessão I**
T1	Objetivos específicos da T1 Apresentação da análise *a priori*. Destacar variáveis didáticas de situações; estratégias de resolução, corretas ou não da tarefa com as respectivas resoluções; escolha de possíveis estratégias pelos estudantes; observação dessas estratégias pertinentes na resolução do estudante com o objetivo da pesquisa.
T2	
. . .	
Tk_1	

Quadro 2: Organização de uma sessão experimental

Dispositivo Experimental (DE)

O DE que apresentamos a seguir é organizado com 5 tarefas, T1, T2, ..., T5, característica de uma Sequência Didática Unitária SDU e poderá ser proposta aos estudantes de uma instituição de aplicação da EBa em uma única sessão.

Dispositivo experimental para análise de práticas de estudantes sobre estudo da **abordagem das funções trigonométricas nos números complexos.**
Professor da turma (opcional):

Nome do aluno (opcional):	Data: / /2014
Em cada tarefa abaixo, responda-as, descrevendo e justificando suas estratégias de resolução em cada caso.	

Sessão 1

T1.	Calcular o argumento, aqui denominado de θ, do número complexo definido por $z = 1 + \sqrt{3}i$. Em seguida, representar graficamente no *software* GeoGebra e destacar o seu respectivo módulo utilizando as ferramentas do mesmo.
T2.	Escrever o número complexo definido por $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ na *forma trigonométrica* e, em seguida, representar graficamente no *software* GeoGebra e destacar o seu argumento utilizando as ferramentas do mesmo.
T3.	Sejam os números complexos dados: $z_1 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ e $z_2 = 4(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$, calcular o produto e o quociente destes utilizando a sua forma trigonométrica.
T4.	Seja o número complexo definido por $z = 2(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$, calcular a potência referente a z^6.
T5.	Determinar as raízes de ordem cúbica do número complexo definido por $z = 8(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2})$.

* * *

A seguir passaremos à realização das soluções sequenciais das tarefas propostas neste dispositivo.

Análise *a priori* das tarefas propostas no DE

Como vimos na organização de uma SD, nessa parte estudamos as condições de realização, caracterização dos objetivos específicos e das técnicas institucionais de realização de cada tarefa, colocando em evidência as variáveis didáticas, estratégias e soluções possíveis, resultados esperados, pré-requisitos e competências. A primeira tarefa apresenta o seguinte enunciado:

T1.	Calcular o argumento, aqui denominado de θ, do número complexo definido por $z = 1 + \sqrt{3}i$. Em seguida, representar graficamente no *software* GeoGebra e destacar o seu respectivo módulo utilizando as ferramentas do mesmo.

Objetivo de T1.: calcular o argumento de um dado número complexo e favorecer a conversão entre os registros algébrico e gráfico por meio do software GeoGebra.

Resolução: Inicialmente, calculamos o módulo de z

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Agora, calculamos o valor do argumento principal θ:

$$\begin{cases} sen\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad => \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Utilizando o *software* GeoGebra: na interface do GeoGebra, inserir no **Campo de Entrada** o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$. Marcar a origem do sistema de coordenadas com a ferramenta **Novo Ponto**. Em seguida, construir com a ferramenta **Segmento de Reta** o segmento correspondente à distância da origem ao afixo do número complexo. A essa distância chamaremos de módulo de z. Como resultado final da construção, temos:

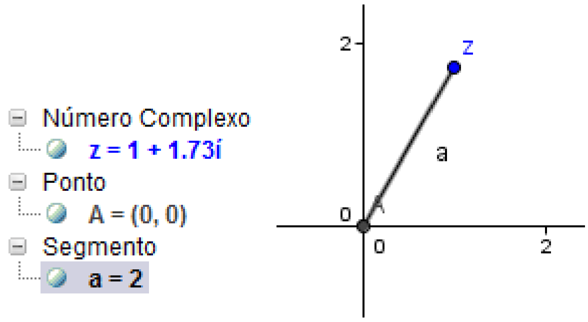

Figura 2: Resolução de T₁: representação no software GeoGebra do módulo de z

A segunda tarefa solicita:

T2.	Escrever o número complexo definido por $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ na *forma trigonométrica* e, em seguida, representar graficamente no *software* GeoGebra e destacar o seu argumento utilizando as ferramentas do mesmo.

