

Quádruplas Harmônicas, o Círculo e a Esfera de Apolônio, suas abordagens e construções no GeoGebra

Harmonic Quadruples, the Circle and the Sphere of Apollonius, its approaches and constructions in GeoGebra

ERIVALDO FERREIRA DE MORAIS JÚNIOR¹

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo acerca de conhecimentos importantes das geometrias euclidiana, analítica e projetiva, relacionando-os com nossos objetos principais: as quádruplas harmônicas e o Círculo de Apolônio. Estendemos naturalmente esses conceitos culminando na Esfera de Apolônio. Para tanto, usamos um importante software de geometria dinâmica: o GeoGebra. Este nos permitiu observar, em detalhes, o Círculo e a Esfera de Apolônio, suas posições relativas e possíveis degenerações. Ao utilizar softwares como GeoGebra, percebeu-se o quanto eles se tornam aliados para um aprendizado significativo e concreto dos conhecimentos abstratos da Geometria.

Palavras-chave: *Quádruplas harmônicas; Círculo e Esfera de Apolônio; GeoGebra.*

Abstract

In this paper, conducted a study about important concepts of Euclidian, analytical and projective geometry, relating them to our main objects: the harmonic quadruples and Circle of Apollonius. Naturally extend these concepts culminating in Apollonius Sphere. To do so, we use an important software of dynamic geometry: GeoGebra. This allowed us to observe, in detail, the Circle and the Sphere of Apollonius, their relative positions and possible degenerations. By using software like GeoGebra, it has been realized how much they become allies for a meaningful and concrete learning of the abstract knowledge of Geometry.

Keywords: *Harmonic quadruples; the Circle and the Sphere of Apollonius; GeoGebra.*

Introdução

A Matemática desempenha papel fundamental na formação de cidadãos capazes de compreender o mundo em que vivem e de se comunicar em sociedade, pois ela está conectada a diversas áreas do conhecimento e presente no cotidiano das pessoas. Sendo assim, o conhecimento matemático constitui uma ferramenta de grande aplicabilidade e deve ser amplamente explorado e adaptado de acordo com a necessidade, devendo portanto, ser vista como uma ciência viva, em constante (trans)formação. Um bom exemplo de sua mutação é o desenvolvimento tecnológico estreitamente associado aos tradicionais conceitos matemáticos, destacando-se o GeoGebra, um *software* criado e

¹ IFPE - Instituto Federal de Pernambuco - e-mail: efmoraisjunior@gmail.com

desenvolvido para, dentre muitas funções, auxiliar no estudo e ensino de Geometria, estudo esse que nos permite interpretar e compreender melhor as formas que nos cercam e o mundo em que vivemos. O conhecimento geométrico tem papel fundamental para a compreensão de conceitos vinculados à Matemática, bem como a outras áreas do conhecimento.

[...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas da representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1998, p.94)

Nessa perspectiva, os recursos tecnológicos podem oferecer uma grande contribuição, pois atestam com uma precisão invejável, conceitos até então difíceis de construir e de visualizar.

Aqui, exploramos conceitos importantes da Geometria como divisão de segmentos, lugares geométricos, círculo e esfera (e suas equações) e o uso do GeoGebra. Correlacionamos todos esses conceitos com um estudo dirigido ao objeto principal do trabalho: as quádruplas harmônicas, o círculo e a esfera de Apolônio. Tal programa, que pode ser facilmente baixado em seu sítio eletrônico (www.geogebra.org) na sua versão mais atual, como também está disponível nas lojas de aplicativos para *smartphones* e *tablets*. Cabe salientar o quanto o *software* GeoGebra foi útil na construção, demonstração e visualização do propósito de estudo. Com ele, todos os argumentos que Apolônio usou há mais de dois milênios para conjecturar o teorema que mais tarde, com a evolução da geometria euclidiana e criação da geometria analítica no século XVII, puderam ser facilmente provados. No entanto, nenhuma das demonstrações para o problema já feitas é tão dinâmica quanto a que pretendemos mostrar neste trabalho, com o valioso auxílio do GeoGebra.

1. Quádruplas Harmônicas

Para que possamos chegar no Círculo de Apolônio (e posteriormente na Esfera de Apolônio) inicialmente vamos definir uma quádrupla harmônica.

Dizemos que os pontos C e D de uma reta \overleftrightarrow{AB} e distintos de A e B , dividem harmonicamente o segmento \overline{AB} , se

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

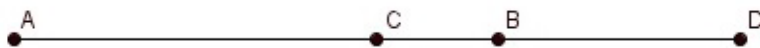


FIGURA 1: Conjugados harmônicos

FONTE: O autor

C e D são os conjugados harmônicos de \overline{AB} numa razão $k = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$.

Desta forma, os pontos A, B, C e D distintos da reta, com C no interior e D no exterior de \overline{AB} , formam, nesta ordem, uma **quádrupla harmônica**.

É facilmente demonstrável a distância x entre os conjugados harmônicos como sendo

$$x = \left| \frac{2k \cdot \overline{AB}}{k^2 - 1} \right|.$$

Essa distância é muito útil em diversos problemas. Na próxima seção, vamos perceber que essa distância também é o diâmetro do Círculo de Apolônio.

Ainda é possível obter o conjugado harmônico de um ponto dado em relação a um segmento, usando o GeoGebra².

- Trace uma reta \overline{AB} e um ponto C interno³ a ela;
- Marque um ponto P externo a reta \overline{AB} e trace as retas \overline{AP} , \overline{BP} e \overline{CP} ;
- Partindo de A , trace uma reta r qualquer concorrente às retas \overline{BP} e \overline{CP} ;
- Marque Z e Q os pontos de interseção de r com \overline{BP} e \overline{CP} , respectivamente;
- Trace a reta \overline{BQ} e marque sua interseção Y com \overline{AP} ;
- Trace a reta \overline{YZ} e marque sua interseção D com \overline{AB} .

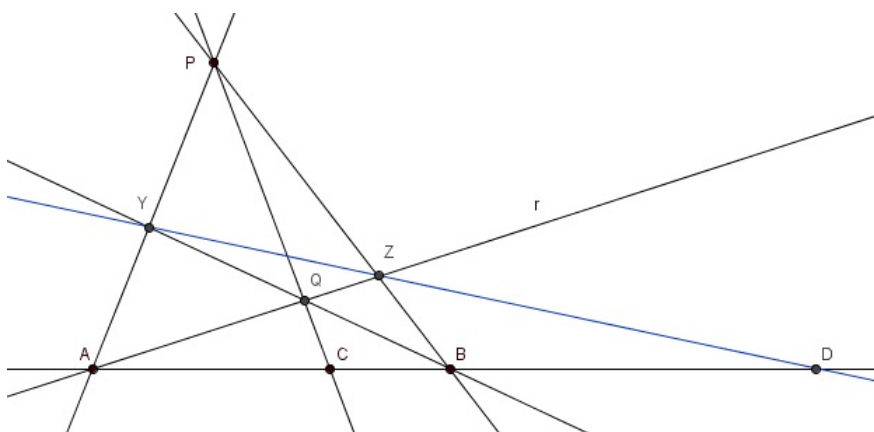


FIGURA 2: Construção da quádrupla harmônica usando o GeoGebra

FONTE: O autor

² Também é possível fazer essa construção usando apenas régua.

³ É importante evitar o ponto médio do segmento \overline{AB} .

Observando a figura, nota-se que Y, Z e D pertencem às retas suportes dos lados AP, BP e AB do triângulo PAB . Portanto, vale o teorema de Menelaus:

$$\frac{YP}{YA} \cdot \frac{ZB}{ZP} \cdot \frac{DA}{DB} = 1 \quad (1.1)$$

Por outro lado, como C também faz parte da reta suporte de AB , vale o teorema de Ceva:

$$\frac{YP}{YA} \cdot \frac{ZB}{ZP} \cdot \frac{CA}{CB} = 1 \quad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2), conclui-se que:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

Portanto, os pontos A, B, C e D formam uma quádrupla harmônica, como queríamos demonstrar.

