Anexo I – Fichas de trabalho para professores

Propostas de Trabalho – Tarefas para familiarização com o programa GeoGebra

Ficha de Trabalho

Construções Geométricas Básicas

Utilize o GeoGebra para:

1. Construir um triângulo equilátero, dado o lado.

a) Relacione a medida do comprimento dos lados com as amplitudes dos ângulos.

b) Determine o perímetro e a área.

c) Explore outras possibilidades de construção de triângulos equiláteros.

Descreva os procedimentos de construção.

Adaptado de: APM (1999:7). Geometria com Cabri-geéomètre. T^3 Europe.

2. Construir um quadrado:

a) dado o lado.

b) dado a diagonal.

Descreva os procedimentos de construção.

3. Explorar possibilidades de construção de um qualquer paralelogramo.

Registe todos os passos que efectuou e compare-os com os dos seus colegas.

Propostas de Trabalho – Tarefas Parte Teórico-Prática

Ficha de Trabalho Nº 1

Isometrias no plano euclidiano

<u>Translação e composição de translações</u>

Explorar as propriedades da translação

1. Abra o programa GeoGebra e proceda do seguinte modo:
   - Construa um triângulo [ABC].
   - Escolha a direção, o sentido e a medida do comprimento do vetor diretor.
   - Aplique ao triângulo o vetor e obtenha o seu transformado.
   - Compare a medida do comprimento de cada um dos lados do triângulo com a medida de comprimento de cada um dos lados do transformado.
   - Compare a medida da amplitude de cada um dos ângulos do triângulo com a medida da amplitude de cada um dos ângulos correspondentes do transformado.
   - Altere o vetor e verifique se as relações anteriores se mantêm.

   Registe propriedades da translação.

2. Selecione um dos vértices de um dos triângulos e deforme a figura. Verifique se as propriedades da translação se mantêm.

Fonte: Cabrita *et al*. (2008:114). m@c2. Novas Trajectórias em Matemática. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Explorar as propriedades da composição de duas translações.

Abra uma nova folha no programa GeoGebra e proceda do seguinte modo:

- Construa um Quadrilátero [ABCD].
- Escolhe a direção, o sentido e a medida dos comprimentos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Aplique ao quadrilátero o vetor $\vec{u}$ e obtenha o seu transformado [A´B´C´D´].
- Aplique ao quadrilátero [A´B´C´D´] o vetor $\vec{v}$ e obtenha o seu transformado [A´´B´´C´´D´´].
- Construa um vetor $\overrightarrow{AA''}$.

Qual a relação entre os vetores $\overrightarrow{AA''}$ e $\overrightarrow{u+v}$.

Registe propriedades da composição de duas translações.

Ficha de Trabalho Nº 2

Isometrias no plano euclidiano (continuação)

Rotação e composição de rotações

Explorar as propriedades da rotação

1. Abra o programa GeoGebra e proceda do seguinte modo:
   - Construa um triângulo [ABC].
   - Fixa um ponto O exterior ao triângulo como centro de rotação.
   - Determine a imagem do triângulo pela rotação de centro O e medida de amplitude de ângulo de 60º.
   - Determine a imagem do triângulo inicial pela rotação de centro O e medida de amplitude de ângulo de -60º.

   Qual a posição das imagens em relação ao triângulo inicial?

2. Abra uma nova página e construa outro triângulo:
   - Considere um dos vértices do triângulo como centro de rotação.
   - Determine a imagem do triângulo pela rotação associada a esse ponto e a um ângulo de medida de amplitude de 100º.
   - Compare a medida da amplitude do ângulo formado por um lado do triângulo e o lado correspondente da imagem.
   - Compare a medida do comprimento de cada um dos lados do triângulo com a medida do comprimento de cada um dos lados correspondentes do transformado.
   - Compare a medida da área do triângulo com a medida da área do transformado.
   - Mova o centro de rotação, e verifique se as relações anteriores se mantêm.

   Registe propriedades da rotação.

3. Seleccione um dos vértices do triângulo [ABC] nos pontos 1 e 2 e deforme a figura de modo a ter um triângulo escaleno. Determine os segmentos que unem os pontos às suas imagens e responda:
   - Qual a direção destes segmentos?
   - Os seus pontos médios são colineares?
   - Que conjetura pode fazer acerca da interseção das mediatrizes destes segmentos e o centro de rotação? Justifique a tua resposta.

Adaptado de: Cabrita *et al*. (2008:113). m@c2. Novas Trajectórias em Matemática. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Explorar algumas propriedades da composição de rotações.

Abra o GeoGebra e explore:

1. Composição de duas rotações R_1 e R_2:
   a) com o mesmo centro *O* e amplitudes α e β.

   b) de centros *U* e *V* e amplitudes α_1 *e* α_2:
      b1. se $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 360^{\circ}$.
      b2. se $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^{\circ}$ (ou um múltiplo de 360°).
      Registe as observações.

2. Composição de M_2M_1 de duas meias-voltas M_1 e *M2*, de centros *U* e *V*.
   Registe as observações.

3. Composição de uma meia-volta por uma translação (ou de uma translação por uma meia-volta).
   Registe as observações.

Adaptado de: Veloso, E. (1998:75). Temas Actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Ficha de Trabalho Nº 3

Isometrias no plano euclidiano (continuação)

<u>Reflexão e composição de reflexões</u>

Explorar as propriedades de reflexão

1. Abra o programa GeoGebra e proceda do seguinte modo para explorar as propriedades da reflexão:

- Construa um triângulo [ABC].
- Construa uma reta que irá servir de eixo de reflexão.
- Determine a imagem [A´B´C´] do triângulo pela reflexão associada ao eixo criado.
- Relacione a medida da amplitude de cada um dos ângulos do triângulo com a medida da amplitude de cada um dos ângulos correspondentes da imagem.
- Relacione a medida do comprimento de cada um dos lados do triângulo com a medida de comprimento de cada um dos lados correspondentes da imagem.
- Relacione a distância entre cada um dos vértices do triângulo e o eixo de reflexão com a distância entre o vértice correspondente da imagem e o eixo de reflexão.

