



## Resolução gráfica de um problema de programação linear utilizando a folha gráfica 3D do GeoGebra

### Graphical resolution of Linear Programming problems, using 3D graphics sheet of GeoGebra

Robert de Sousa <sup>1</sup>

Crispiniano de Jesus Gomes Furtado <sup>2</sup>

João Carlos Lopes Horta <sup>3</sup>

#### RESUMO

*O uso do software GeoGebra, tem sido recorrente para melhorar nossas capacidades de entendimento da matemática, sobretudo como uma ferramenta poderosa no auxílio ao ensino e consequente sucesso nos ambientes de aprendizagem. Neste trabalho, consideramos a resolução gráfica, com três variáveis de problemas de Programação Linear (PL), com recurso ao software dinâmico GeoGebra, a folha gráfica 3D. Problemas de PL no plano, são facilmente concebidos e resolvidos pelo método gráfico e analítico. Porém, quando as regiões admissíveis são poliedros (envolvendo três variáveis de decisão), a tarefa não é trivial. Requer construções auxiliares e alguma perspicácia como concluímos neste artigo. Assim, o objetivo principal é representar graficamente um problema de PL e determinar a sua solução (ótima) recorrendo ao ambiente gráfico do GeoGebra.*

**Palavras-chave:** Software GeoGebra e a folha gráfica 3D; regiões admissíveis e construções auxiliares; resolução gráfica de um problema de programação linear.

#### ABSTRACT

*The use of GeoGebra software has been recurrent to improve our ability to understand mathematics, especially as a powerful tool to aid teaching and consequent success in learning environments. We consider the graphical resolution, with three variables of Linear Programming (PL) problems, using the GeoGebra dynamic software with the 3D graphic sheet. Problems of PL in the plane are easily conceived and solved by the analytical and graphical method. However, when the admissible regions are polyhedral (involving three decision variables), the task is not trivial. It requires auxiliary constructions and some insight as we conclude in this article. Thus, the main purpose is to represent graphically a PL problem and determine its (optimal) solution using the graphical environment of GeoGebra. observed in the research, but without providing reference authors: they shall come only through the text.*

**Key-words:** Software GeoGebra and 3D graphics sheets; admissible regions and auxiliary constructions; graphical resolution of Linear Programming problem.

<sup>1</sup> CFT, Universidade de Cabo Verde – [robert.sousa@docente.unicv.edu.cv](mailto:robert.sousa@docente.unicv.edu.cv)

<sup>2</sup> CFT, Universidade de Cabo Verde – [crispiniano.furtado@docente.unicv.edu.cv](mailto:crispiniano.furtado@docente.unicv.edu.cv)

<sup>3</sup> CFT, Universidade de Cabo Verde – [joao.horta@docente.unicv.edu.cv](mailto:joao.horta@docente.unicv.edu.cv)

## Introdução

GeoGebra é um software dinâmico gratuito e de código aberto para o ensino e aprendizagem da matemática. Nele, podemos estudar geometria e álgebra num ambiente totalmente conectado. Foi projetado para combinar softwares de geometria dinâmica (por exemplo, Cabri Geometry, Geometric's Sketchpad) e sistemas de álgebra computacional (como por exemplo, o Derive e o Maple), num sistema único, integrado e fácil de utilização, no ensino e aprendizagem da matemática (SAHAA *et al.*, 2010).

Recentemente publicado, em Lingefjård (2017), podemos deparar com vários exemplos de modelos matemáticos no GeoGebra, envolvendo situações reais do dia-a-dia, dinâmica de populações, mecânica, biologia, aplicações de equações diferenciais lineares e não lineares e outros tantos. Complementarmente, em Venema (2013), encontra-se um vasto estudo da geometria e tópicos avançados em geometria euclidiana, recorrendo ao GeoGebra.

Na literatura, podemos encontrar vários casos de sucesso do uso do GeoGebra como uma ferramenta poderosa no auxílio do ensino e aprendizagem da matemática, bem como a sua importância em vários outros aspetos.

Em Sahaa *et al.* (2010), os autores falam sobre os efeitos e o papel preponderante que o GeoGebra tem na aprendizagem e ensino da geometria. Eles destacam o impacto que softwares dinâmicos têm na educação, como é o caso do GeoGebra, promovendo uma aprendizagem centrada no aluno, cativa, além de melhorar a capacidade de visualização do aluno.

Em Reis e Ozdemir (2010), analisam-se os efeitos do GeoGebra sobre a atitude e o sucesso dos alunos da décima segunda classe, tendo como objetivo o ensino da parábola.

A autora Reis (2010), fala sobre uma experiência com alunos na sala de aula, com recurso ao software GeoGebra, isto é, a fim de avaliar o quanto os alunos compreenderam a matéria, um teste foi aplicado imediatamente após a lição. Duas semanas depois, um novo teste foi aplicado para ver o quanto do assunto se lembravam. Posteriormente, comparando os resultados de ambos os exames, analisou-se contribuições e benefícios significativos, do GeoGebra no ensino da matemática.

A fim de analisar e determinar os efeitos do GeoGebra sobre o ensino da trigonometria, tomou-se uma amostra composta por 51 alunos e divididos em dois grupos. O grupo experimental foi submetido a um método de ensino assistido por computador com recurso ao software GeoGebra, enquanto que o grupo de controle foi submetido às lições com instrução construtiva. Os dados coletados após 5

semanas de aplicação mostram que há uma diferença significativa entre as realizações do grupo experimental e do grupo de controle em trigonometria. Esta diferença favorece ao grupo experimental que teve lições com GeoGebra (ZENGINA et al., 2012).

Em Dogan et al. (2012), os autores fazem um estudo com recurso ao GeoGebra, tendo como objetivo eliminar os erros que ocasionalmente os alunos fazem em relação a algumas das características do logaritmo.