2. O Círculo de Apolônio

Um estudo matemático mais aprofundado sobre as quádruplas harmônicas certamente nos levará ao teorema do Círculo de Apolônio. De acordo com esse teorema, dado um segmento AB em um plano π , chamamos de Círculo de Apolônio ou Circunferência de Apolônio, o lugar geométrico (LG) dos pontos P de π tais que $\frac{PA}{PB} = k$, com $k \neq 1$. Esse LG é um círculo Γ de diâmetro CD onde C e D são os conjugados harmônicos em relação a AB na razão k .

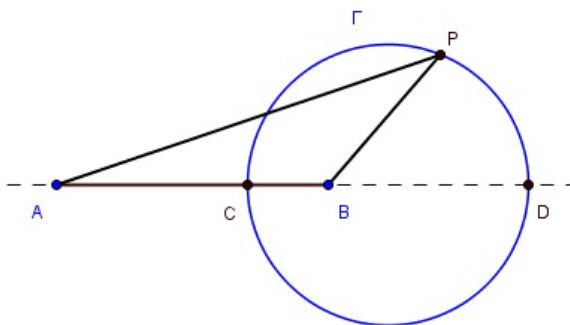


FIGURA 3: Círculo de Apolônio sobre AB na razão k
FONTE: O autor

Para demonstrá-lo, vamos utilizar os conceitos de geometria analítica.

Sejam A, B e P pontos e Γ um círculo de um mesmo plano. Vamos mostrar que:

$$P = (x, y) \in LG \Leftrightarrow P \in \Gamma.$$

O LG em questão é tal que $\frac{PA}{PB} = k$.

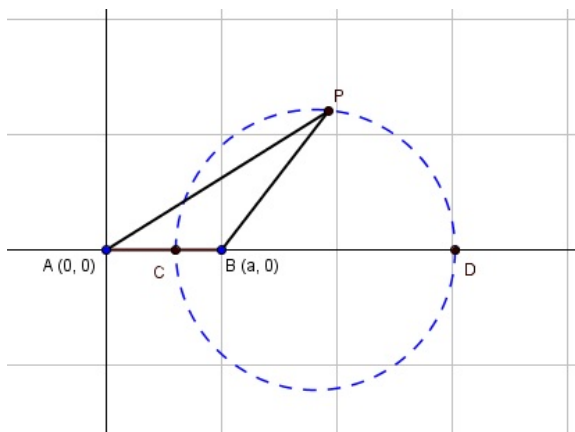


FIGURA 4: Demonstração analítica do Círculo de Apolônio

FONTE: O autor

Sejam os pontos $A = (0,0)$ e $B = (a,0)$ pontos do plano e $P = (x,y)$ pertencente ao LG, sem perda de generalidade, temos:

$$\begin{aligned} \frac{PA}{PB} = k &\Leftrightarrow PA = k \cdot PB \\ &\Leftrightarrow PA^2 = k^2 \cdot PB^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = k^2[(x-a)^2 + y^2] \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = k^2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2(k^2 - 1) - 2ak^2x + a^2k^2 + y^2(k^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \frac{2ak^2}{k^2 - 1}x + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^4}{(k^2 - 1)^2} - \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = a^2k^2 \left(\frac{k^2}{(k^2 - 1)^2} - \frac{k^2 - 1}{(k^2 - 1)^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ak}{k^2 - 1}\right)^2 \end{aligned}$$

Ou seja, o LG é o círculo Γ de centro $\left(\frac{ak^2}{k^2-1}, 0\right)$ e raio $\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$. Neste caso, o centro da

circunferência pertence à reta $AB: y = 0$, no entanto, está em função da razão k e do comprimento $a = AB$.

Retomando o que vimos na seção anterior, o comprimento de CD pode ser determinado em função da razão k . Logo, Γ tem diâmetro CD .

Como $CD = \frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1}$, então:

$$r = \left| \frac{CD}{2} \right| \Rightarrow r = \left| \frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1} \right|$$

$$\Rightarrow r = \left| \frac{2k \cdot AB}{2(k^2 - 1)} \right|$$

$$\Rightarrow r = \left| \frac{k \cdot AB}{k^2 - 1} \right|$$

como queríamos demonstrar.

Ainda é possível provar usando conceitos da geometria euclidiana. Vamos mostrar que:

$$P \in LG \Leftrightarrow P \in \Gamma.$$

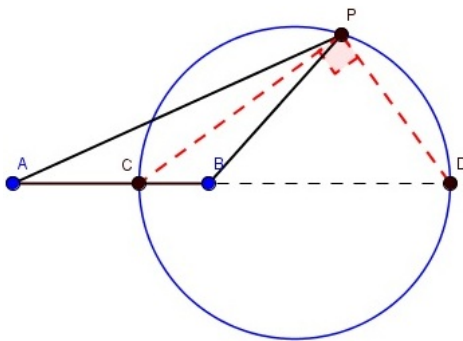


FIGURA 5: Demonstração euclidiana do Círculo de Apolônio

FONTE: O autor

Sejam C e D conjugados harmônicos do segmento AB . Desta forma, eles dividem o segmento na mesma razão k .

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k.$$

Tome P um ponto qualquer do LG . Se $P \in \{C, D\}$, então $P \in \Gamma$, pois Γ é uma circunferência de diâmetro CD (ou ainda porque C e D são os conjugados harmônicos do segmento AB). No entanto, se $P \notin \{C, D\}$, das igualdades

é do que uma aplicação da construção das quádruplas harmônicas. Vejamos os passos:

- Com o programa aberto na janela de visualização, trace uma reta \overleftrightarrow{AB} e um ponto P fora dela. Em seguida trace um ponto C contido no segmento AB de forma que $AC \neq BC$.

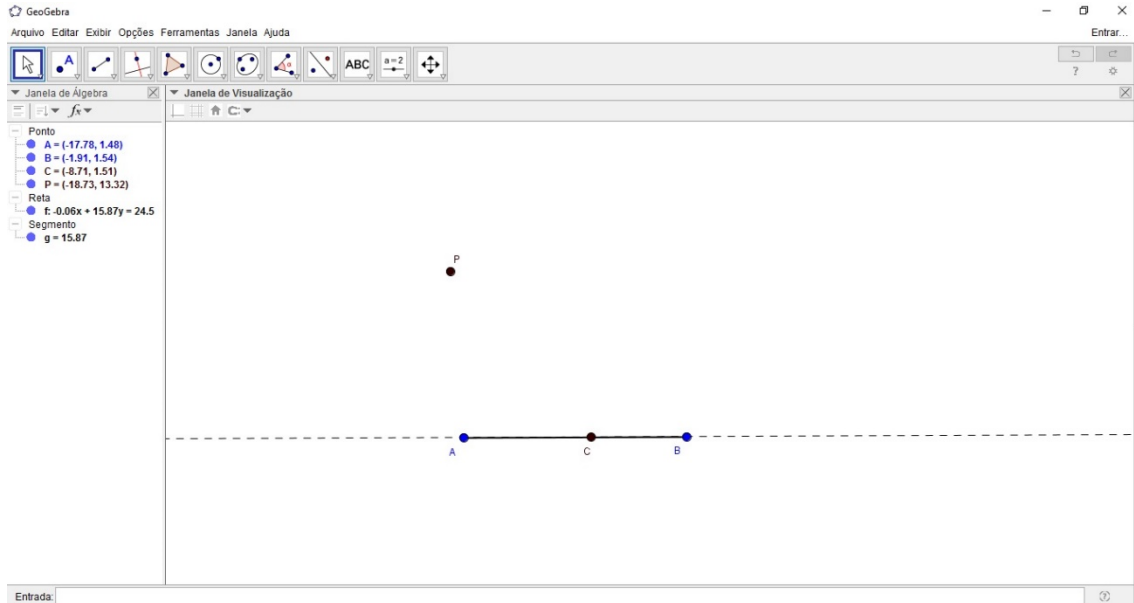


FIGURA 7: Construção no GeoGebra 1

FONTE: O autor

- Trace os segmentos PA , PB e PC e, um ponto Q arbitrário sobre o segmento PA .