Objetivo de T2.: calcular o argumento de um dado número complexo e favorecer a conversão entre os registros algébrico e gráfico por meio do software GeoGebra.

Resolução: inicialmente, calculamos o módulo e o argumento de z.

$$|z| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$$

$$\begin{cases} sen\ \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad => \theta = \frac{\pi}{3}$$

Utilizando o *software* GeoGebra: na interface do GeoGebra, inserir no **Campo de Entrada** o número complexo $z = 4 + 4\sqrt{3}i$. Marcar a origem do sistema de coordenadas com a ferramenta **Novo Ponto**. Em seguida, construir com a ferramenta **Segmento de Reta** o segmento correspondente à distância da origem ao afixo do número complexo. A essa distância chamaremos de módulo de z. Para a representação do argumento, marcar o ponto referente ao valor da parte real de z no eixo-x. No sentido horário, utilizando a ferramenta **Ângulo**, determinar o argumento de z. Como resultado final da construção, temos:

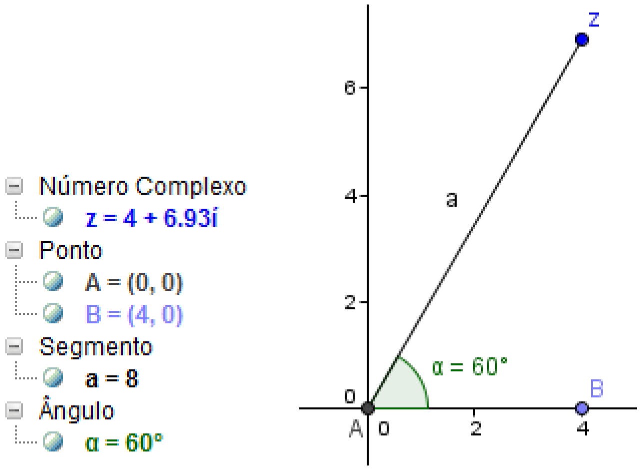

Figura 3: Resolução de T2: representação no software GeoGebra do módulo e do argumento de z

A terceira tarefa apresenta o seguinte enunciado:

T3.	Sejam os números complexos dados: $z_1 = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$ e $z_2 = 4(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$, calcular o produto e o quociente destes utilizando a sua forma trigonométrica.

Objetivo de T3.: calcular o produto e o quociente entre dois números complexos favorecendo a iteração com a forma trigonométrica dos números complexos.

Resolução:

(i) $z_1 . z_2 = 2 . 4 . [\cos(60° + 30°) + i\text{sen}(60° + 30°)]$

$= 8(\cos 90° + i\text{sen} 90°)$

$= 8i$

(ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4} . [\cos(60° - 30°) + i\text{sen}(60° - 30°)]$

$= \frac{1}{2}(\cos 30° + i\text{sen} 30°)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

Para a quarta tarefa temos o seguinte enunciado:

T4.	Seja o número complexo definido por $z = 2(\cos 50° + i\,\text{sen}\,50°)$, calcular a potência referente a z^6.

Objetivo: calcular, utilizando a **1ª Fórmula de Moivre**, a potência de um número complexo.

Resolução: aplicando a 1ª Fórmula de Moivre:

$z^6 = 2^6 \,.\, [\cos(6\,.\,50°) + i\mathrm{sen}(6\,.\,50°)]$

$= 64(\cos 300° + i\mathrm{sen}300°)$

Como cos300° = cos(360° - 300°), e sen300° = - sen(360° - 300°), então:

$z^6 = 64[= \cos(360° - 300°) - \mathrm{sen}(360° - 300°)]$

$= 64(\cos 60° - \mathrm{sen}60°)$

$= 32 - 32\sqrt{3}i$

A quinta e última tarefa solicita:

T5.	Determinar as raízes de ordem cúbica do número complexo definido por $z = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2})$.

Objetivo: determinar as raízes de ordem cúbica de um número complexo utilizando a **2ª Fórmula de Moivre**.