O Triângulo [A´B´C´] obtido é congruente com o inicial, [ABC]? Justifique a tua resposta.

Registe propriedades da reflexão.

2. Selecione um dos vértices de um dos triângulos e deforme a figura. Verifique se as propriedades da reflexão se mantêm.

3. Selecione um dos vértices do triângulo [ABC] e deforme a figura de modo a ter um triângulo escaleno.

- Determine os segmentos que unem os pontos às suas imagens.
- Qual a direcção destes segmentos?
- Os seus pontos médios são colineares?
- Qual a relação entre a mediatriz destes segmentos e o eixo de reflexão?

Adaptado de: Cabrita et *al*. (2008:113). m@c2. Novas Trajectórias em Matemática. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Explorar algumas propriedades da composição de reflexões

1. Composição de duas reflexões de eixos paralelos

Abra uma nova folha no programa GeoGebra e proceda do forma a explorar as propriedades da composição de duas reflexões de eixos paralelos.

Construa:

- um triângulo retângulo [ABC].
- a imagem [A´B´C´] de [ABC] por uma reflexão relativamente a um eixo dado.
- a imagem [A´´B´´C´´] de [A´B´C´] por uma reflexão relativamente a outro eixo paralelo ao anterior.

a) Qual é a relação entre [A´B´C´] e [ABC]? Justifique a tua resposta.

b) É possível obter a imagem [A´´B´´C´´] a partir de [ABC] recorrendo a uma única transformação? Descreva-a.

c) Como pode descrever a transformação resultante de duas reflexões consecutivas, em torno de dois eixos paralelos?

d) Que resultado prevê na composição de duas reflexões de eixos paralelos?

2. Composição de duas reflexões de eixos concorrentes

Abra uma nova folha no GeoGebra e repita os procedimentos anteriores, utilizando dois eixos concorrentes.

Que resultado prevê na aplicação da composição de duas reflexões com eixos concorrentes?

Adaptado de: NCTM (2001). Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Adendas do NCTM – Geometria nos 2º e 3º ciclos.
APM (1999:7). Geometria com Cabri-geéomètre. T^3 Europe.

3. Composição de três reflexões

Abra uma nova folha no programa GeoGebra e explore as propriedades de composição de três reflexões**:**

a) Se os eixos forem de um feixe paralelo;

b) Se os eixos das três reflexões forem concorrentes;

c) Se dois quaisquer dos três eixos de reflexão se intersectem em pontos distintos;

d) Se dois e só dois pontos dos três eixos são paralelos e o terceiro é transversal a estes dois.

Registe as observações.

Fonte: Cabrita *et al*. (2008:104). m@c2. Novas Trajectórias em Matemática. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Ficha de Trabalho Nº 4

Isometrias no plano euclidiano (continuação)

Reflexão deslizante e composição de duas reflexões deslizantes

Explorar propriedades da reflexão deslizante

1. Abra o programa GeoGebra e proceda do seguinte modo:
   - Construa um triângulo [ABC].
   - Construa uma reta que irá servir de eixo de reflexão.
   - Determine a imagem [A´B´C´] do triângulo pela reflexão associada ao eixo criado.
   - Determine a imagem, de [A´B´C´] por uma translação associada a um vetor com direção paralela ao eixo de reflexão.
   - Observe a imagem obtida, explore e registe as propriedades da composição de uma reflexão com uma translação associada a um vetor com direcção paralela ao eixo de reflexão – reflexão deslizante.

   Registe propriedades da reflexão deslizante.

Fonte: Cabrita *et al*. (2008:114). m@c2. Novas Trajectórias em Matemática. Aveiro: Universidade de Aveiro.

2. Selecione um dos vértices do triângulo [ABC] e deforme a figura de modo a ter um triângulo escaleno.

- Determine os segmentos que unem os pontos às suas imagens.
- Qual a direção destes segmentos?
- Os seus pontos médios são colineares?
- Qual a relação entre a mediatriz destes segmentos e o eixo de reflexão?

Explorar propriedades da composição de duas reflexões deslizantes distintas.

Abra uma nova folha no programa GeoGebra e determine a composição de duas reflexões deslizantes distintas.

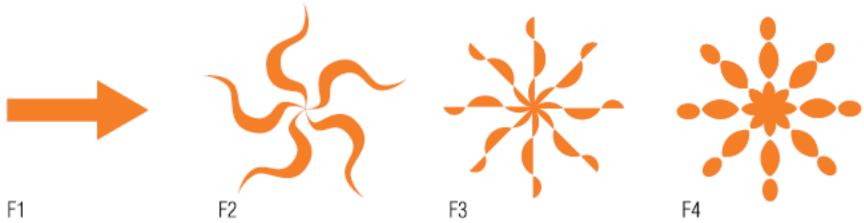
Registe as observações.

Ficha de Trabalho Nº 5

Conceito de Simetrias e simetrias em polígonos regulares

Explorar o conceito de simetrias

Das figuras representadas, quais delas possuem simetrias? Em caso afirmativo indique-as e justifique.



