

Estudo da monotonia de funções reais de variável real com recurso ao GeoGebra.

Study of the monotony of real functions of real variable with recourse to GeoGebra.

JOSÉ MENDES DA COSTA¹

Resumo

Neste trabalho relata-se o desenvolvimento de uma aula sobre o “Estudo da monotonia de funções reais de variável real com recurso ao GeoGebra” Os alunos realizaram tarefas, e comparou-se os seus desempenhos nas abordagens sem e com o uso do referido Software. Na aula comprovou-se na prática todas as potencialidades do programa discutidas ao longo das sessões de formação, e o grande interesse dos alunos em aulas do tipo.

Palavras-chave: *GeoGebra, Monotonia, Funções.*

Abstract

In this work we report the development of a class on the "Study of the monotony of real functions of real variable using GeoGebra" Students performed tasks, and compared their performances in the approaches without and with the use of said Software. In the classroom, all the program's potentialities discussed throughout the training sessions were proven in practice, and the students' great interest in classes of this kind.

Keywords: *GeoGebra, Monotony, Functions.*

Introdução

Na nova “Proposta de Implementação da Matriz Curricular”, o Ministério da Educação sugere, no Capítulo IV – Estrutura dos Programas, “a opção por metodologias ativas, modernas, apoiadas pelas tecnologias educativas” na execução dos eventuais novos programas disciplinares. Sendo assim a realização desta ação de formação e da criação do IGCV será um passo em frente na modernização e inovação pedagógica e cumprimento dos grandes planos do serviço central.

O GeoGebra é um software com várias valências a nível do ensino e aprendizagem da Matemática e não só. Para além da Geometria Dinâmica, hoje em dia já conta com recursos para estudo da Estatística, da Probabilidade, da Análise Matemática, etc. O GeoGebra possui uma grande plataforma Online onde pode-se interagir com utilizadores do mundo todo. Há também a possibilidade de criação de espaços próprios de interação

¹ Escola Secundária Alfredo da Cruz Silva, e-mail: jose.costa@student.unicv.edu.cv

entre professor e aluno, com vantagens para o processo de ensino e aprendizagem, inovações na avaliação, partilha de materiais etc.

A Matemática do 12º Ano em Cabo Verde trata, grosso modo, de Funções Reais (de variável natural e de variável real) e normalmente termina-se o ano letivo com o estudo da Derivada e suas aplicações em Matemática e não só.

Neste trabalho relata-se o desenvolvimento de uma aula com o uso do GeoGebra, para alunos de uma turma do 12º ano, na Escola Secundária Alfredo da Cruz Silva – Concelho de Santa Cruz, cujo conteúdo é: “**Estudo da monotonia de funções reais de variável real com recurso ao GeoGebra**”.

1. Metodologia

Neste trabalho optou-se uma investigação qualitativa, num estudo de caso, descritivo e interpretativo. Procurou-se descrever o uso do GeoGebra como recurso numa aula e compará-la a metodologia tradicional de ensino de um tópico, numa aula para alunos do 12º ano de escolaridade.

Descrição da sequência de tarefas apresentadas aos alunos

Plano de Aula	
Instituição	ESACS
Disciplina:	Matemática – 12º Ano de Escolaridade
Conteúdo da Aula:	Monotonia de f. r. v. r com recurso ao GeoGebra
Data:	13/05/2017
Duração:	50 Minutos
Objetivos:	<ul style="list-style-type: none">▪ Reconhecer a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da respetiva função.▪ Estudar a monotonia de uma f. r. v. r.▪ Desenvolver capacidade de visualização gráfica e dedução de resultados a partir da sua análise.
Metodologias/Estratégias:	<ul style="list-style-type: none">▪ Inicia-se a aula com apresentação da sua estrutura aos alunos;▪ Segue-se a distribuição das fichas com as tarefas 1 e 2;▪ Os alunos resolvem-nas em grupo de, no máximo, 4 elementos;

<ul style="list-style-type: none"> ▪ Depois o professor faz a apresentação do GeoGebra e da sua funcionalidade; ▪ Os alunos recebem em seguida, uma nova ficha com tarefas (3 e 4) semelhantes para realizarem com recurso ao GeoGebra.
Recursos:
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Fichas com tarefas; ▪ Caneta/lápis; ▪ Projetor; ▪ Computador/Tablet/Smartphone; ▪ Software GeoGebra.

