Estudo da Trigonometria no 11º Ano Com Recurso ao Software GeoGebra

Study of trigonometry to the 11th grade with resource to software GeoGebra

CRISOLITA SOUSA DE BRITO[1]

DIRCE HENRIQUES DA LUZ[2]

JOÃO EMANUEL ALMEIDA DUARTE[3]

Resumo

O tema Trigonometria tem apresentado várias dificuldades a alunos do 11º ano, como temos constatado da nossa experiência docente. Para uma nova abordagem do tema e, perspetivando o sucesso do aluno, apresentamos este pequeno manual de apoio a professores, com recurso ao software GeoGebra.
A componente prática foi aplicada a um grupo de alunos do 11º ano e serviu para fornecer-lhes competências e habilidades para o estudo de funções trigonométricas, o que veio a confirmar uma maior interação no processo ensino – aprendizagem.
Palavras-chave: *GeoGebra, Trigonometria, Funções*

Abstract

As we observed, from our experience as teachers, the topic Trigonometry has presented many difficulties to the 11th grade students. For a new approach to the theme and, foresight the students' success, we present this small manual to suppot teachers, using the GeoGebra Software.

The pratical component was applied to a group of 11th grade students which aim was to provide them competence and abilities to study trigonometric functions. With this we could confirm a greater interaction in the teaching- learning process.
Key words: *GeoGebra, Trigonometry, , Functions*

Introdução

Este trabalho surge no âmbito da formação de formadores de GeoGebra em Cabo Verde, visando a criação do Instituto GeoGebra em Cabo Verde.

O principal objetivo é apresentar uma proposta aos professores para o estudo da trigonometria no 11º ano de escolaridade com auxílio do *software* GeoGebra, fazendo uso do material informático disponível nas salas de aula, e nas salas de informática

[1] Escola Secundário Dr José Augusto Pinto- krisasousa@yahoo.com
[2] Escola Secundária Jorge Barbosa - dirce.luz@esjb.gov.cv
[3] Mestre em Educação, Variante Administração Escolar - joao.a.duarte@me.gov.cv

disponíveis nas escolas, pois, como docentes temos observado que, utilizando os métodos convencionais, sem uso de ferramentas tecnológicas, alguns alunos têm revelado muitas dificuldades na aprendizagem do conteúdo, nomeadamente em relacionar as razões trigonométricas de ângulos complementares, simétricos, na redução de ângulos ao 1º quadrante, na construção de gráficos e na interpretação dos efeitos de parâmetros nos diferentes gráficos.

Pretendemos mostrar que a sua implementação provoca discussões na sala de aula, e os alunos podem, assim, conseguir melhorar significativamente o seu rendimento escolar.

Para implementação da componente prática do trabalho, foi realizada uma sessão com alunos do 11º ano de escolaridade do ensino secundário, das Escolas Secundárias Dr José Augusto Pinto, Jorge Barbosa e Liceu Ludgero Lima, onde os mesmos analisaram situações de transformações dos gráficos da função seno e responderam a algumas questões.

Definição das razões trigonométricas no círculo trigonométrico

Para todo o ângulo α definido num círculo de raio r e de centro O na origem do referencial, pode-se associar o ponto P(x,y).

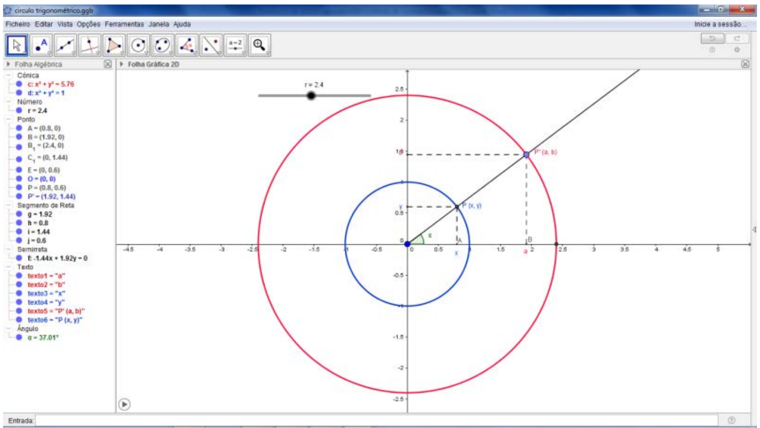


Fig. 1 Círculo Trigonométrico

Observando a figura1, podemos concluir que os triângulos [OPA] e [OP´B] são semelhantes. Tendo em conta os conhecimentos adquiridos, no 10º ano, sobre as razões trigonométricas, podemos concluir que:

$$sin\alpha = \frac{ordenada\ do\ ponto\ associado}{raio\ do\ circulo} = \frac{b}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$cos\alpha = \frac{abcissa\ do\ ponto\ associado}{raio\ do\ circulo} = \frac{a}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$tan\alpha = \frac{ordenada\ do\ ponto\ associado}{abcissa\ do\ ponto\ associado} = \frac{b}{a} = \frac{y}{x}$$

O valor das razões trigonométricas não depende da medida do raio do círculo. Para simplificar o nosso estudo, iremos utilizar sempre o círculo de centro na origem do referencial de raio unitário, a que chamaremos círculo trigonométrico.