Adaptado de: Cabrita *et al*. (2008:113). m@c2. *Novas Trajectórias em Matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Explorar eixos de Simetrias em polígonos regulares

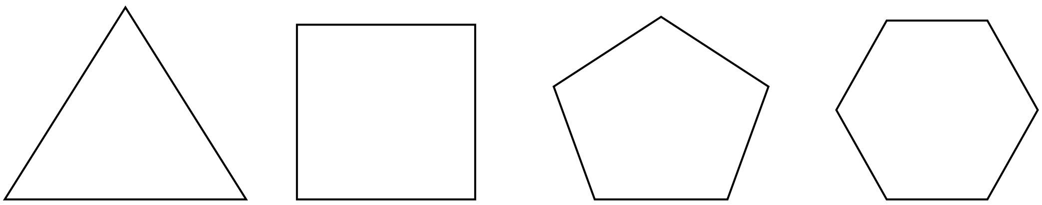
1. Verifique se cada um dos polígonos abaixo representados tem simetria de:

a) Reflexão.

b) Rotação.

Em caso afirmativo indique quantos eixos de simetria tem cada um deles.

2. Investigue qual a relação que existe entre o número de eixos de simetria dos polígonos regulares e o seu número de vértices, lados e ângulos.
3. Organize os seus dados numa tabela e retire conclusões.



Adaptado de: Formação Contínua em Matemática de Professores de 1º e 2º ciclos (2007). Évora: Universidade de Évora.

__Propostas de Trabalho – Parte Prática__

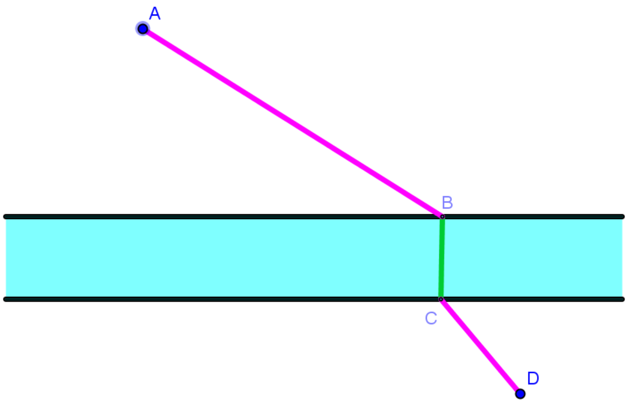
Ficha de Trabalho Nº 1

Problemas de Geometria e Isometrias

Utilize o GeoGebra para resolver os seguintes problemas:

1. Entre duas cidades *A* e *D*, existe um rio de margens paralelas, como na figura. Pretende-se construir uma ponte *BC* no rio (perpendicular às margens) mas em tal posição que o trajeto entre as duas cidades (a linha poligonal *ABCD*) tenha o menor comprimento possível. Em que local do rio deve colocar a extremidade *B* da ponte?

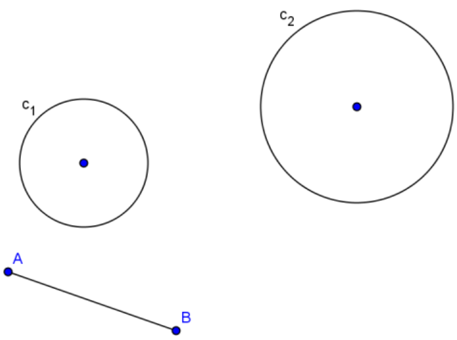
   Sugestão: utilize a isometria "translação".



Fonte: Veloso, E. (2006). Transformações Geométricas. Propostas de Trabalho.

2. São dadas duas circunferências c_1 e c_2 e um segmento [AB]. Encontre uma reta paralela a [AB] que intersete c_1 e c_2 nos pontos P_1 e P_2, respetivamente, de modo que $\overline{P_1P_2} = \overline{AB}$.

   Sugestão: utilize a isometria "translação".



Fonte: APM (1999:7). Geometria com Cabri-geéomètre. T³ Europe.

3. Dadas três retas paralelas, determine um triângulo equilátero com vértices sobre elas.

   Sugestão: utilize a isometria rotação

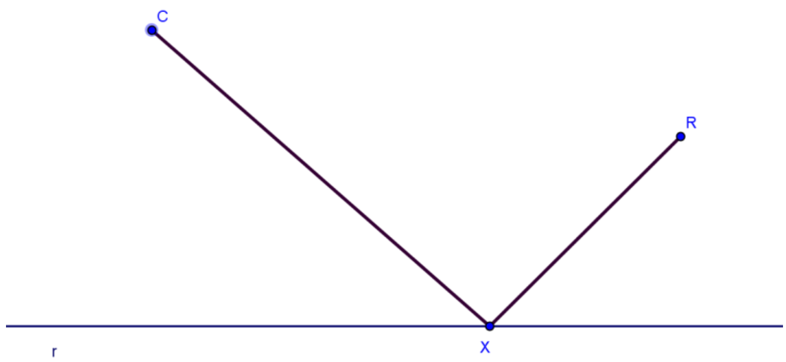
   Fonte: Franco de Oliveira, A. J. (1997:79). Transformações Geométricas. Lisboa: Universidade Aberta.

4. Dadas três retas paralelas, determine um quadrado com três vértices sobre elas.

   Sugestão: utilize a isometria rotação

5. A Clementina vai todas as tardes regar o seu roseiral. Sai de casa (ponto *C*) com um regador, vai enchê-lo a uma ribeira (reta *r*) e depois dirige-se ao roseiral (ponto *R*). Determine o ponto *X* em *r* tal que o trajeto *CX* + *XR* seja o mais curto possível.

   Sugestão: utilize a isometria reflexão



Fonte: Veloso, E. (2006). Transformações Geométricas. Propostas de Trabalho.