Elaborou-se duas fichas com duas tarefas cada, constantes no quadro abaixo. Para as tarefas escolheu-se funções polinomiais e fracionárias, por serem dois dos tipos de funções mais abordadas ao longo do percurso da aprendizagem da Matemática no ensino secundário.

<p><i>Tarefa 1. <u>Estudo da monotonia da função com recurso à tabela de sinal.</u></i></p> <p>Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2$.</p> <p>Sabendo que a derivada de f é definida por $f'(x) = 3x^2 - 6x$, estude a monotonia da função.</p> <p><i>Tarefa 2. <u>Estudo da monotonia da função com recurso à tabela de sinal.</u></i></p> <p>Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.</p> <p>Sabendo que a derivada de f é definida por $f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$, estude a monotonia da função.</p> <p><i>Tarefa 3. <u>Estudo da monotonia da função com recurso ao GeoGebra.</u></i></p> <p>Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2x^3 - 6x^2$.</p> <p>Obtenha o gráfico da função derivada de f e estude a monotonia da função.</p> <p><i>Tarefa 4. <u>Estudo da monotonia da função com recurso ao GeoGebra.</u></i></p> <p>Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.</p> <p>Obtenha o gráfico da função derivada de f e estude a monotonia da função.</p>

Descrição da implementação da sequência de tarefas

Seguindo o roteiro de aula planeado, esta dividia-se em três etapas: (1ª etapa) a resolução das tarefas 1 e 2 (Estudo da monotonia de funções com recurso à tabela de sinal); (2ª etapa) apresentação do programa GeoGebra; (3ª etapa) resolução das tarefas 3 e 4 (Estudo da monotonia de funções com recurso ao GeoGebra).

Inicialmente foi feita a apresentação da ideia de funcionamento da aula. Em seguida os alunos escolheram os colegas e formaram grupos de três a quatro elementos.

Na primeira etapa, da realização das tarefas 1 e 2, foi apresentado aos alunos, numa folha tipo A4, duas funções algébricas (uma polinomial e outra fracionária) em que pedia-se para fazer o estudo da monotonia das mesmas, usando a técnica de estudar o sinal das respectivas funções derivadas, com recurso à uma *Tabela de sinal* – estratégia usada habitualmente nas aulas. Os alunos não levantaram dúvidas durante a realização destas tarefas, demoraram cerca de 20 minutos para o finalizarem.

Após a recolha dos trabalhos, seguiu para a segunda etapa da aula que consistia na apresentação do software GeoGebra aos alunos. Cada grupo dispunha de um dispositivo (computador, Tablet ou Smartphone) com o GeoGebra instalado. O professor enumerou as funções e a importância do software, apresentou as diferentes vistas, alguns botões da Vista Algébrica e da Janela CAS. Sugeriu-se um pequeno treino com o software. Os alunos demonstraram gosto, embora tiveram algumas dificuldades de manuseio, principalmente os grupos que trabalhavam com *Tablets* ou *Smartphones*. Gastou-se cerca de 30 minutos nesta etapa.

Na terceira etapa da aula, cada grupo, com GeoGebra aberto, recebeu as tarefas 3 e 4, consistindo no estudo da monotonia de funções de naturezas semelhantes à aquelas propostas nas tarefas 1 e 2, ou seja, uma função polinomial na Tarefa 3 e uma função racional na Tarefa 4. A diferença aqui, foi que os alunos podiam esboçar o gráfico da derivada das funções e fazer o estudo da monotonia da função através da análise do sinal deste. Ao fim de 10 minutos entregaram as folhas A4 com as tarefas 3 e 4 realizadas.

2. Apresentação e discussão dos resultados obtidos

De forma geral os alunos não mostraram dificuldades na realização das tarefas. Realizaram-nas todas e atingiram os objetivos preconizados. Demonstraram claramente a preferência pela abordagem com o uso do GeoGebra. Ademais, nas tarefas 3 e 4, eles demoraram menos tempo a cumprir o solicitado.

Tarefa 1. Estudo da monotonia da função com recurso à tabela de sinal.
 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2$.
 Sabendo que a derivada de f é definida por $f'(x) = 3x^2 - 6x$, estude a monotonia da função.