Com vista a auxiliar o ensino e aprendizagem de retas e suas propriedades, em Kagizmanli (2011), destacase mais uma vez a importância do GeoGebra sobre uma experiência feita com alunos na sala de aula, bem como os resultados positivos obtidos.

Vários outros exemplos de experiências no ensino e aprendizagem da estatística descritiva, da probabilidade, do cálculo integral e diferencial, do cálculo geral, bem como a inovação e métodos de ensino da matemática podem ser referenciados (AIZIKOVITSH-UDI e RADAKOVIC, 2012), (ARBAIN e SHUKOR, 2015), (BU e SCHOEN, 2011) (CALIGARIS et al., 2015), (CHAN e ISMAIL, 2014), (ARANGO et al., 2015), (MEDINA e VALDÉS, 2015), (PACHEMSKA et al., 2014).

Motivado pelos trabalhos acima citados e baseando-nos nas técnicas sobre problemas de programação linear em 2D (DOS SANTOS, 2013; ZACHI, 2016), e em 3D (KANNAN et al., 2004), neste trabalho, consideramos o seguinte problema de programação linear:

$$(1) \quad \max(\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\{ \leq, =, \geq \} b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &\{ \leq, =, \geq \} b_2 \\ &\vdots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\{ \leq, =, \geq \} b_m \end{aligned}$$

$$(3) \quad x_1, \dots, x_n \geq 0,$$

onde, (1), representa a função objetivo, (2), as restrições funcionais, (3), as restrições de não negatividade,  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , os coeficientes da função objetivo,  $b_1, \dots, b_m \in [0, +\infty[$ , os termos independentes e  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , os coeficientes tecnológicos, para  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  e  $x_1, \dots, x_n \in [0, +\infty[$ , as variáveis de decisão do problema.

Mais concretamente, abordaremos a representação e determinação gráfica de soluções de um caso particular do problema (1), (2) e (3), isto é, com três variáveis,

$$(4) \quad \max(\min) f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$(5) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\{\leq, =, \geq\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\{\leq, =, \geq\} b_2 \\ &\vdots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 &\{\leq, =, \geq\} b_3 \end{aligned}$$

$$(6) \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

com recurso ao software dinâmico GeoGebra.

A resolução de um problema de programação linear, consiste em determinar os valores das variáveis de decisão, que satisfazem as restrições funcionais e as de não negatividade, de forma a maximizar ou minimizar a função objetivo.

Geometricamente, a ideia consiste em, através de curvas de níveis de  $f(x_1, x_2, x_3) = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , ir variando o valor de  $f$  em (5), (6), de modo a determinar o máximo ou mínimo valor que  $k$  pode assumir, consoante o objetivo pretendido.

Para problemas no plano (duas variáveis de decisão), a determinação da solução ótima graficamente não é complicada, todavia, apesar de ser possível, o processo para a resolução gráfica de um PL com três variáveis de decisão é bastante complicada, mesmo utilizando softwares avançados.

Este artigo foi desenvolvido no âmbito da formação de formadores em GeoGebra e na sequência da instalação do Instituto GeoGebra em Cabo Verde, bem como propor e explorar um estudo de problema de PL graficamente e em  $\mathbb{R}^3$  no software GeoGebra.

Os objetivos do trabalho passam pela: representação, resolução, visualização e determinação gráfica de um problema de programação linear em  $\mathbb{R}^3$ , para três variáveis de decisão, utilizando a folha gráfica 3D do software GeoGebra.

Para realizar este trabalho baseou-se no método de pesquisa de natureza bibliográfica, com base na consulta de alguns autores de renome no GeoGebra, bem como na programação linear.

Aliada a metodologia mencionada, utilizou-se também, as metodologias descritivas, interpretativa e experimental, onde de forma prática e ilustrativa demonstra-se através de exemplos a aplicabilidade do trabalho.

O artigo está estururado em quatro secções.

Na secção 2, apresentamos os resultados teóricos que alavancam o trabalho. Ali introduzimos o teorema central do trabalho. Na secção 3, apresentamos a nossa

proposta de resolução de um PL (com 3 variáveis de decisão) usando GeoGebra, apresentamo-la a um grupo de alunos. Esses alunos, são do curso de Licenciatura em Estatística e Gestão de Informação (EGI) e sabem resolver o problema de PL (com duas variáveis de decisão) com GeoGebra. Discorreremos sobre as estratégias usadas e sumariamos os resultados alcançados com uma experiência.

## 1. Resultados teóricos

Para uma melhor compreensão do trabalho, revisamos alguns conceitos e propriedades de análise convexa, álgebra linear e programação linear em  $\mathbb{R}^3$  (veja por exemplo, (BAZARAA e JARVIS, 2010), (KOLMAN,1995), (PARIS, 2016)).

**Definição 1.** *O conjunto  $M \in \mathbb{R}^3$  diz-se convexo, se dados quaisquer dois pontos  $y, z \in M$  então  $\alpha y + (1 - \alpha)z \in M, 0 \leq \alpha \leq 1$ .*

Geometricamente, um conjunto é convexo se para cada par de pontos pertencentes ao conjunto, o segmento de reta que os une está contido no conjunto. Este conceito é muito importante, dado que num determinado segmento de reta que une duas soluções que verificam as restrições (5), (6), a função objetivo ou é uma constante ou atinge um máximo num ponto extremo e mínimo no outro extremo do segmento.

**Teorema 2.** ((KOLMAN,1995)) *Seja  $A$  uma matriz do tipo  $m \times 3$  e  $b \in \mathbb{R}^3$ . Se o conjunto solução do sistema de equações lineares  $Ax = b$  não é vazio, então é um conjunto convexo.*

**Nota:** Do teorema anterior, concluímos que conjunto definido com as restrições de igualdade (5), (6), dado por,

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}, \quad \text{é}$$

um poliedro convexo.

A seguir, introduzimos o conceito de ponto extremo de um problema de programação linear, neste caso de um conjunto convexo dado pelas restrições (5), (6).