Resolução: Como z já está na forma trigonométrica, aplicamos diretamente a **2ª Fórmula de Moivre**:

$$W_k = \sqrt[3]{8}\,.\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+k.2\pi}{3}\right) + i sen\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+k.2\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + k.\frac{2\pi}{3}\right) + i sen\left(\frac{\pi}{2} + k.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Como n = 3, temos k = 0, k = 1 ou k = 2.

$$K = 0 \;\Rightarrow\; 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 0.\frac{2\pi}{3}\right) + i sen\left(\frac{\pi}{2} + 0.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[\cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}\right] = 2i$$

$$K = 1 \;\Rightarrow\; 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 1.\frac{2\pi}{3}\right) + i sen\left(\frac{\pi}{2} + 1.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i sen\frac{7\pi}{6}\right] = -\sqrt{3} - i$$

$$K = 2 \;\Rightarrow\; 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2.\frac{2\pi}{3}\right) + i sen\left(\frac{\pi}{2} + 2.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i sen\frac{11\pi}{6}\right] = \sqrt{3} - i$$

Portanto, as raízes cúbicas de z são $2i$, $-\sqrt{3} - i$ e $\sqrt{3} - i$.

Geometricamente as raízes cúbicas de z estão sobre uma circunferência de raio $\sqrt[3]{|z|} = 2$ centrada na origem. Nesse caso, w_0, w_1 e w_2 dividem essa circunferência em 3 arcos congruentes de 120°, e são vértices de um triângulo equilátero. Ressaltamos que além da busca pela resposta aos questionamentos dos problemas propostos, outras possibilidades sejam levantadas, dentre as indagações que podem surgir durante a interação dos alunos ao longo da aplicação deste DE. Esses questionamentos podem ser registrados, bem como a sua justificativa. Nesse sentido, após a aplicação na instituição de referência/aplicação outra etapa relativa à análise de uma SD deve ser observada. Falamos então da análise *a posteriori*, cujos momentos ficam como perspectivas futuras de pesquisa.

Considerações finais

No presente trabalho, apresentamos uma Sequência Didática (SD) composta de um dispositivo experimental (DE) constituído de cinco tarefas que favorecem a exploração da abordagem das funções trigonométricas nos números complexos. Sabemos que um conteúdo como as Funções de uma Variável Complexa encontra-se atualmente afastado da EBa, e isto não ocorre por acaso: a base deste conteúdo firma-se em conceitos, leis, teorias e teoremas que servem para a demonstração de conceitos matemáticos. Reservá-lo ao Ensino Superior é algo compreensível, uma vez que para resolver problemas complexos, é necessário o conhecimento destes teoremas, e como consequência, fazer a demonstração do problema apresentado mediante a sua aplicação. Mesmo assim, é possível fazer a apresentação de tal conteúdo a estas séries, levando-se em consideração o modo de ensino, a metodologia. Na EBa não há a necessidade da apresentação de tais teoremas, nem um aprofundamento maior no conteúdo, mas sim, fazer com que o aluno saiba da existência do mesmo, e que lide com conceitos básicos, que poderão, futuramente, auxiliar na aprendizagem e no estudo aprofundado dos números complexos, em especial das Funções de uma Variável Complexa. Dentre as tarefas propostas nesta SD, outras podem ser inseridas. No entanto, as que aqui foram analisadas e quando aplicadas na EBa, devem favorecer a familiarização com alguns conceitos, e em último caso, se isso não ocorrer, uma vez que estaremos lidando com conteúdos que diferem do currículo normativo proposto para a EBa, possibilitaremos o desenvolvimento habilidades possíveis, necessárias e fundamentais ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, em especial dos números complexos, que consiste na *visualização e conversão de registros*. Com a abordagem destes tópicos, acreditamos que se pode fomentar o desenvolvimento desta habilidade e concluímos que sim, é possível incluir conteúdos do Ensino Superior na EBa.

Referências

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTA. (2000) *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática, Secretaria de Educação Fundamental, Brasília. MEC/SEF.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. (1999). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática*, Bacharelado e Licenciatura. Brasília. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 02 jun. 2014.

CHEVALLARD, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique.* Recherches en Didactique des Mathématiques. 12 (1), 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1999), *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.* Recherche en Didactique des Mathématiques. V. 19/2, p. 221-266.

HENRIQUES, A. (2006). *L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple.* UJF-Grenoble, Lab. Leibniz.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. (2007). *Referências Teóricas da Didática Francesa: Análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple.* Educação Matemática Pesquisa, v. 9, p. 51-81.

RIBEIRO, J. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia,* 3: ensino médio / Jackson Ribeiro. – São Paulo: Scipione, 2010.