$D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 $f'(x) = 0$
 $(\Rightarrow) 3x^2 - 6x = 0$
 $(\Rightarrow) 3x(x-2) = 0$
 $(\Rightarrow) 3x = 0 \vee x = 2$
 $(\Rightarrow) x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	\nearrow	$\#0$ Max	\searrow Min	\nearrow

• f é crescente de $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$
 • f é decrescente de $]0; 2[$
 • ~~Maximo relativo em 0~~ • Maximo relativo $f(0)$
 • ~~Minimo relativo em 2~~ • Minimo relativo $f(2)$

Figura 1: Tarefa 1 – Estudo da monotonia de uma função polinomial usando a tabela de sinal

Tarefa 2. Estudo da monotonia da função com recurso à tabela de sinal.
 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.
 Sabendo que a derivada de f é definida por $f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$, estude a monotonia da função.

$f(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0$
 $(\Rightarrow) x^2+4x = 0$
 $(\Rightarrow) x(x+4) = 0$
 $(\Rightarrow) x = 0 \vee x = -4$

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
x^2+4x	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	$\#0$ Max	\searrow Min	$\#0$ Max	\nearrow

• f é crescente $]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$
 • f é decrescente $]-4; -2[\cup]-2; 0[$
 • Maximo relativo em -2
 • Minimo relativo em 0

Figura 2: Tarefa 2 – Estudo da monotonia de uma função fracionária usando a tabela de sinal

O trabalho colaborativo permitiu que os alunos partilhassem ideias e assim evitar muitos erros.

Tendo esta aula o objetivo de comparar duas estratégias de aprendizagem, fez-se a confrontação das mesmas. Os alunos mostraram boa capacidade de leitura de gráficos, gosto e facilidade em manipular ferramentas de TIC.

Quanto aos trabalhos realizados, nota-se que, quando os alunos fazem a visualização gráfica no GeoGebra, eles dispensam algum trabalho de argumentação/justificação das ideias. Não mostram necessidade de determinar o domínio da função, por exemplo. Desta forma, a conclusão sobre a monotonia apresentada é mais sucinta, com o uso do GeoGebra (Observa a imagem da Tarefa 1 em comparação com a imagem da Tarefa 3).

Tarefa 3. Estudo da monotonia da função com recurso ao GeoGebra.
 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2x^3 - 6x^2$.
 Obtenha o gráfico da função derivada de f e estude a monotonia da função.

• $f(x)$ é crescente $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$
 • $f(x)$ é decrescente $]0; 2[$

Figura 3: Tarefa 3 – Estudo da monotonia de uma função polinomial com recurso ao GeoGebra

Tarefa 4. Estudo da monotonia da função com recurso ao GeoGebra.
 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
 Obtenha o gráfico da função derivada de f e estude a monotonia da função.

$f(x)$ é crescente $]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$
 $f(x)$ é decrescente $]0; 4[\setminus \{2\}$

Figura 4: Tarefa 4 – Estudo da monotonia de uma função polinomial com recurso ao GeoGebra

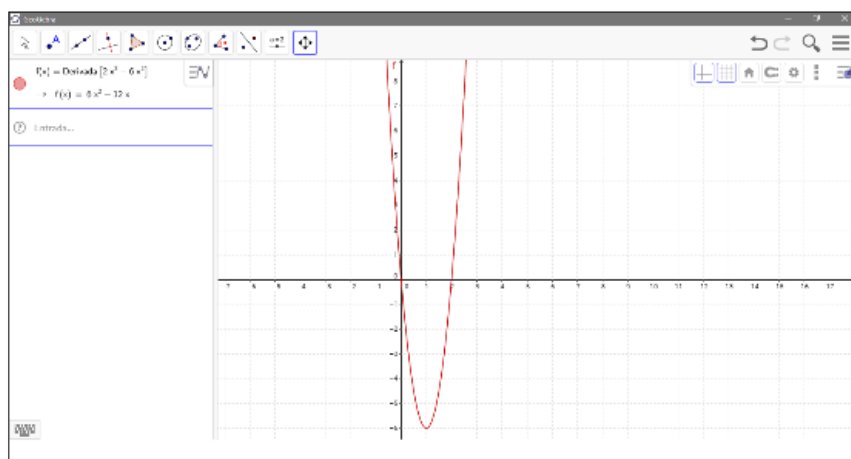


Figura 5: Tarefa 3 - Derivada de uma função no GeoGebra obtida por um aluno

No quadro seguinte apresenta-se os resultados obtidos pelos alunos na realização das quatro tarefas. Os alunos foram identificados como A1 (aluno 1), A2, A3, ..., A11. Cada questão foi avaliada em percentagem (0 a 100 %).