**Definição 2.** *Seja  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  um conjunto convexo e não vazio. Diz-se que  $x \in M$  é um ponto extremo de  $M$ , se não existem dois pontos distintos  $y, z \in M$ , tais que  $\alpha y + (1 - \alpha)z \in M, 0 \leq \alpha \leq 1$*

Consideremos uma condição necessária e suficiente para que um ponto de um conjunto convexo seja um ponto extremo.

**Teorema 4.** ((KOLMAN,1995)) Seja  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  um conjunto convexo. O ponto  $x \in M$  é um ponto extremo de  $M$  se e só se não é uma combinação convexa de vetores em  $M$ , isto é,  $\forall x_1, x_2, \dots, x_r \in M, c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ , tais que  $\sum_{i=1}^r c_i = 1$ , para  $c_i \geq 0$  e  $1 \leq i \leq r$ , verifica-se  $x \neq \sum_{i=1}^r c_i x_i$ .

Geometricamente, um ponto extremo é o vértice da interseção de duas ou mais restrições de um problema de programação linear.

Considere o poliedro não vazio, dado pelo sistema  $Ax = b, x \geq 0$ , com  $e \in \mathbb{R}^3$ ,  $e \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c(A) = m$ , onde  $c(A)$  é característica da matriz  $A$ .

**Definição 5.** Após uma eventual reordenação das colunas da matriz  $A$ , admita-se uma decomposição do tipo  $A = [B \ N]$ , onde  $B$  é uma matriz  $m \times m$  invertível,  $N$  uma matriz  $m \times (n - m)$  e  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ . Diz-se que  $x$  é solução básica, se é solução do sistema  $Ax = b$ , onde  $x = B^{-1}b$  e  $x_N = 0$ . Se além disso,  $x_B \geq 0$ ,  $x$  é dita solução básica admissível, onde  $B$  é denominada matriz básica e  $N$  matriz não básica. As componentes de  $x_B$  e  $x_N$ , são chamadas variáveis básicas e não básicas, respetivamente. Se  $x_B > 0$ , diz-se que  $x$  é solução básica admissível não degenerada, e se pelo menos uma das componentes de  $x_B$  é nulo,  $x$  designa-se por solução básica admissível degenerada.

Fazendo uma ponte com os conceitos de análise convexa já abordados, podemos afirmar que  $x$  é um ponto extremo de  $M$  se, após uma eventual reordenação das componentes de  $x$  e das colunas da matriz  $A$ , a mesma admitir uma decomposição do tipo  $A = [B \ N]$ , em que  $B$  é uma matriz invertível e  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Assim, um ponto é solução admissível básica se e somente se for um ponto extremo (KOLMAN,1995).

Enunciemos o Teorema principal deste trabalho, que garante a existência de um ponto extremo ótimo em problemas de otimização linear, com valor ótimo finito.

**Teorema 6.** ((KOLMAN,1995)) Seja  $M$  o conjunto admissível de um problema de programação linear.

- Se  $M$  é não vazio e limitado, então a solução ótima existe e ocorre num ponto extremo;
- Se  $M$  é não vazio e ilimitado, então se existe solução ótima para um problema de PL, e este ocorre num ponto extremo;
- Se não existe solução ótima para um PL, então  $M$  é vazio ou é ilimitado.

**Nota:** na representação gráfica é fundamental identificar e perceber que:

- é necessário representar a **região admissível**: conjunto de soluções que satisfazem as restrições do problema (funcionais e de não negatividade);
- **solução admissível**: uma solução qualquer que pertença à região admissível;
- **pontos extremos**, geometricamente, representam os pontos de interseção das restrições do problema (vértices da região admissível);
- O **ponto ótimo** é sempre um dos vértices da região admissível, exceto quando temos uma infinidade de soluções ótimas, dado que neste caso, os pontos ótimos são todos os pertencentes a um dos lados da região admissível.

## 2. Resolução Geométrica de Problemas de Programação Linear em $\mathbb{R}^3$ , utilizando a folha gráfica 3D do GeoGebra

A propósito das potencialidades do GeoGebra, nomeadamente, a janela 3D e a folha de cálculo pretendemos:

- discorrer sobre o procedimento técnico na conceção e resolução do problema geométrico.
- avaliar até que ponto o GeoGebra poderá ser útil para a resolução dos problemas de PL em 3D.
- recolher subsídios, a partir de alunos seleccionados para a resolução de problemas em contexto didático real.

Nesta secção vamos resolver problemas de programação linear do tipo (4), (5) e (6). Mais concretamente, transpomos os conceitos de análise convexa e álgebra linear, apresentados na secção 2, para conceitos geométricos, que serão ilustrados com o software dinâmico GeoGebra.

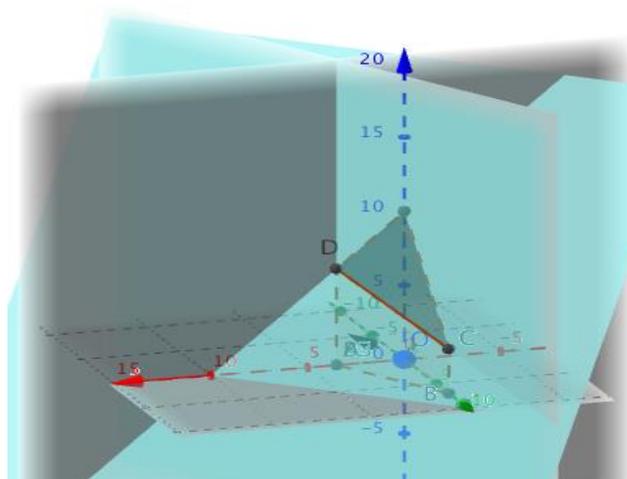
Baseando-se em conceitos de álgebra linear e geometria analítica, a determinação do ótimo de um problema do tipo (4), (5), (6), ou com mais variáveis é relativamente acessível, utilizando o algoritmo do método simplex (KOLMAN,1995), no entanto, como já referimos, não é nada fácil e em alguns casos, bastante árduo e complicado, fazer o mesmo, utilizando a representação gráfica.