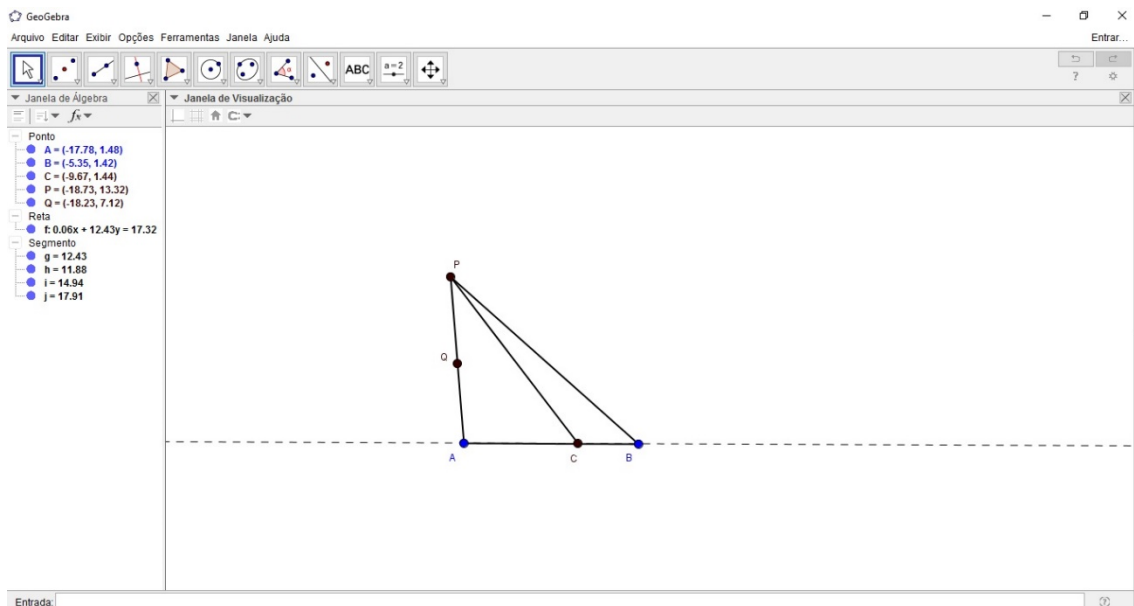


FIGURA 8: Construção no GeoGebra 2

FONTE: O autor

- Trace o segmento BQ e marque a interseção R com o segmento PC .

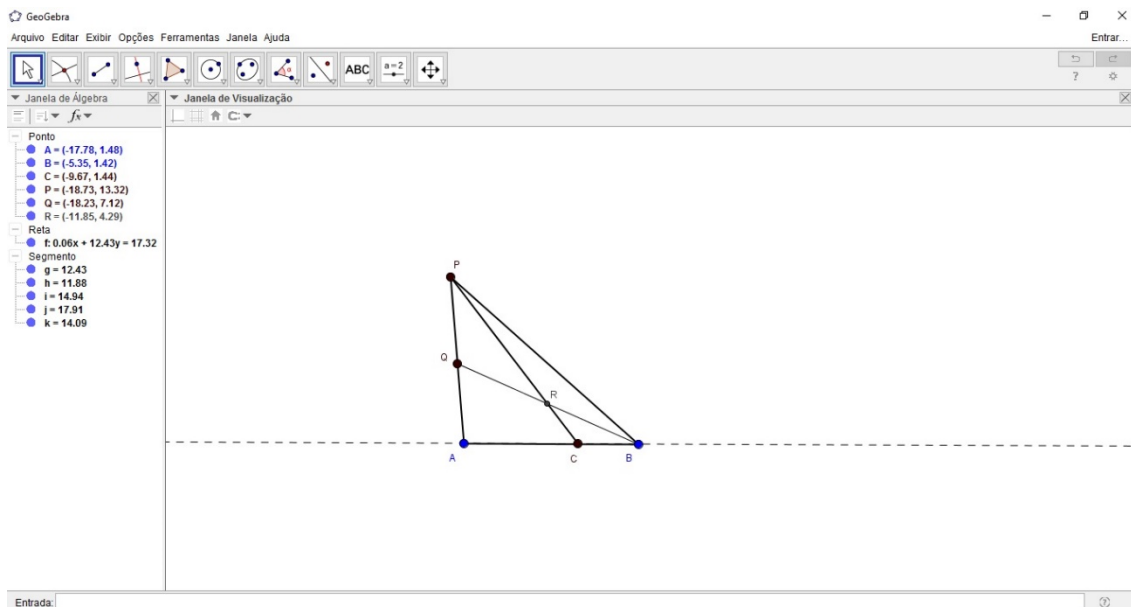


FIGURA 9: Construção no GeoGebra 3
FONTE: O autor

- Trace a semirreta \overrightarrow{AR} e marque sua interseção S com o segmento PB .

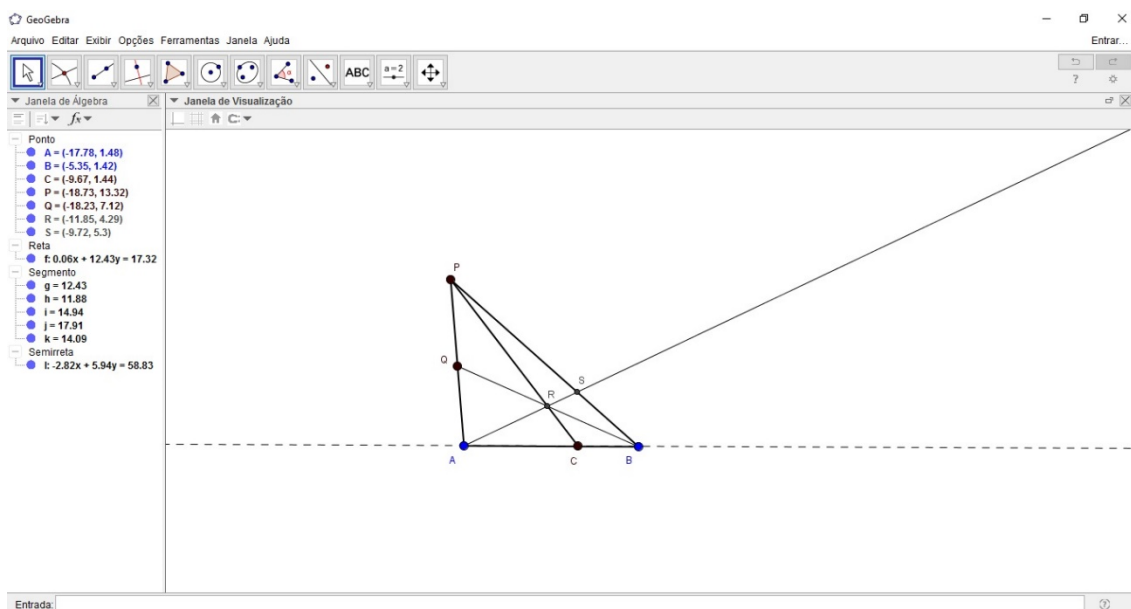


FIGURA 10: Construção no GeoGebra 4
FONTE: O autor

- Trace a semirreta \overrightarrow{QS} e marque sua interseção D com a reta \overleftrightarrow{AB} . *Observação:* Nesta fase, determinamos C e D como os conjugados harmônicos de AB .