Ficha de Trabalho Nº 2

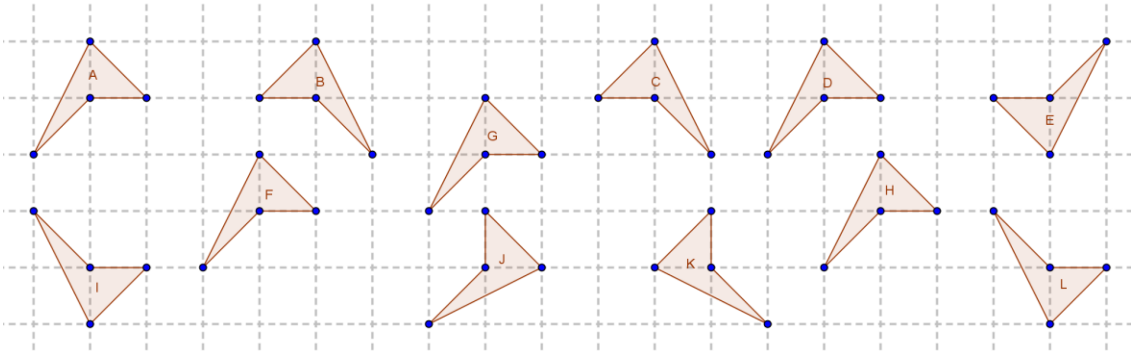
Isometrias e composições de isometrias

1. Baseando-se na figura, identifique as figuras que representam o transformado da figura A por:

a) Translação

b) Reflexão

c) Reflexão deslizante



Adaptado de: NCTM (2001). Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Adendas do NCTM – Geometria nos 2º e 3º ciclos.

2. Caracterize a isometria que transforma a primeira figura na segunda

a) A figura A na figura B.

b) A figura A na figura C.

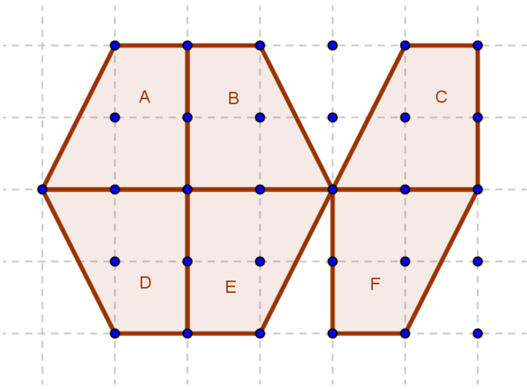
c) A figura B na figura D.

d) A figura B na figura E.

e) A figura E na figura F.

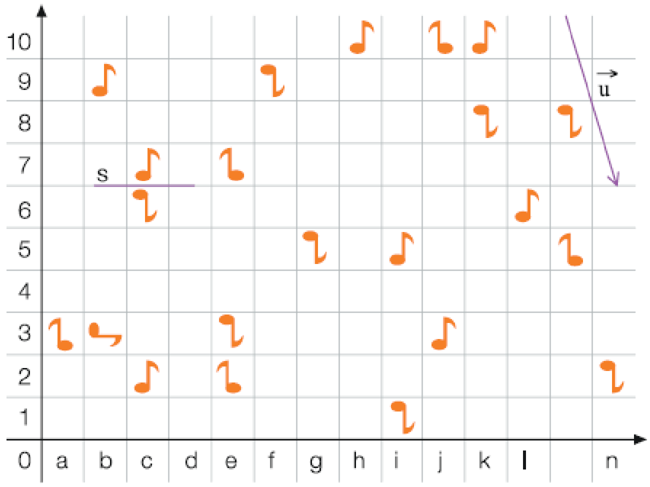
f) A figura C na figura E.

g) A figura A na figura F.



Fonte: NCTM (2001). Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Adendas do NCTM – Geometria nos 2º e 3º ciclos.

3. Relativamente à figura seguinte:



a) Complete, como no exemplo, qual(ais) a(s) isometria(s) que te permita(m) obter os pares ou trios de figuras correspondentes indicadas abaixo. Desenha todos os objetos necessários.

- (c,6) e (c,7) – reflexão de eixo s;
- (k,8) e (m,8) –
- – translação associada ao vetor $\vec{u}$.
- (a,3) e (b,3) –
- (e,2) e (e,3) –
- (l,6) e (m,5) –

b) Indique ou construa pares de figuras que possam ser obtidas pelas seguintes composições e indique os elementos necessários à identificação dessas isometrias:

- Uma translação depois de uma rotação;
- Uma reflexão depois de uma translação;
- Uma rotação depois de uma reflexão.

Fonte: Cabrita *et al*. (2008:115). m@c2. Novas Trajectórias em Matemática. Aveiro: Universidade de Aveiro.

4. Comente as seguintes afirmações:

a) A composição de três reflexões quaisquer é uma isometria negativa e portanto tem sempre como resultado uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

b) Se dois ou três eixos de reflexão coincidirem, a composição de três reflexões, em qualquer ordem, é sempre uma reflexão.

c) Da composição de n reflexões (de eixos distintos), para n≥4, resulta:

c.1. Uma translação ou uma rotação, se n é par.

c.2. Uma reflexão ou uma reflexão deslizante, se n é impar.

Adaptado de: APM (2008). Matemática para Professores. Transformações Geométricas e Simetria.

5. Utilize o GeoGebra e construa:

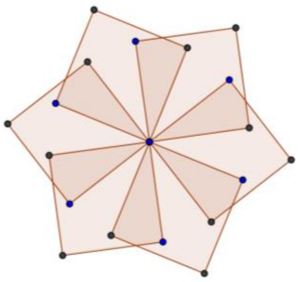
a) um triângulo escaleno [ABC].

b) a sua imagem [A´B´C´] por uma rotação.