Em Kannan et al. (2004), os autores desenvolveram uma metodologia para resolver problemas de PL com três variáveis usando o método gráfico, com auxílio do software AutoCAD com o Visual Basic Application. Analisemos de seguida a resolução usando o GeoGebra. A título de exemplo, considera-se o problema de

minimizar (ou maximizar)  $f(x, y, z) = 2x - 3y + z$  sujeito às restrições funcionais e não negatividade

$$\begin{cases} x + y + z \leq 10 \\ 2x + y \leq 7 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Para tal considere-se a folha gráfica 3D. A folha gráfica 2D interpreta todo tipo de restrição,  $f(x, y) \leq k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  e  $f$  função linear. Já o mesmo não acontece com folha gráfica 3D, para  $f(x, y, z) \leq k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  e  $f$  função linear nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Veja-se Figura a 10.

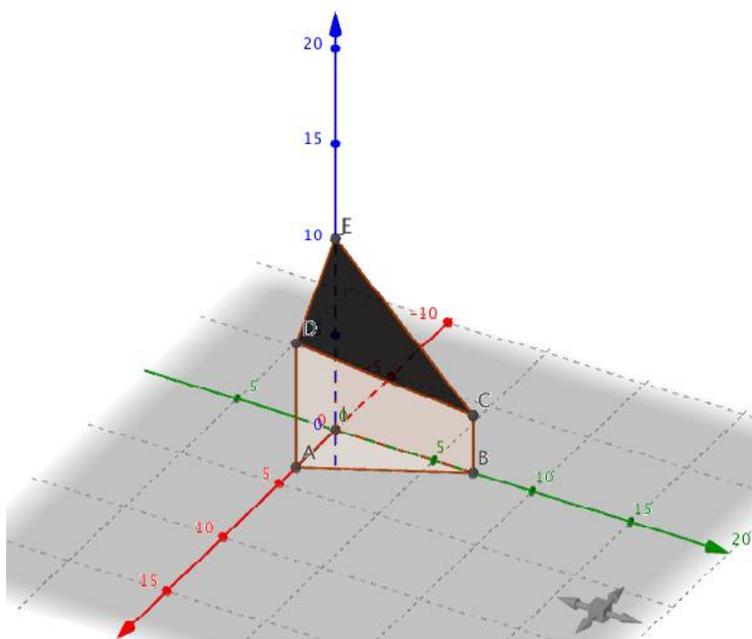


**Figura 1.** Região admissível com construções auxiliares

Após ocultar as construções auxiliares (por exemplo partir da janela algébrica), obtém-se a região admissível na Figura. A resultante é um poliedro cujas faces são definidas por:  $\{C, D, E\}$ ,  $\{A, B, C, D\}$ ,  $\{O, A, D, E\}$ ,  $\{O, B, C, E\}$ ,  $\{O, A, B\}$ . As coordenadas são descritas na Tabela 1

**Tabela 1: Coordenadas dos vértices do poliedro da Figura 2**

	$x$	$y$	$z$
$A$	$\frac{7}{2}$	0	0
$B$	0	7	0
$C$	0	7	3
$D$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{13}{2}$
$E$	0	0	10
$O$	0	0	0

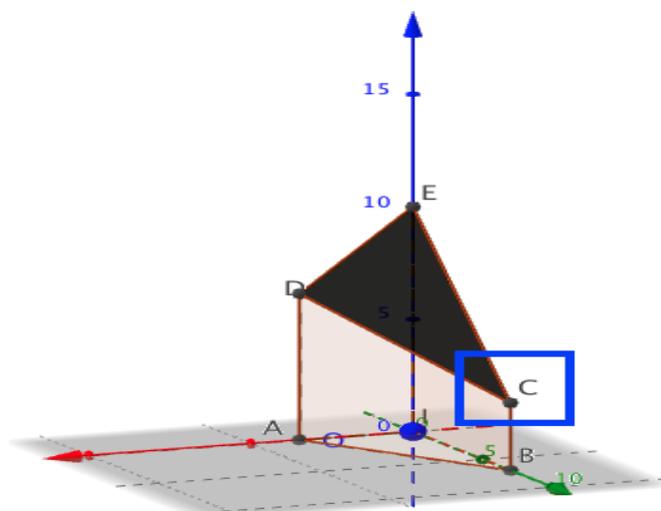


**Figura 2.** Região admissível ocultando construções auxiliares

Pode-se ainda, usando o seletor, representar as superfícies de nível (planos no caso):

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = \beta\}, \beta \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Pode-se verificar que intersectam o poliedro se e só se  $-21 \leq \beta \leq \frac{27}{2}$ . Um exemplo da superfície de nível está ilustrado na Figura 3.



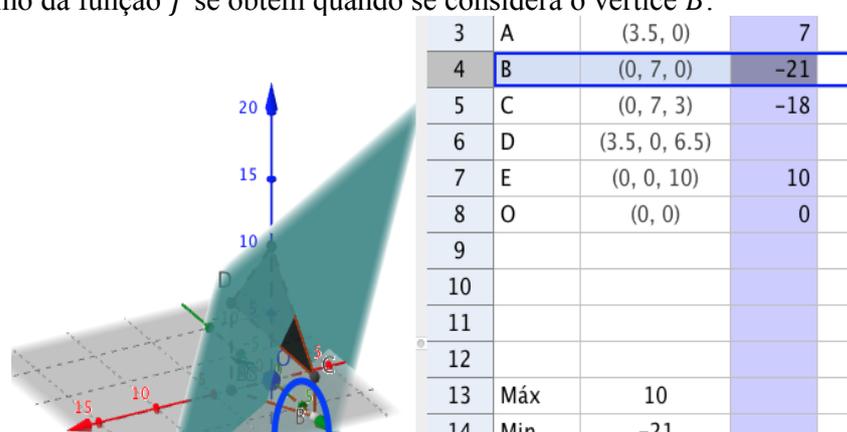
**Figura 3.** Superfície de Nível

De acordo com o Teorema 6, a solução ótima (já que existe) ocorre num dos vértices do poliedro. No caso, usando a folha de cálculo do GeoGebra, versão 5, é possível, explorar os custos com relação à cada vértice e decidir-se sobre o valor ótimo. A perpendicular à normal ao vetor pode ser manipulada de modo a verificar-se que não existem soluções ótimas alternativas já que não existem dois vértices com soluções com o mesmo valor custo (valor da função  $f$ ).