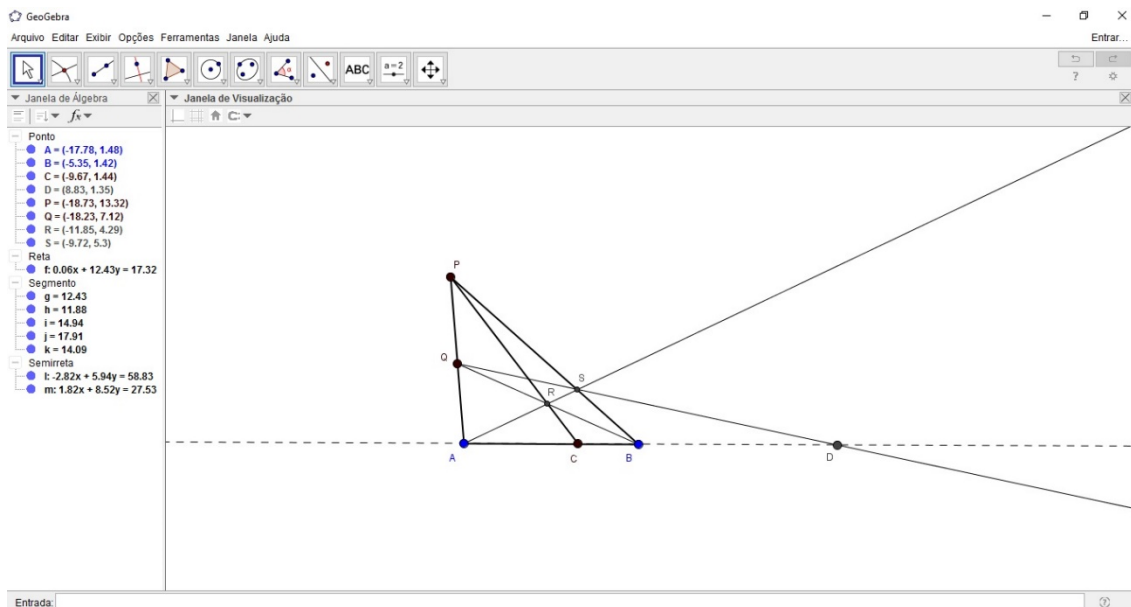


FIGURA 11: Construção no GeoGebra 5
FONTE: O autor

- Marque o ponto médio O do segmento CD e trace a circunferência com centro em O e raio OC .

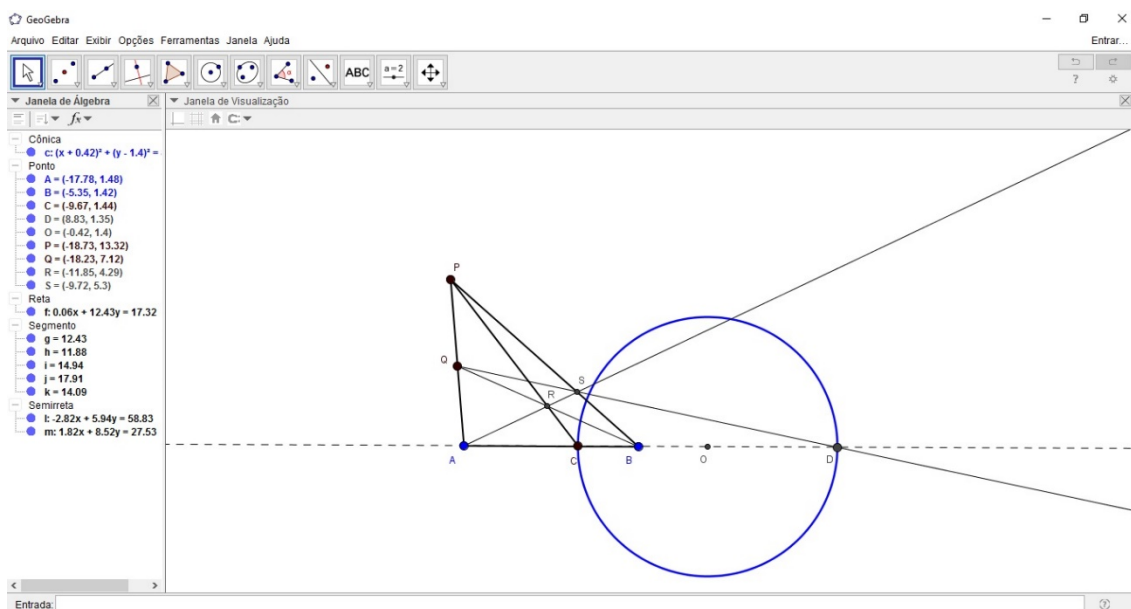


FIGURA 12: Construção no GeoGebra 6
FONTE: O autor

- Finalmente, para deixar a construção mais limpa, pode-se ocultar os pontos, segmentos e semirretas que serviram de suporte, mas que deixam a figura com informações em excesso.

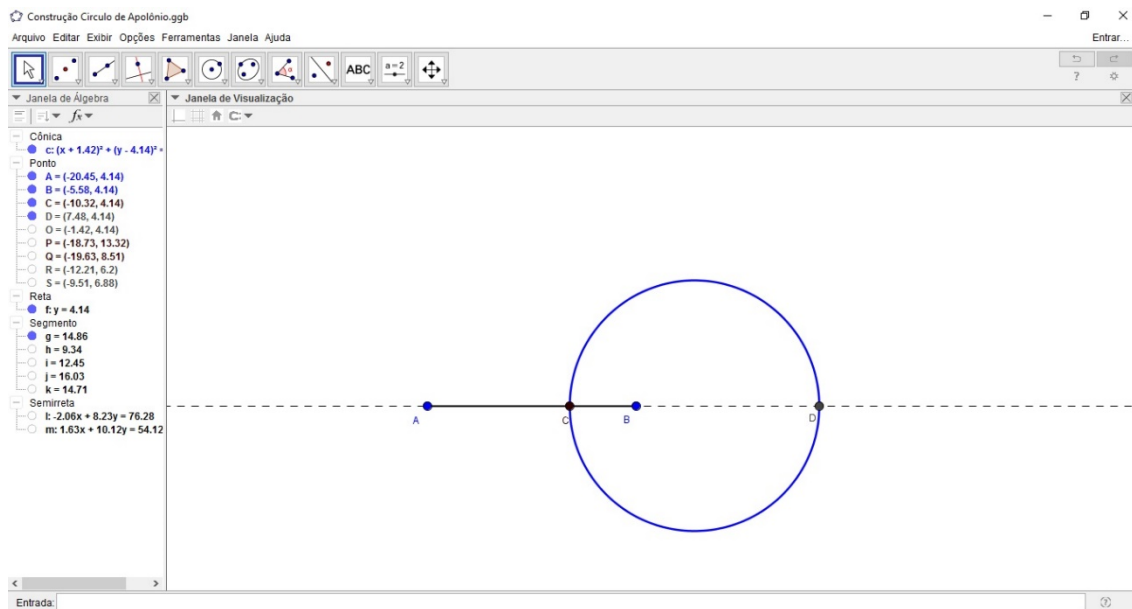


FIGURA 13: Construção no GeoGebra 7

FONTE: O autor

Temos portanto, um Círculo de Apolônio.

4. Posições relativas do Círculo de Apolônio e do segmento

Como vimos, a razão k é positiva (porém $k \neq 1$) e os conjugados harmônicos variam de acordo com os dois casos: $0 < k < 1$ e $k > 1$.

A seqüências de figuras a seguir mostra como o Círculo de Apolônio se comporta em função da razão $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$ com C e D dividindo o segmento AB interiormente e exteriormente, respectivamente, e M o ponto médio de AB .