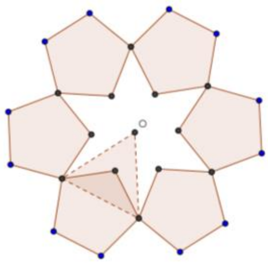
Descubra duas reflexões cuja composta seja a rotação inicial.

Fonte: APM (1999: 10). Geometria com Cabri-geéomètre. T^3 Europe.

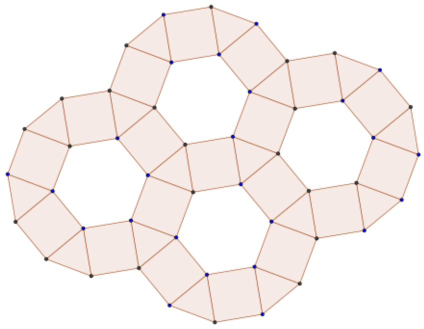
6. Utilize o GeoGebra, as isometrias e composições de isometrias para construir as figuras abaixo representadas:



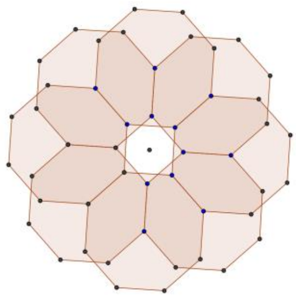
F_1



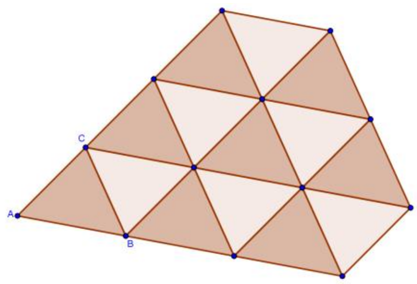
F_2



F_3



F_4



F_5

Registe todos os passos que efetuou e compare-os com os dos seus colegas.

Adaptado de: APM (1999:11). Geometria com Cabri-geéomètre. T^3 Europe.

Cabri Geometry II Plus – Manual do Utilizador (2003:115).

Ficha de Trabalho Nº 3

<u>Atividades de exploração</u>

Aplicações de Isometrias

Explore sobre:

- Padrões Geométricos: Frisos e Rosáceas
- Maurits Cornelis Escher
- Técnica de Escher
- Pavimentações

Em:

- **http://viajarnamatematica.ese.ipp.pt/tecnologia.html**
- **http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/recursos.htm**
- **http://matematicaoitavo.blogs.sapo.pt/381.html**
- **http://galileu.globo.com/edic/88/conhecimento2.htm**
- **http://nautilus.fis.uc.pt/cec/arquivo/Nuno%20Crato/1999/19990130%20Escher%20e%20Mesquita.pdf**

Desenvolve um trabalho que aborde algum dos temas explorados para apresentação e discussão em contexto de formação.

Ficha de Trabalho Nº 4

<u>Frisos</u>[1]

Objetivo: Construir frisos a partir do módulo utilizando ícones da barra de ferramentas e a linha de comandos.

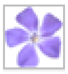
Módulo **Motivo**

Friso

O motivo foi construído a partir do módulo ao qual se aplicou uma reflexão de eixo perpendicular à direcção do friso.

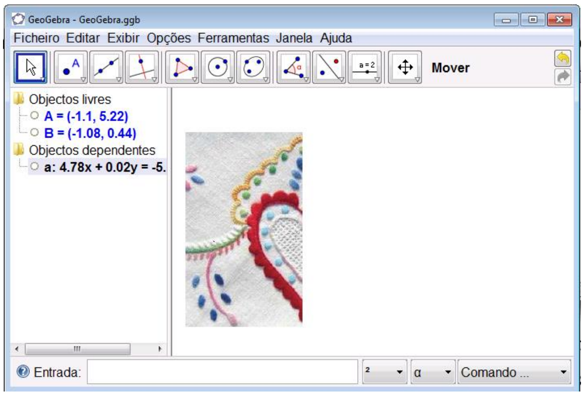
Construção do Friso I

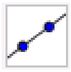
No friso, observamos um motivo que se repete por translação.

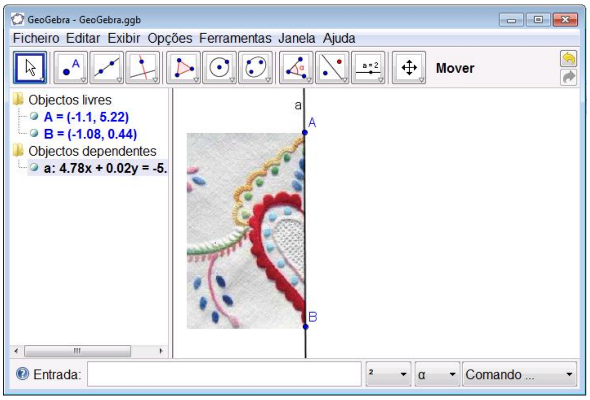
1. Insira, na zona gráfica, a imagem1.png que se encontra no ambiente de trabalho do computador. Nota – Para isso, seleccione o ícone  e clique na zona de trabalho. Só então, terá acesso à caixa que lhe permite localizar e inserir a imagem.