**Exemplo 1.** Considere-se o problema

$$\begin{aligned} \min f &= 2x - 3y + z \\ &\text{sujeito a} \\ \begin{cases} x + y + z \leq 10 \\ 2x + y \leq 7 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

As coordenadas dos pontos, dos vértices, são facilmente inseridas na folha de cálculo do GeoGebra conforme Figura 4. Facilmente se pode observar o valor ótimo a partir da janela de folha de cálculo. Sendo que o objetivo é minimizar, vê-se que o mínimo da função  $f$  se obtém quando se considera o vértice  $B$ .



**Figura 4.** Representação do valor ótimo (vértice  $B$ ) e folha gráfica

**Exemplo 2.** Considere-se o problema

$$\begin{aligned} \min f &= 2x - 3y + z \\ &\text{sujeito a} \\ \begin{cases} x + y + z \leq 10 \\ 2x + y \leq 7 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Analogamente, os resultados podem ser observados na Figura 5. No caso, em que o objetivo é maximizar, vê-se que o máximo da função  $f$  se obtém quando se considera o vértice  $D$ .

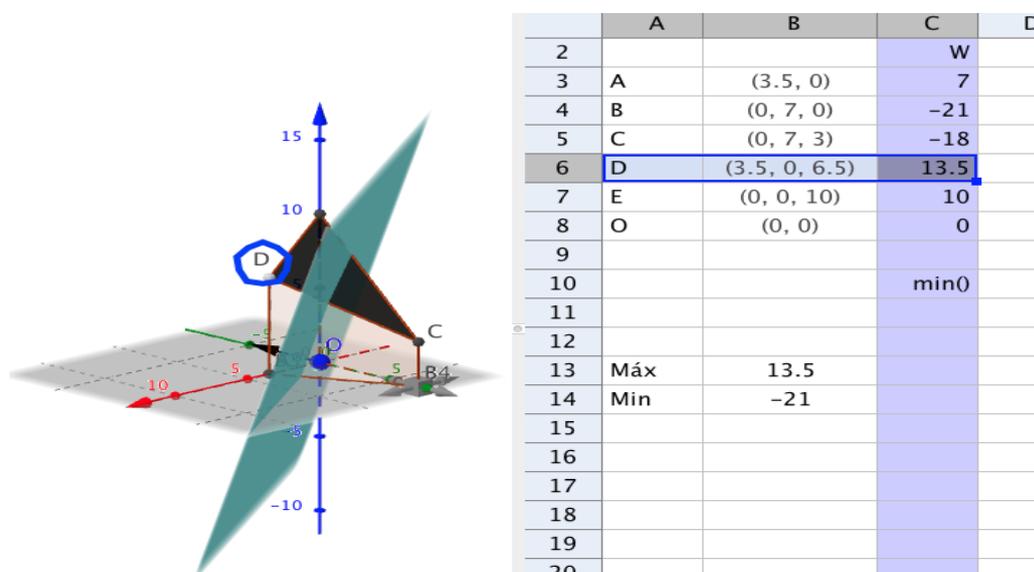
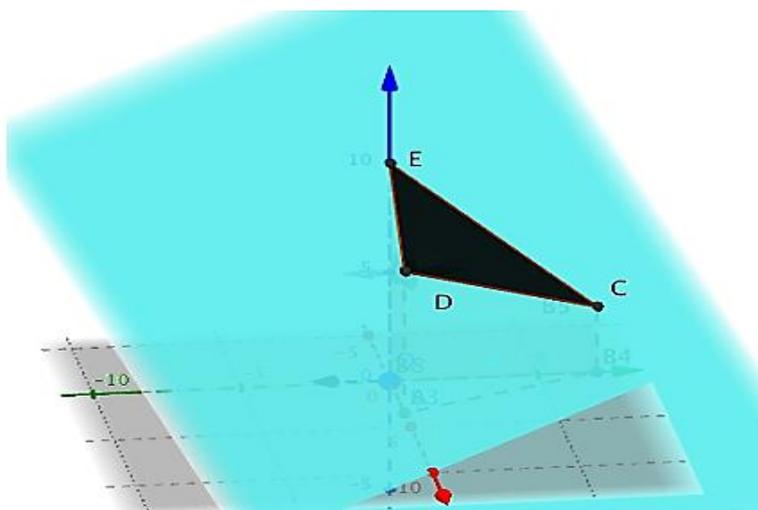


Figura 5. Representação do valor ótimo (vértice  $D$ ) e folha gráfica

**Exemplo 3.** Considere-se o problema

$$\begin{aligned} \min f &= x + y + z \\ \text{sujeito a} \\ \begin{cases} x + y + z \leq 10 \\ 2x + y \leq 7 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Similarmente, os resultados podem ser observados na Figura 6. No caso, em que o objetivo é maximizar, mas a região admissível é igual ao anterior. É possível verificar que qualquer ponto sobre a face, ou o vértice do polígono  $\{C, D, E\}$  maximiza  $f$ . Vê-se que o máximo da função  $f$  se obtém quando se considera o vértice  $D$ .