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	Média
Tarefa 1	70	90	80	100	80	100	90	80	60	50	60	78,19
Tarefa 2	70	90	100	100	100	100	90	40	70	60	90	82,73
Tarefa 3	100	100	100	100	100	100	100	100	90	80	100	97,27
Tarefa 4	90	100	100	100	80	100	100	100	80	80	90	92,73

Tabela 1: Resultado obtido pelos alunos (classificação de 0 a 100 %)

Nota-se uma clara melhoria dos resultados quando o aluno passa a usar o GeoGebra como recurso. Da Tarefa 1 para a Tarefa 3 houve um aumento médio de 19.08 % e da Tarefa 2 para a Tarefa 4 houve uma melhoria, na média, de 10%.

A nível individual, comparou-se os resultados das tarefas 1 e 2 (em média) com as médias em entre as tarefas 3 e 4 em que se usou o GeoGebra. Ao usar o software, o aluno mantém ou melhora os resultados. Destaca-se o aluno A8 com uma melhoria de 40%, quando se passou para a abordagem com o GeoGebra (Ver gráfico seguinte).

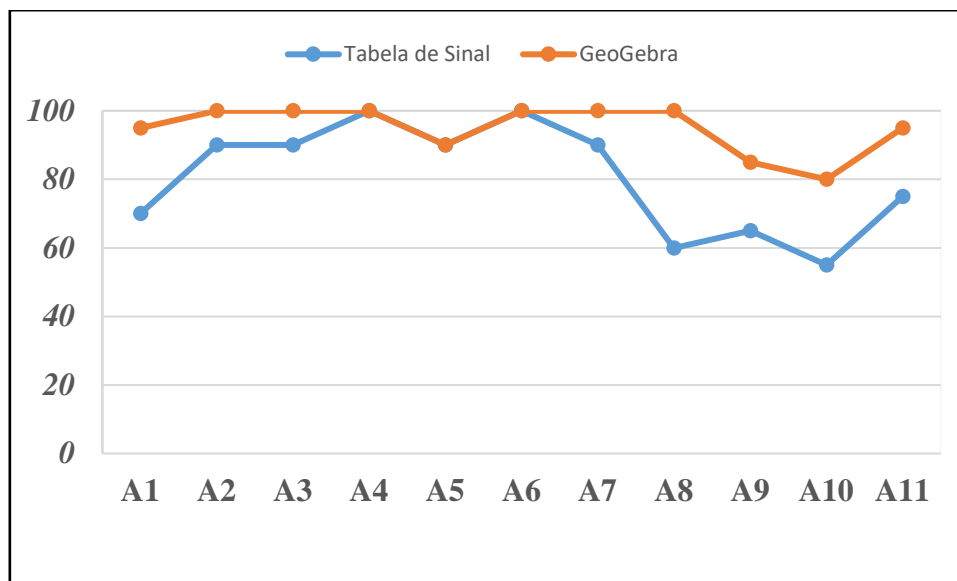


Figura 6: - Resultado comparado, por alunos (Classificação de 0 a 100%)

Conclusão

O GeoGebra é, indubitavelmente, uma mais-valia para os professores de Matemática e não só. Desde já pelos vários recursos que apresenta para o ensino de vários temas dentro da disciplina. As ferramentas Online: GeoGebraTube e GeoGebra Grupos, constituem um importante portefólio de pesquisa de informações mas também de depósito e partilha das mesmas, entre professores e professor/aluno.

Os alunos demonstram grande interesse por ferramentas de aprendizagem que usam TIC's como recurso. Têm maior atenção nestas aulas e revelam grande facilidade em manipular e alcançar conceitos teóricos nestas condições.

Dada a importância do software, conclui-se que este deve ser usado desde os anos iniciais do estudo da Matemática, a nível secundário. Nesse sentido a frequência dessa ação de formação foi uma excelente oportunidade pessoal, para escola e para os alunos, uma vez que se pretende, para o próximo ano letivo, ministrar seções formação dentro da escola e tudo fazer para aumentar o número de utilizadores do programa.

Referências

- FELIPE, L. et.al (2004). *Programa da Disciplina de Matemática 3º Ciclo 11º e 12º anos* Versão Digital. Ministério da Educação, Direção Geral do Ensino Básico e Secundário.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2017). *Proposta de Implementação da Matriz Curricular*.
- SILVEIRA, A. & CABRITA, I (2013) *O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas*.