Na construção de todas elas, o GeoGebra se mostrou uma ferramenta mais que fundamental pois, por ser um software extremamente dinâmico, pode-se notar que após a construção do Círculo de Apolônio como descrita na seção anterior, é possível utilizar a ferramenta “Animar” no ponto C .

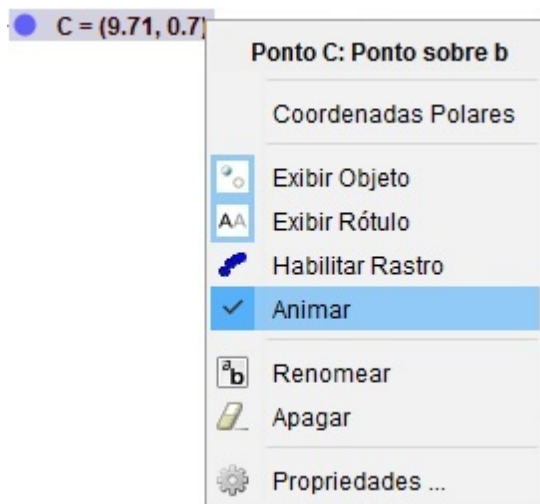


FIGURA 14: Ferramenta “Animar” no ponto C
FONTE: O autor

Desta forma, como por construção o ponto C pertence ao segmento AB , o mesmo fica deslizando no segmento e, conseqüentemente, modificando a localização do ponto externo D e do Círculo de Apolônio.

Utilizando mais uma ferramenta do GeoGebra, com o Círculo selecionado, clica-se em “Habilitar Rastro” para obter o efeito descrito na sequência de imagens mostradas a seguir.

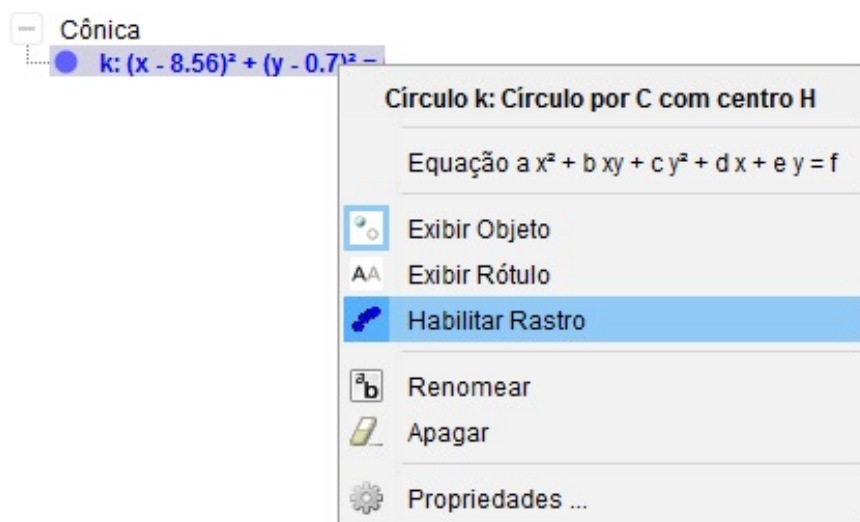


FIGURA 15: Ferramenta “Habilitar Rastro” no Círculo de Apolônio
FONTE: O autor

Com k muito próximo de zero, o círculo tende a ser muito pequeno e em torno de A .

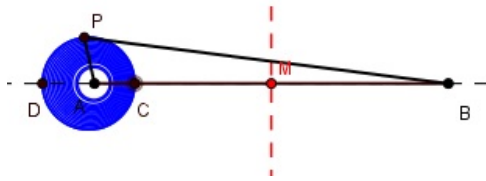


FIGURA 16: Círculo de Apolônio com $k \approx 0$
FONTE: O autor

Na próxima figura, com $k \approx 0,5$, os pontos C e D se distanciam de A e o círculo fica mais visível.

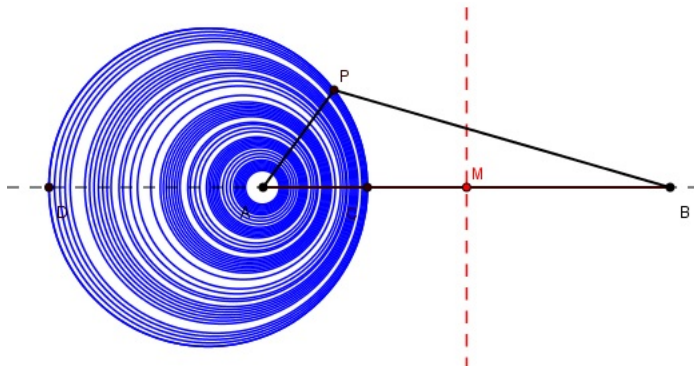


FIGURA 17: Círculo de Apolônio com $k \approx 0,5$
FONTE: O autor

Com $0 < k < 1$ e k muito próximo de um, o círculo tende a ser muito grande. Quanto mais C for próximo do ponto médio M , maior será o círculo e D se afastará de A . Caso C e M coincidam, o círculo se degenera na mediatriz de AB .

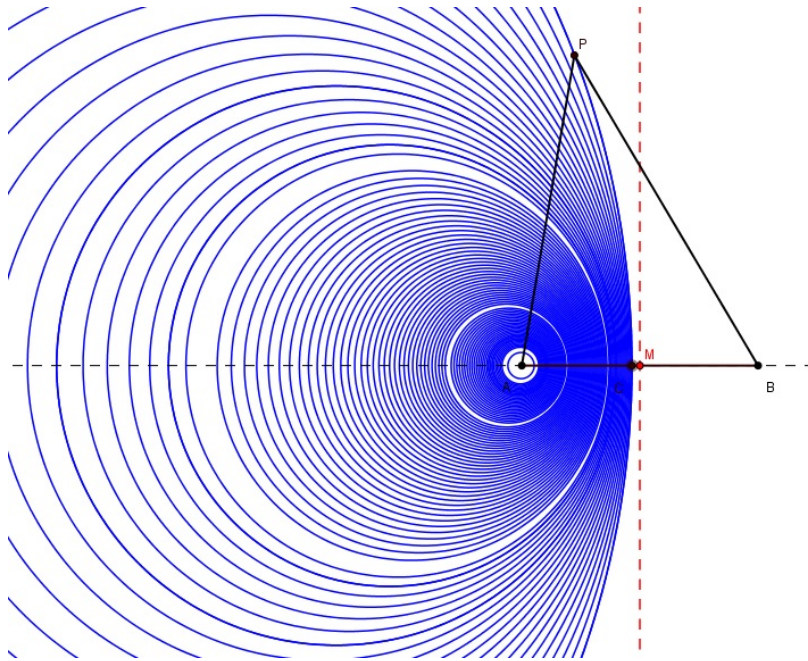


FIGURA 18: Círculo de Apolônio com $0 < k < 1$ e $k \approx 1$
FONTE: O autor

Com $k > 1$ mas muito próximo de um, é um caso semelhante ao anterior, mas refletido em relação à mediatriz.

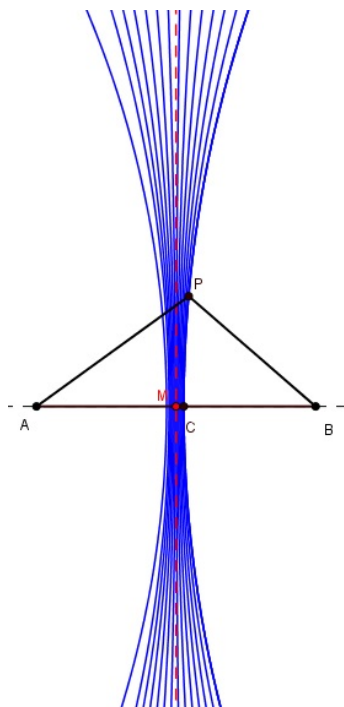


FIGURA 19: Círculo de Apolônio com $k > 1$ e $k \approx 1$
FONTE: O autor

Com k cada vez maior, os pontos C e D novamente se aproximam. Na medida em que k

aumenta, o raio de círculo diminui.