**Figura 6.** Representação do valor ótimo (vértice  $D$ )

## 2.1 Apreciação dos resultados

A solução gráfica gerada condiz naturalmente, com o Teorema 6, e a visualização geométrica dos extremos. Portanto, funciona! Todavia, há que reter outras valências do GeoGebra que consiste na possibilidade de avaliar cada valor interativamente na planilha.

É de realçar alguns aspetos verdadeiramente pertinentes com relação às experiências possíveis em sala de aulas já que a ferramenta folha de cálculo deverá permitir avaliar os valores da função objetivo e decidir sobre o ótimo. Pois:

- a planilha do GeoGebra, versão 5, reconhece os pontos do espaços bem como as suas coordenadas;
- a planilha do GeoGebra, versão 5, permite fazer cálculos com relativa facilidade e usar funções predefinidas (max ou min por ex.) a fim de determinar o valor ótimo;
- em alguns casos é possível resolver o problema considerando um máximo e o mínimo.

Todavia, o software apresenta limitações reais já que as regiões admissíveis só são possíveis mediante construções auxiliares. Não é tão trivial a ilustração de regiões admissíveis em  $\mathbb{R}^3$ . Fora isso, o ambiente gráfico, é "feito", já que possui algumas limitações a nível de resolução e de atributos do objeto. Não confere grandes margens para tornar mais simples a análise geométrica. As manipulações

fazem perder a qualidade gráfica. Destaca-se, em particular a impossibilidade de representar regiões do tipo exemplificado. Ainda assim, é preciso reconhecer as potencialidades relativas as construções auxiliares, são boas. Em termos didáticos podem, ajudar os alunos a compreender como construí-los com lápis e papel.

De um modo geral, entende-se que o software pode-se preparar atividades didáticas deveras interessantes podendo desembocar aprendizagem significativas, ainda que, exijam conhecimentos e mais perspicácia para uma aprendizagem autónoma.

## 2.2 Relato de Experiência

Para o estudo das potencialidades da folha gráfica 3D do GeoGebra, no que concerne a resolução de problemas de PL, com 3 variáveis de decisão, selecionou-se alunos do 2.º ano de Licenciatura em Estatística e Gestão de Informação (EGI). A justificativa da escolha consiste no facto desses alunos já saberem usar a janela gráfica 2D para resolver, no plano, problemas de PL.

Deste modo, pretendeu-se obter uma abordagem comparativa. Usou-se uma ficha com sugestões da resolução (em anexo) e do resultado obtido.

Para uma experiência didática, foi apresentado um problema de PL, cujo região admissível é um poliedro, um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  esperando uma abordagem por partes dos alunos

- tentar uma abordagem semelhante ao empregue em problemas de PL de  $\mathbb{R}^2$
- conceber construções auxiliares para determinar regiões admissíveis
- Visualizar a solução ótima e confirmar através da planilha do GeoGebra.

Propôs-se que resolvessem o problema 10 pelo método geométrico usando o GeoGebra.

Em seguida, considerou-se o problema 11 cuja região admissível é o mesmo e solução ótima são todos os pontos sobre a face do poliedro (infinitude de soluções ótimas).

Durante todo o processo, os alunos tiveram a oportunidade de fazer apreciações sobre as dificuldades e eventuais vantagens e discutir sobre os procedimentos do GeoGebra. Essas informações estão sumariadas nos Gráficos 7-10.

Acha que o GeoGebra é uma boa opção complementar para o estudo de problemas de PL, com 3 variáveis de decisão?

7/9 respostas corretas

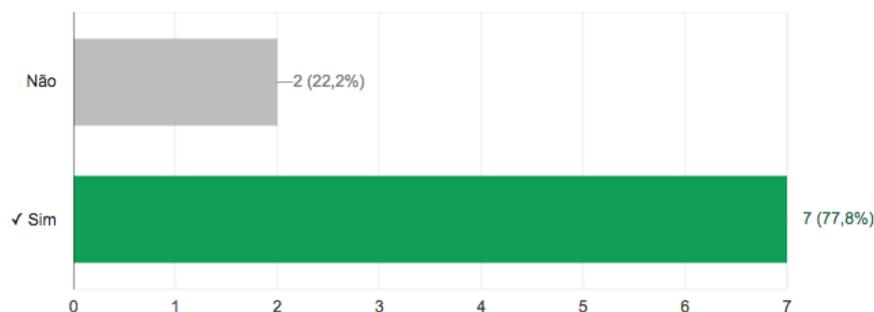


Figura 7.

Quais são as principais dificuldades em conceber as regiões admissíveis em  $R^3$ , com 3 variáveis de decisão, comparativamente ao caso de duas variáveis de decisão?

9 respostas

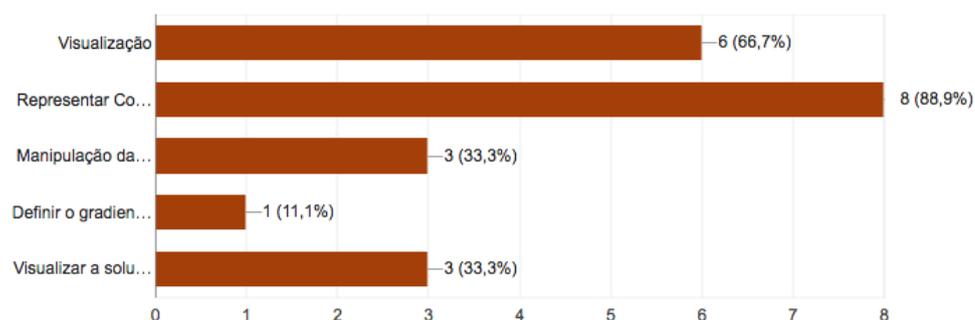


Figura 8.

Acha que conseguiria resolver qualquer problema de PL, com 3 variáveis de Decisão usando Geogebra?