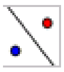
---

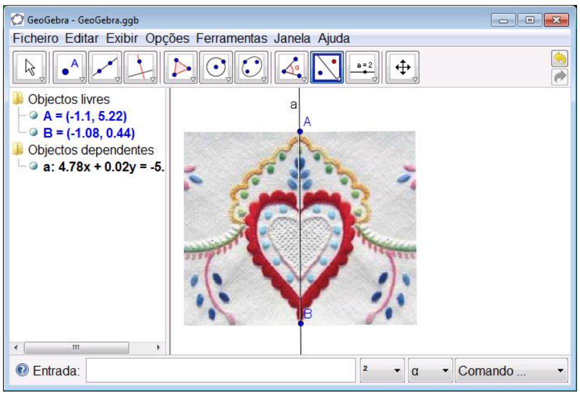
[1] Fonte: Trocado, A; Ribeiro, A, & Santos, J. (2009). Curso 3 – Como usar o GeoGebra para ensinar e aprender matemática - Profmat 2009 - APM. Instituto GeoGebra, Portugal.

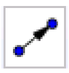


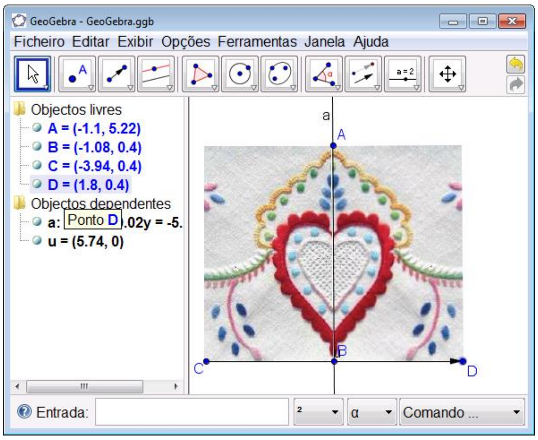
2. Utilizando a ferramenta “reta definida por dois pontos” , insira uma reta vertical – *a* – ajustada a um dos lados da imagem, como se ilustra a seguir.

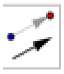


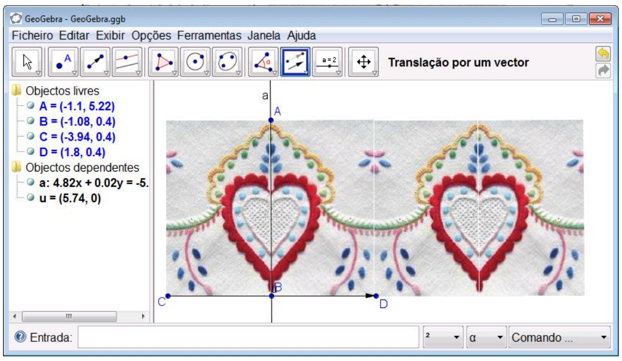
3. Determine a reflexão do módulo associada a essa reta *a*, utilizando a ferramenta “reflexão numa reta” .



4. Utilizando a ferramenta “vetor definido por dois pontos” , represente um vetor perpendicular ao eixo de reflexão, com a direção do friso, com sentido da esquerda para a direita e com medida de comprimento igual à largura do motivo, como se ilustra.

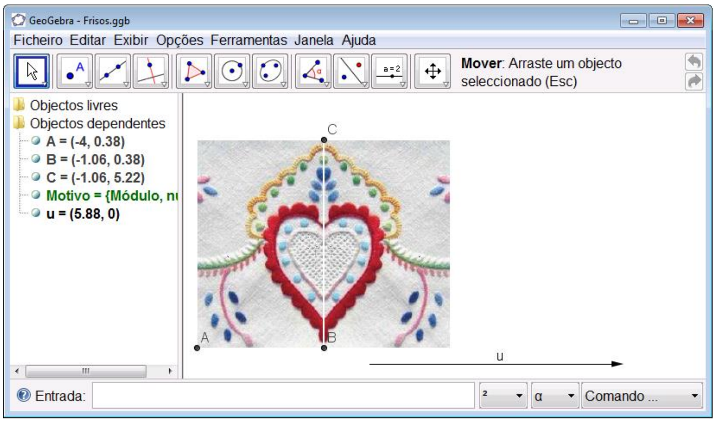


5. Aplique, ao motivo, uma translação associada a esse vetor. Utilize a opção “translação por um vetor”  , selecione o objeto a transformar e depois o vetor.



Construção do Friso II

1. Numa nova folha do GeoGebra, insira a imagem1.png.
2. Clicando no botão direito do rato sobre a imagem, altere o nome, nas propriedades básicas, para Módulo.
3. Defina os pontos A, B e C, cantos da imagem, na linha de comando, dando entrada de cada uma das seguintes instruções:
   - A=Canto[Módulo,1]
   - B=Canto[Módulo,2]
   - C=Canto[Módulo,3]
4. Defina o Motivo como: Motivo={Módulo,reflexão[Módulo,reta[B,C]]}



5. Aplique, ao motivo, uma translação associada ao vetor definido anteriormente e seus múltiplos introduzindo:

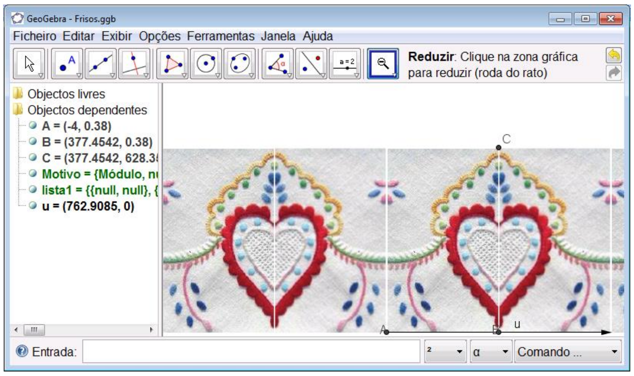
   {Translação[Módulo,u],Translação[Reflexão[Módulo,Reta[B,C]],u]}