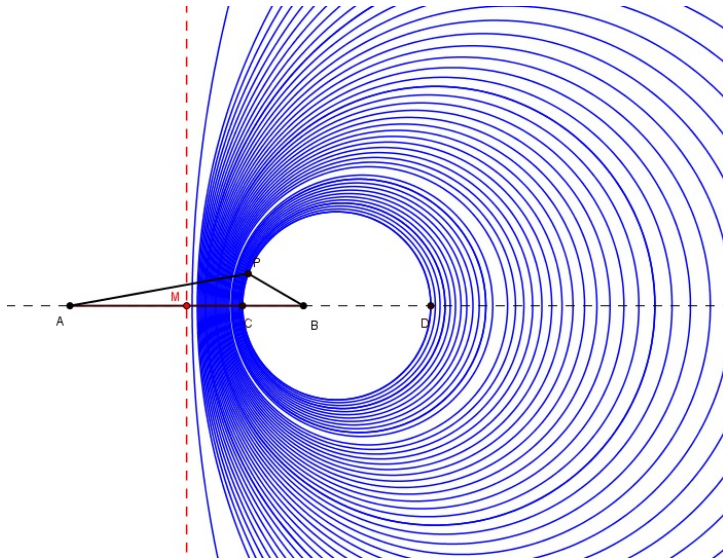


FIGURA 20: Círculo de Apolônio com $k > 1$
FONTE: O autor

Por fim, com k tendendo ao infinito, o círculo tende a ser muito pequeno, só que desta vez em torno de B .

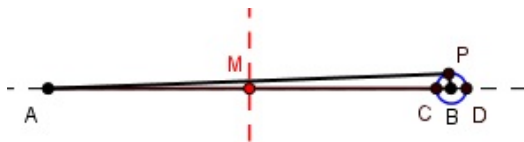


FIGURA 21: Círculo de Apolônio com $k \rightarrow +\infty$
FONTE: O autor

5. Esfera de Apolônio

Sabe-se que, dados dois pontos distintos A e B e o número real $0 < k \neq 1$, o LG dos pontos P do plano tais que $\frac{PA}{PB} = k$ é uma circunferência cujo diâmetro são os divisores harmônicos na razão k . Tal lugar é denominado Círculo de Apolônio de A e B . Se procurarmos o LG dos pontos P do espaço com essa configuração, este será uma esfera.

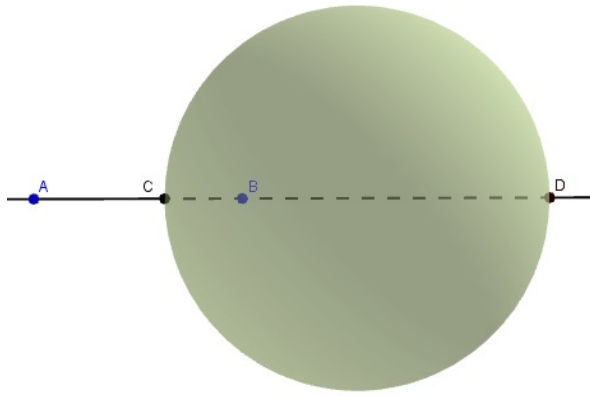


FIGURA 22: Esfera de Apolônio

FONTE: O autor

Podemos então, escrever o seguinte teorema para designar essa esfera: Dado um segmento AB no espaço, chamamos de Esfera de Apolônio o LG dos pontos P do espaço, tais que

$$\frac{PA}{PB} = k$$

com $k \neq 1$. Esse LG é uma esfera Σ de diâmetro CD onde C e D são os conjugados harmônicos em relação a AB na razão k .

Sua demonstração é absolutamente análoga ao Círculo de Apolônio. Vejamos:

Sejam A, B e P , pontos do espaço e Σ uma esfera. Queremos provar que:

$$P = (x, y, z) \in LG \Leftrightarrow P \in \Sigma.$$

O LG em questão é tal que $\frac{PA}{PB} = k$.

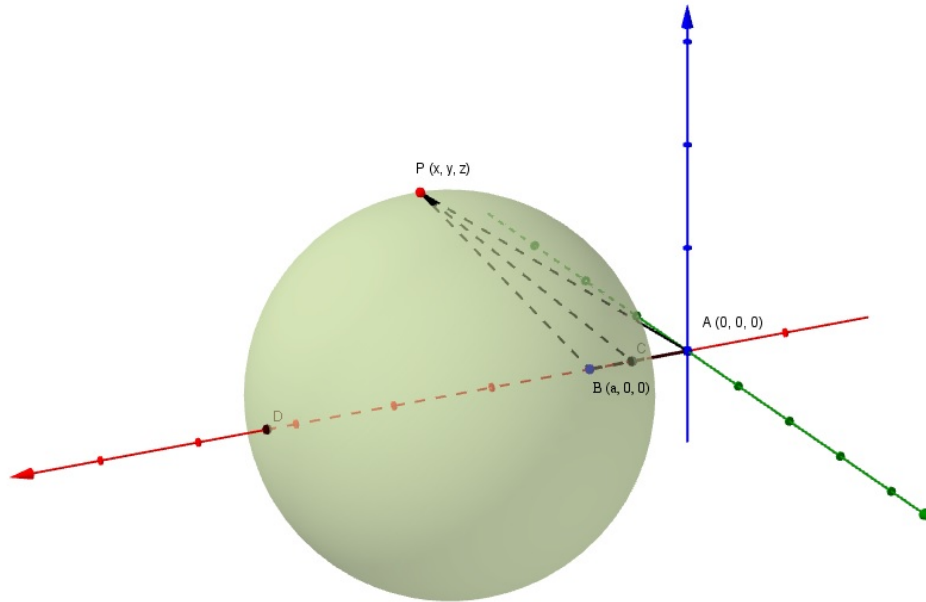


FIGURA 23: Demonstração analítica da Esfera de Apolônio

FONTE: O autor

Tome os pontos $A = (0, 0, 0)$ e $B = (a, 0, 0)$ pontos do plano e $P = (x, y, z)$ pertencente ao LG, sem perda de generalidade, temos:

$$\frac{PA}{PB} = k \Leftrightarrow PA = k \cdot PB$$

Fazendo as mesmas contas, chegamos a

$$\left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{ak}{k^2 - 1}\right)^2$$

Ou seja, o LG é a esfera Σ de centro $\left(\frac{ak^2}{k^2 - 1}, 0, 0\right)$ e raio $\left|\frac{ak}{k^2 - 1}\right|$. Neste caso, o centro da esfera pertence à reta $AB: y = 0$, no entanto, está em função da razão k e do comprimento $a = AB$. Que é o mesmo caso do Círculo de Apolônio.

6. Posições relativas da Esfera de Apolônio e do segmento

Assim como fizemos com o Círculo de Apolônio, vamos trazer uma sequência de figuras que mostra como a Esfera de Apolônio se comporta em função da razão k com C e D dividindo o segmento AB interiormente e exteriormente, respectivamente, e M sendo o ponto médio de AB .