9 respostas

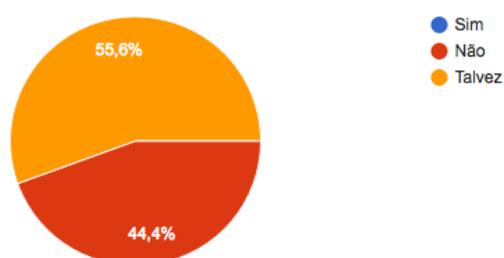
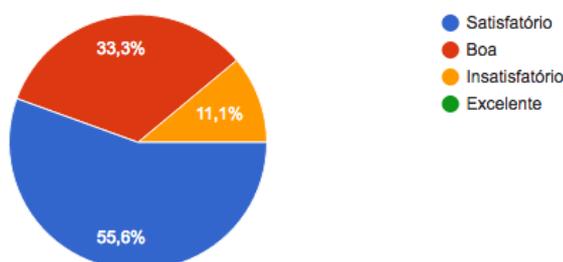


Figura 9.

### Num cômputo geral, como considera a potencialidade da janela 3D para a resolução Geométrica de Problemas de PL

9 respostas



**Figura 10.**

Tal como prevíamos, tiveram dificuldade relativa aos procedimentos técnicos para restri-ões do tipo  $f(x, y, z) \leq \alpha \in \mathbb{R}$  e visualizar região admissível de um problema de PL, com 3 variáveis de decisão. Dos gráficos, concluímos que apesar desses alunos admitirem as potencialidades da folha gráfica 3D a maioria considera difícil a técnica de determinar a região admissível. Nenhum dos inquiridos acha que conseguiria resolver qualquer problema de PL, com 3 variáveis de decisão, usando a folha gráfica 3D.

### Considerações finais

Neste artigo, consideramos o problema de PL, com particular atenção a resolução geométrica usando folha gráfica 3D do GeoGebra, versão 5, para resolução de problemas de PL que envolvem três variáveis de decisão. Enunciamos o teorema central, Teorema 6, que nos remete a visualização da solução Geométrica, procurando vértices.

Estudamos os problemas de PL com três variáveis de decisão. Apontamos o facto de no GeoGebra não serem interpretadas todos os tipos de desigualdades do tipo  $f(x, y, z) \leq \alpha \in \mathbb{R}$ , o que restringe a representação de regiões admissíveis em 3D. Enunciamos dois problemas cuja a região admissível é um poliedro e solução ótima ocorre no vértice (ou vértices e face) do poliedro.

Apresentamos os problemas aos alunos de 2.o Ano de EGI, que já tinham algum conhecimento da resolução de um PL usando GeoGebra, com duas variáveis de decisão e folha gráfica 2D.

Após preencher um inquérito relatando o processo de resolução dos exercícios, concluímos que de facto existem dificuldades que podem limitar a

exploração da folha gráfica 3D, por parte dos alunos, no que se refere às regiões admissíveis para um problema de PL com 3 variáveis de decisão. Requer mais abstração e maturidade.

O nosso trabalho termina com a experiência didática. Porém, como trabalho futuro, sugerimos a exploração de outros métodos ou abordagem para a resolução gráfica usando a folha gráfica 3D do GeoGebra para a resolução de problemas de PL.

Finalmente, deixamos as nossas críticas em relação às limitações da folha gráfica 3D (que ainda está em desenvolvimento) e sugerimos melhorias na folha gráfica 3D para novas versões, que ultrapassem as limitações referidas.

## Referências

- AIZIKOVITSH-UDI, E., RADAKOVIC, N. (2012). *Teaching probability by using geogebra dynamic tool and implemanting critical thinking skills*. Procedia Social and Behavioral Sciences 46, 4943-4947.
- ARANGO, J., GAVIRIA, D., VALENCIA, A. (2015). *Differential calculus teaching through virtual learning objects in the field of management sciences*. Procedia Social and Behavioral Sciences 176, 412-418.
- ARBAIN, N., SHUKOR, N. (2015). *The effects of GeoGebra on students achievement*. Procedia Social and Behavioral Sciences 172, 208-214.
- BAZARAA, M., JARVIS, J., SHERALI, H. (2010). *Linear programming and network flows*. 4<sup>a</sup>ed. John Wiley & Sons, Inc.
- BU, L., SCHOEN, R. (2011). *TModel-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*. Sense Publishers, Rotterdam.
- CALIGARIS, M., SCHIVO, M., ROMITI, M. (2015). *Calculus & GeoGebra, an interesting partnership*. Procedia Social and Behavioral Sciences 174, 1183-1188.
- CHAN, S., ISMAIL, Z. (2014). *Developing Statistical Reasoning Assessment Instrument for High School Students in Descriptive Statistics*. Procedia Social and Behavioral Sciences 116, 4338-4343 .
- DOGAN, M., GUNER, P., SOYLU, M. (2012). *A study of efficiency activity on logarithm*. Procedia Social and Behavioral Sciences 46, 4449-4453.
- DOS SANTOS, J. M. (2013). *Programacion Lineal y GeoGebra*. In: XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Ensenanza de las Matemáticas, Palma de Mayorca.
- KANNAN, G., DINAKARAN, N., LAVANYA, N. (2004). *A Graphical Approach for Solving Three-Variable Linear Programming Problems*. Recent Developments

in Materials Processing (RDMP--04). At Bharathiyar College of Engineering and Technology, Karaikal, India, Volume: Mar 2004.

KAVGIZMANLI, T., TATAR, E., AKKAYA, A. (2011). *Analytic Analysis of Lines with Dynamic Mathematical Software*. Procedia Social and Behavioral Sciences 15, 2505-2509.

KOLMAN, B., BECK, R. (1995). *Elementary Linear Programming with Applications*. Elsevier Science & Technology Books.