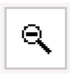
   {Translação[Módulo,-u],Translação[Reflexão[Módulo,Reta[B,C]],-u]}

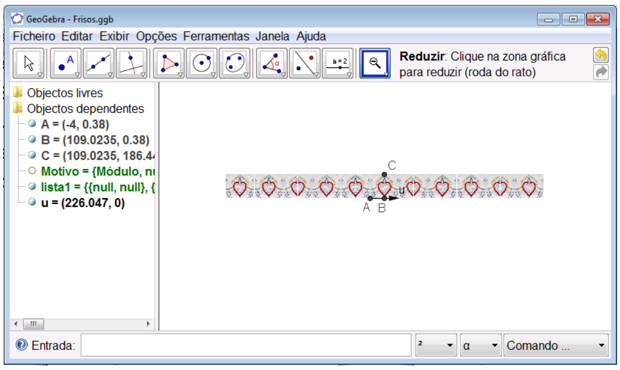
   {Translação[Módulo,2u],Translação[Reflexão[Módulo,Reta[B,C]],2u]}

6. Use o comando sequência para repetir o processo para outros múltiplos do vectoPC:

Sequência[{Translação[Módulo,i u],Translação[Reflexão[Módulo,Reta[B,C]],i u]}, i,-5,5,1]

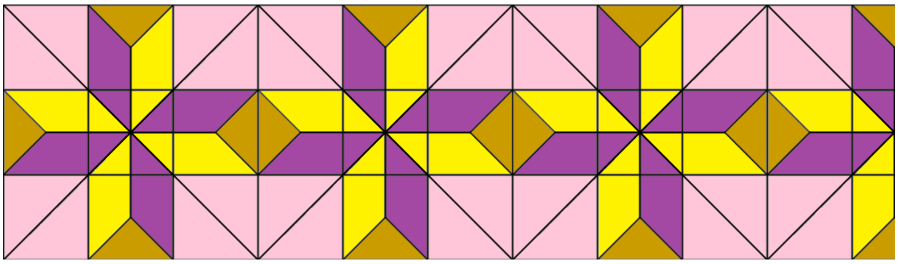


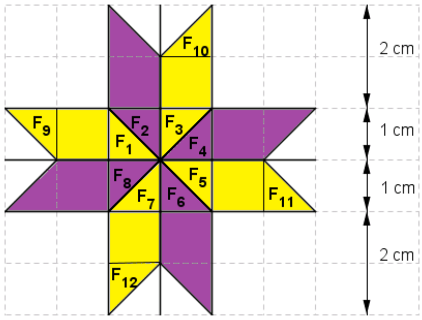
7. Esconda a imagem Módulo e a lista Motivo e use a ferramenta **Zoom**  para ver toda a parte do friso construída.



Construção do Friso 'Pano de Terra'

Problema: A professora Clarice frequenta o curso de Complemento de Licenciatura de Matemática e gosta de Geometria. Como o marido dela é tecelão e faz "Panos de Terra", ela também começou a tecer, aplicando as transformações geométricas isométricas que estudou. No dia de Abertura do ano Letivo, expôs um dos seus trabalhos realizado na disciplina de Geometria.





Abstraindo-se das corres, siga as seguintes orientações:

1.1. Com o auxílio do GeoGebra, reproduz o friso apresentado.

1.2. Identifica a isometria que aplica a rosácea amarela na rosácea lilás.

1.3. Identifica a isometria que aplica um dos paralelogramos lilás no seguinte da mesma cor, na mesma rosácea.

1.4. Indica dois triângulos congruentes. Justifica a sua resposta.

1.5. Indica um par de triângulos em que um possa ser obtido a partir do outro, através de uma:

1.5.1. Translação

1.5.2. Reflexão

1.5.3. Rotação

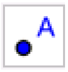
Ficha de Trabalho Nº 5

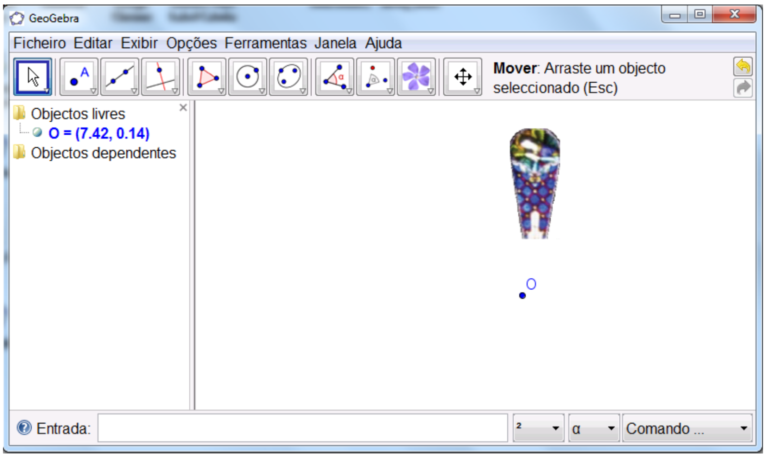
Rosáceas[2]

Objetivos: Construir rosáceas utilizando ícones da barra de ferramentas e a linha de comandos.