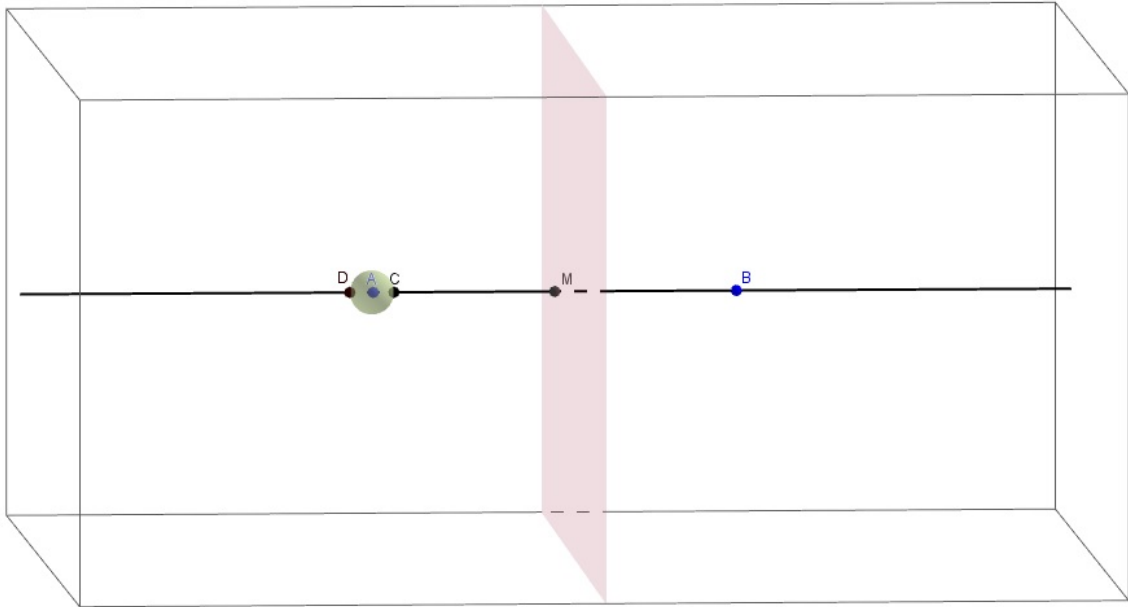


FIGURA 24: Esfera de Apolônio com $k \approx 0$
FONTE: O autor

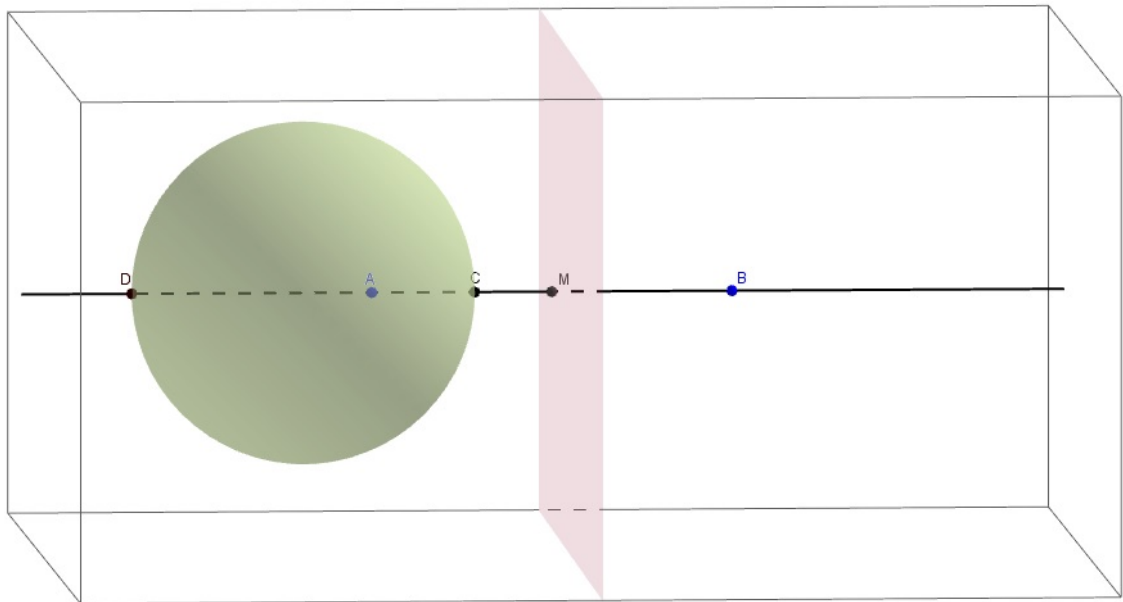


FIGURA 25: Esfera de Apolônio com $k \approx 0,5$
FONTE: O autor

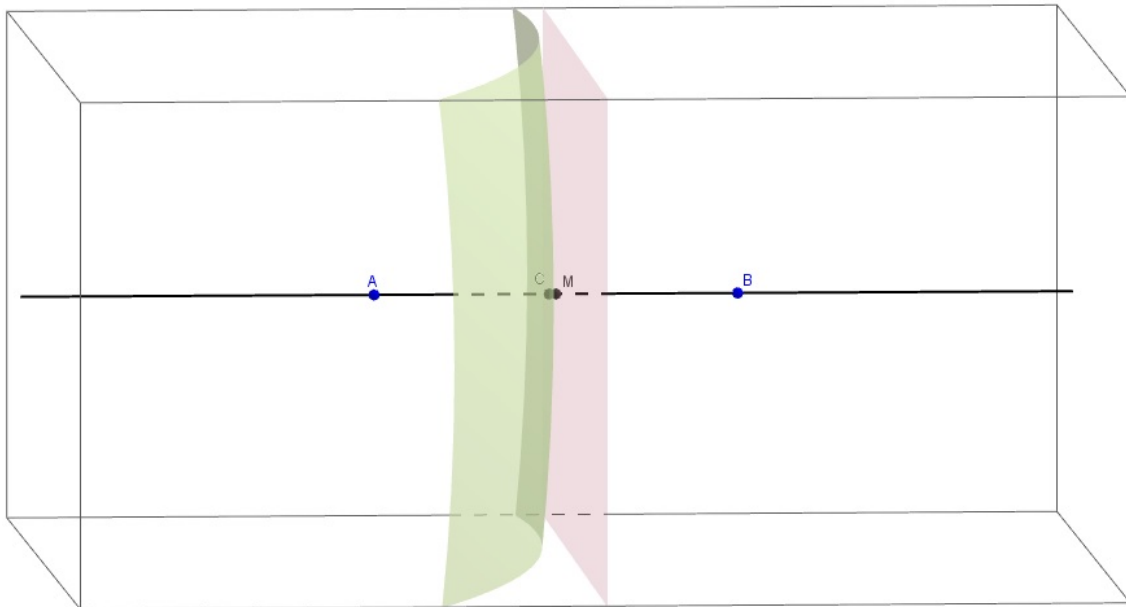


FIGURA 26: Esfera de Apolônio com $0 < k < 1$ e $k \approx 1$
FONTE: O autor

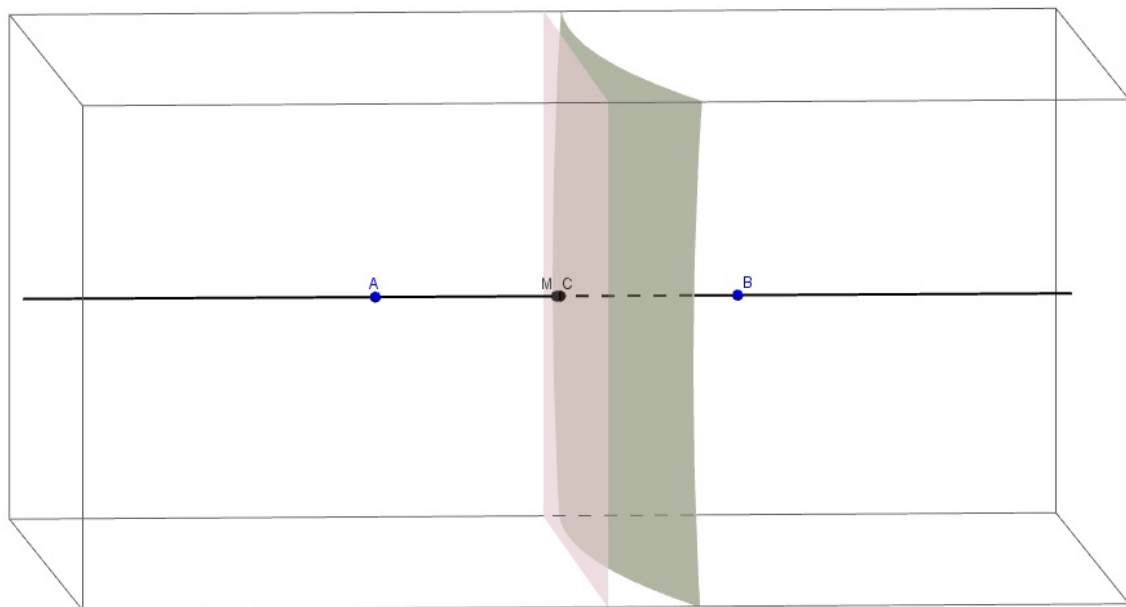


FIGURA 27: Esfera de Apolônio com $k > 1$ e $k \approx 1$
FONTE: O autor

Cabe notar aqui que com k muito próximo de um (dois casos anteriores), a esfera tende a ser muito grande. Quanto mais C for próximo do ponto médio M, maior será a esfera. Caso C e M coincidam, a esfera se degenera no plano mediador.

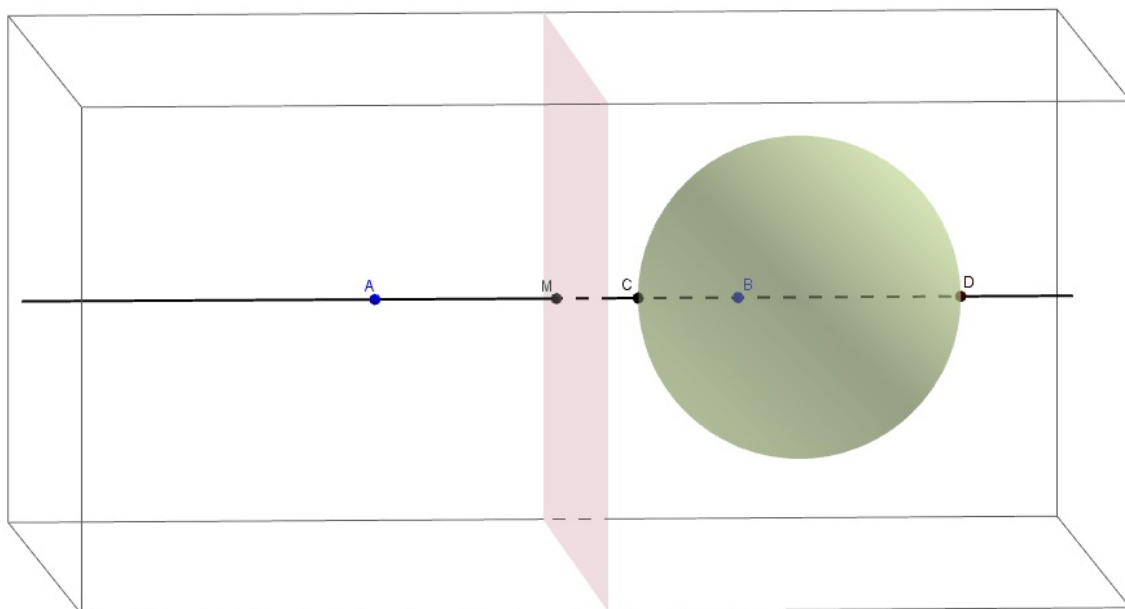


FIGURA 28: Esfera de Apolônio com $k > 1$

FONTE: O autor

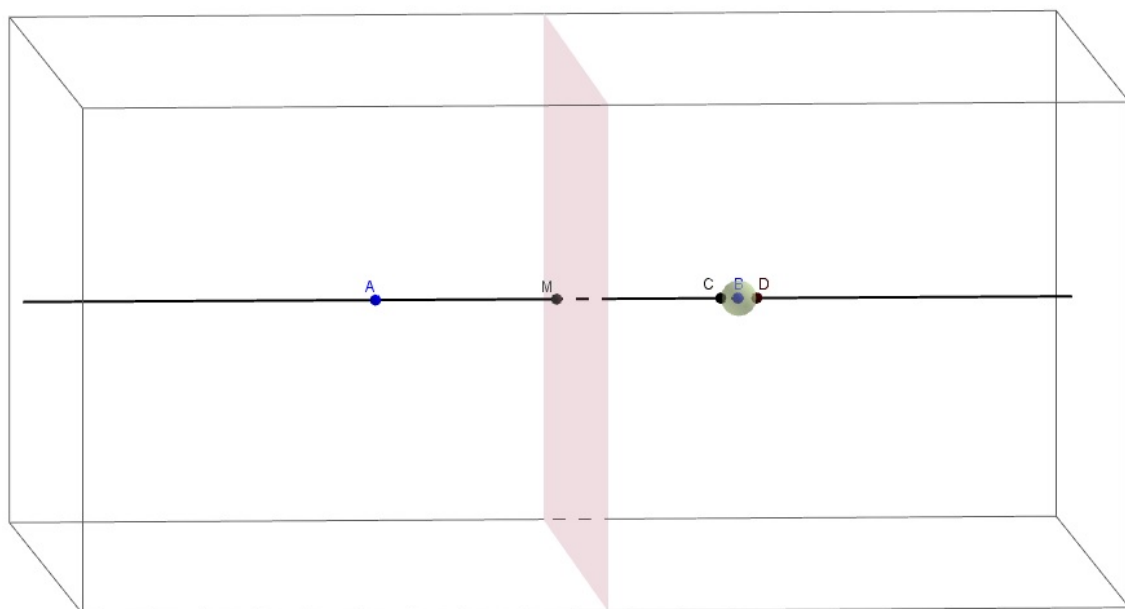


FIGURA 29: Esfera de Apolônio com $k \rightarrow +\infty$

FONTE: O autor

Considerações finais

A Matemática em si é uma ciência muito vasta e em constante mudança. Neste trabalho, pudemos notar a importância de unir a tecnologia aos conceitos de Geometria. Graças ao GeoGebra, foi possível fazer animações, GIFs, vídeos e construções diversas que auxiliaram no entendimento de um teorema muito antigo atribuído a Apolônio.

Para professores de matemática, utilizar *softwares* como o GeoGebra não apenas economiza tempo, mas facilita o aprendizado e interesse dessa disciplina, as vezes tão temida pelos alunos. É preciso que tenhamos mais afinidade com as tecnologias da informação e comunicação (TICs) para dinamizar as aulas e ampliar o conhecimento matemático dos estudantes.

Referências

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*, Secretaria de Educação Fundamental, Brasília. MEC/SEF.

MORAIS JÚNIOR, E. F. (2016). *Quádruplas Harmônicas e a Esfera de Apolônio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Recife: UFRPE.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. (2002). *Geometria II*. Rio de Janeiro: FC & Z Livros.

MUNIZ NETO, A. C. (2013). *Coleção PROFMAT: Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM

PONCELET, J. C. (1862). *Applications d'analyse et de géométrie*. Paris: Gauthier-Villars.

SARMENTO, M. I. (2007). *Um passeio proveitoso pelos círculos de Apolônio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Porto: Universidade do Porto.

SILVA, J. C. (2015). *Os Teoremas de Menelaus e Ceva*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Recife: UFRPE.

WAGNER, E. (2006). A Formiga Inteligente. *Revista do Professor de Matemática*, v. 61, p. 19-24. Rio de Janeiro: SBM.