LINGEFJARD, J. (2017). *Mathematical Modeling: applications with geogebra*. John Wiley & Sons, New Jersey.

MEDINA, E., VALDÉS, L. (2015). *Dynamic models as change enablers in Educational Mathematics*. Procedia Social and Behavioral Sciences 176, 923-926.

PACHEMSKA, S., PACHEMSKA, T., ILIEV, D., KUZMANOVSKA, M. (2014). *Analyses of Student's Achievement Depending on Math Teaching Methods*. Procedia Social and Behavioral Sciences 116, 4035-4039.

PARIS, Q. (2016). *An Economic Interpretation of Linear programmin*. PALGRAVE MACMILLAN.

REIS, Z., OZDEMIR, S. (2010). *Using Geogebra as an information technology tool: parábola teaching*. Procedia Social and Behavioral Sciences 9, 565-572.

REIS, Z. (2010). *Computer supported mathematics with Geogebra*. Procedia Social and Behavioral Sciences 9, 1449-1455.

SAHAA, R., AYUB, A., TARMIZI, R. (2010). *The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning*. Procedia Social and Behavioral Sciences 8, 686-693.

VENEMA, G. (2013). *Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra*. The Mathematical Association of America.

ZACHI, J. (2016). *Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra*. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Câmpus de Rio Claro.

ZENGINA, Y., FURKAN, H., KUTLUCA, T. (2012). *The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry*. Procedia Social and Behavioral Sciences 31, 183-187.

## Apêndice: Ficha e fotos da sessão prática

### PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR EM $\mathbb{R}^3$ , COM 3 VARIÁVEIS DE DECISÃO

#### 1 Programação Linear com GeoGebra 3D. Ficha de atividades.

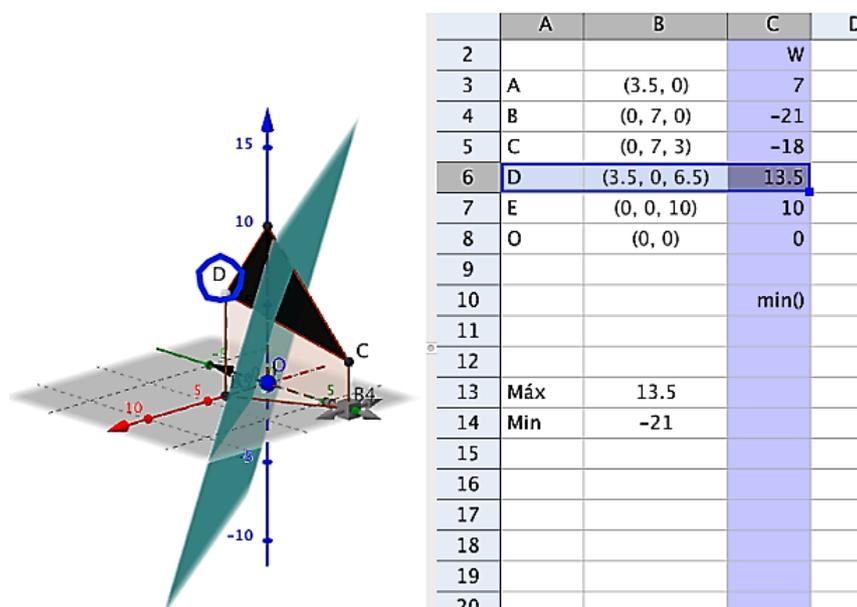
##### 1.1 ATIVIDADE 1

Resolva o Problema seguinte, usando o Geogebra

**Problema 1.** (Maximizar)

$$\begin{aligned} \max f &= 2x - 3y + z \\ \text{sujeito a} \\ \begin{cases} x + y + z \leq 10 \\ 2x + y \leq 7 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

**Sugestão:** Construa a região admissível conforme figura abaixo



**Figura 1.** Região admissível, função objectiva e custos associados aos vertices dos poliedros

Indique as dificuldades e necessidades a nível de ferramentas.

Compare com as ferramentas disponíveis em 2D.



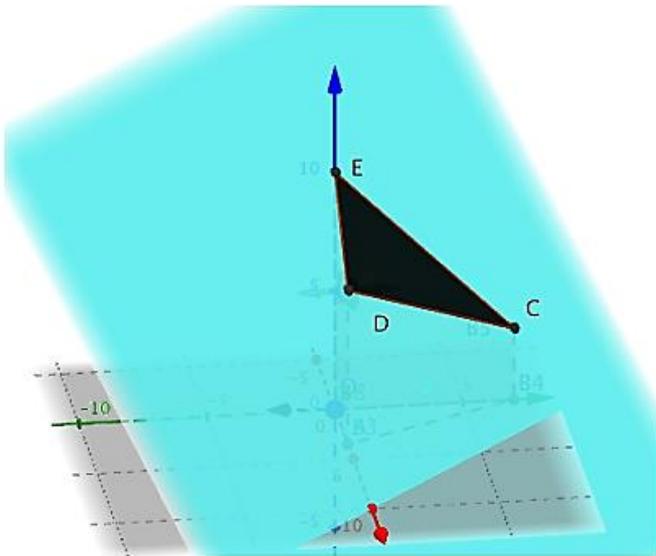
### 1.3 ATIVIDADE 2

Resolva o Problema seguinte, usando o Geogebra

**Problema 3.** Sobre a mesma figura, tome-se como função objective  $f = x + 3y + z$ .

$$\begin{aligned} \max f &= x + y + z \\ \text{sujeito a} \\ \begin{cases} x + y + z \leq 10 \\ 2x + y \leq 7 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

**Sugestão:** Note que a região admissível é igual ao problema anterior. As curvas de nível serão paralelas a face  $\{C, D, E\}$ .



**Figura 3.** Região admissível, função objectiva e custos associados aos vertices dos poliedros

Conclua que qualquer ponto sobre a face  $\{C, D, E\}$  maximiza  $f$ .