Igreja de Santa Luzia

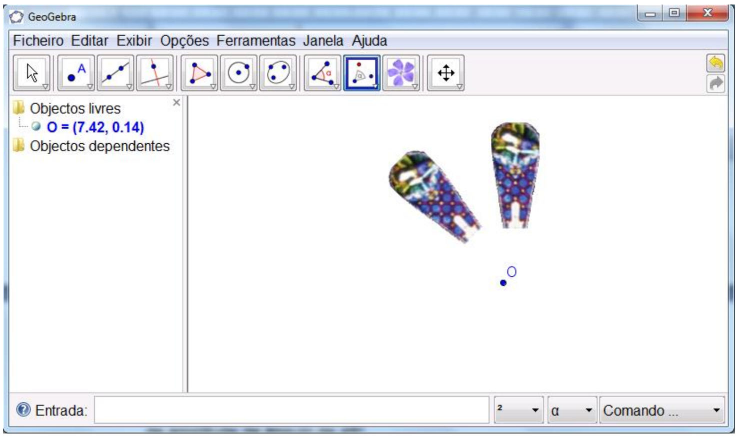
1. Insira, na zona gráfica do GeoGebra, uma imagem - pétala.png -, que se encontra no ambiente de trabalho do computador e que foi retirada da Igreja de Santa Luzia.

2. Defina um centro de rotação utilizando a ferramenta "Novo Ponto"  e designe-o por O.



3. Determine a imagem da figura pela rotação em torno do ponto A e medida de amplitude de ângulo de 45º.

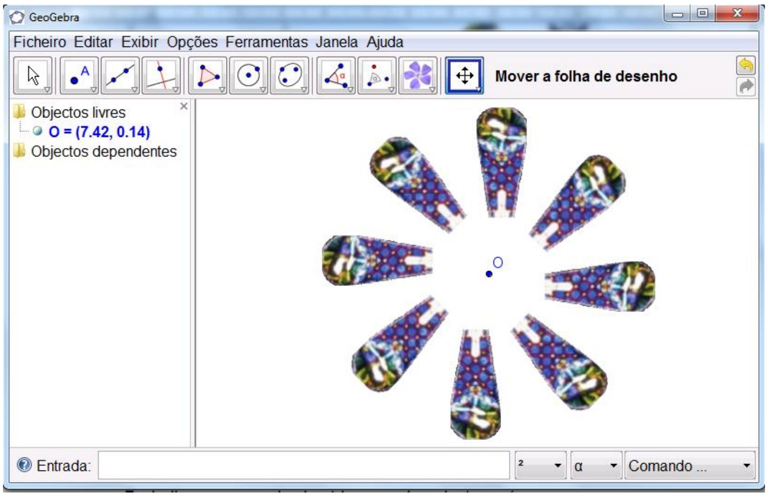
[2]Fonte: Trocado, A; Ribeiro, A, & Santos, J. (2009). Curso 3 – Como usar o GeoGebra para ensinar e aprender matemática - Profmat 2009 - APM. Instituto GeoGebra, Portugal.



4. Clicando no botão direito do rato sobre a imagem, altere o nome, nas propriedades básicas, para Pétala.
5. Utilizando a linha de comando, determine a imagem da figura pela rotação em torno do ponto **O** e medida de amplitude de ângulo de 90º.

Rotação[Pétala, 90º, O]

6. Complete a Rosácea.



7. Indique o grupo de simetria e a ordem desta rosácea. Justifique.

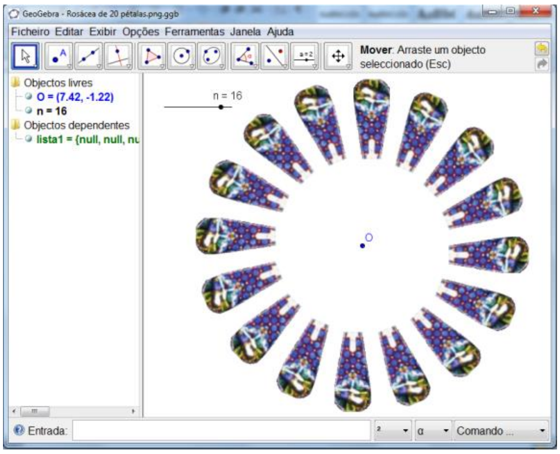
8. Como proceder para se obter um padrão semelhante à coroa exterior da rosácea da Igreja de Santa Luzia?

9. Toda a rosácea, o centro e a coroa exterior, têm o mesmo grupo de simetria?

Rosáceas, Rotações sucessivas[3]

Objetivo: utilizar o comando sequências para modelar rosáceas.

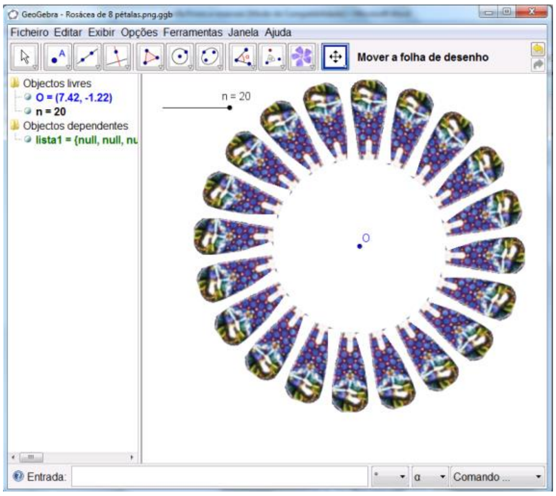
1. A coroa exterior da rosácea tem 16 pétalas, como se ilustra.



1.1. Quantas vezes se teria que rodar o módulo para se obter a rosácea?

1.2. Qual seria a medida de amplitude do ângulo de rotação?

2. Utilizando o comando sequência, descubra como construir a rosácea de 20 pétalas.



---

3 Fonte: Trocado, A; Ribeiro, A, & Santos, J. (2009). Curso 3 – Como usar o GeoGebra para ensinar e aprender matemática - Profmat 2009 - APM. Instituto GeoGebra, Portugal.