Como o seno de um ângulo é igual a ordenado do ponto associado e o cosseno é a abcissa, o eixo dos yy´ e o dos xx´ são identificados como sendo eixo dos senos e eixo dos cossenos, respetivamente. A linha das tangentes será uma reta tangente ao círculo no ponto (1,0).

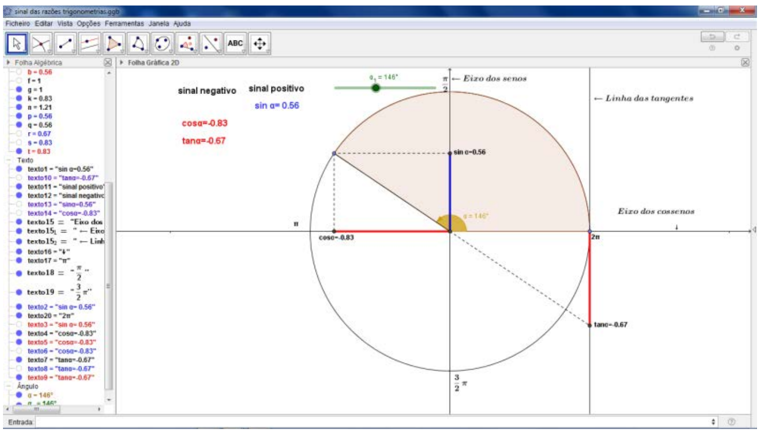
$$sin\alpha = y \qquad cos\alpha = x \qquad tan\alpha = \frac{y}{x}.$$

De acordo com a definição das razões trigonométricas, podemos concluir que: $-1 \leq sin\alpha \leq 1$; $\quad -1 \leq cos\alpha \leq 1$; $\qquad tan\alpha \in \mathbb{R}, \qquad \forall\alpha$

Sinal e variação das razões trigonométricas

O sinal das razões trigonométricas depende exclusivamente do sinal das coordenadas do ponto associado do ângulo.

Fig. 2 Sinal das razões trigonométricas: ***Tabela de variação de sentido e sinal das razões trigonométricas***



∝	0	1ºQ	$\frac{\pi}{2}$	2ºQ	π	3ºQ	$\frac{3}{2}\pi$	4ºQ	2π
Sin	0	$\nearrow +$	1	$\searrow +$	0	$\searrow -$	-1	$\nearrow -$	0
Cos	1	$\searrow +$	0	$\searrow -$	-1	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	1
tg	0	$\nearrow +$	ND	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	ND	$\nearrow -$	0

Fig. 3 Variação e sinal das razões trigonométricas

Relações entre as razões trigonométricas de ângulos simétricos

Independentemente do quadrante a que pertence o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$, mantem-se as seguintes relações:

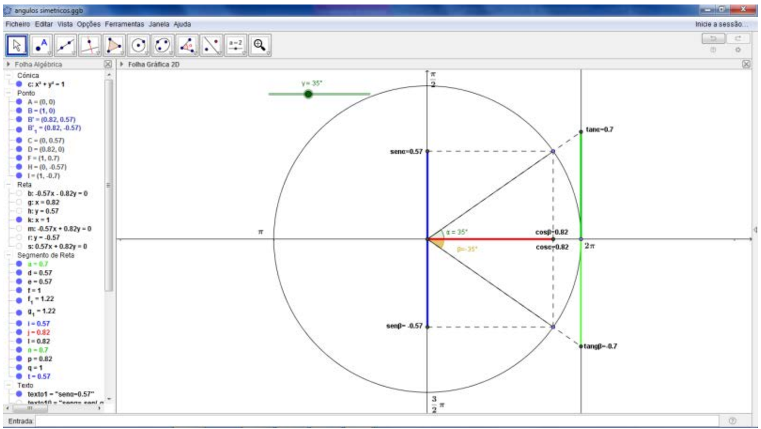


Fig. 4 Ângulos simétricos

$\boldsymbol{sin(-\alpha) = -sin\ \alpha;}$ $\quad$ $\boldsymbol{cos(-\alpha) = cos\ \alpha;}$ $\quad$ $\boldsymbol{tan(-\alpha) = -tan\ \alpha}$

que podem ser observadas no circulo trigonométrico.

Relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares

Considerando o ângulo $\boldsymbol{\alpha} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e o seu complementar $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \alpha}$, pode-se concluir, pela variação de $\boldsymbol{\alpha}$, que:

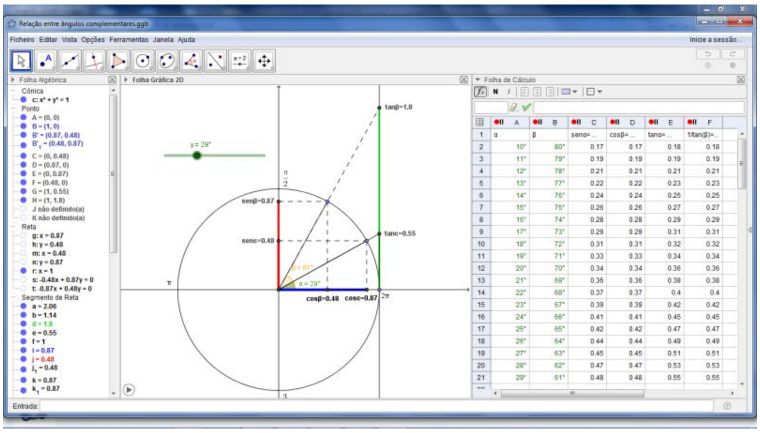


Fig. 5 Ângulos complementares

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Redução de um ângulo ao 1º quadrante

É possível estabelecer relações entre as razões trigonométricas de um ângulo qualquer com as razões trigonométricas de um ângulo do primeiro quadrante, como iremos demostrar através das situações abaixo indicadas.

i) Do 2º quadrante ao 1º quadrante

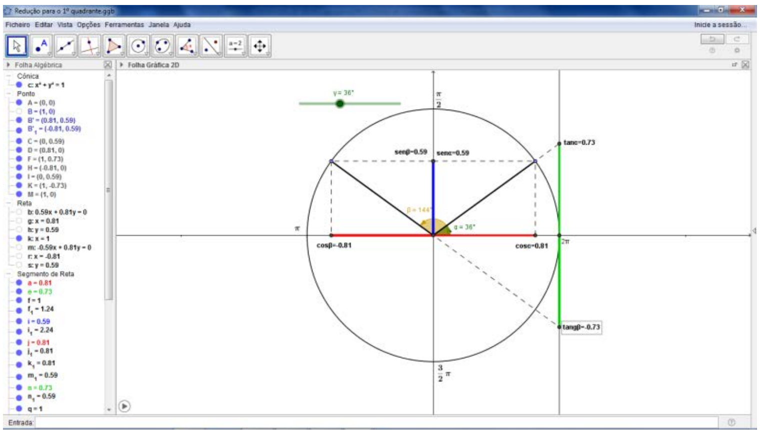


Fig. 6 Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante

$$\sin\beta = \sin(\pi - \beta) \qquad \cos\beta = -\cos(\pi - \beta) \qquad \tan\beta = -\tan(\pi - \beta)$$

ii) Do 3º quadrante ao 1º quadrante

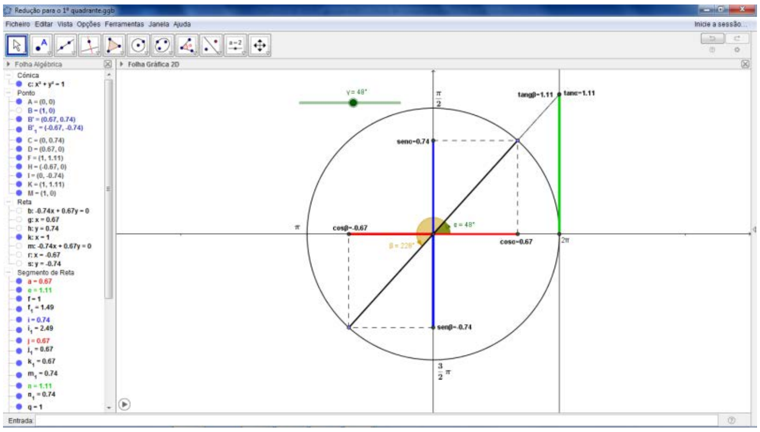


Fig. 7 Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante

$$sin\beta = -sin\ (\beta - \pi) \qquad cos\beta = -cos\ (\beta - \pi) \qquad tan\beta = tan\ (\beta - \pi)$$

iii) Do 4º quadrante ao 1º quadrante

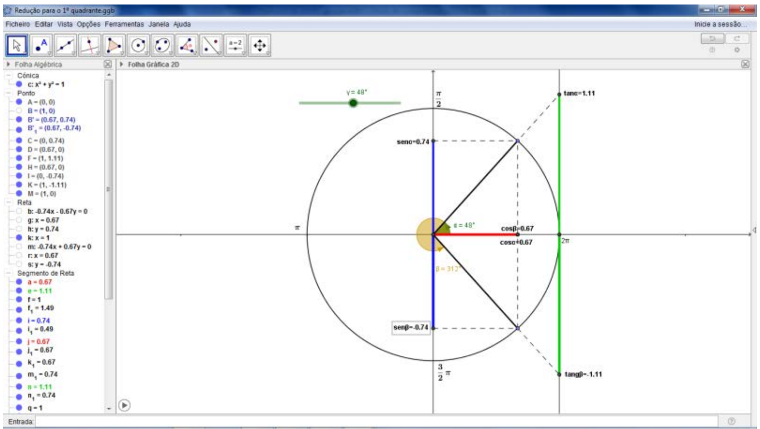


Fig. 8 Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante

$$sin\beta = -sin\ (2\pi - \beta) \qquad cos\beta = cos\ (2\pi - \beta) \qquad tan\beta = -tan\ (2\pi - \beta)$$

Equações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é uma equação em que a variável está associada a uma expressão trigonométrica.

Equações do tipo $sinx = a$

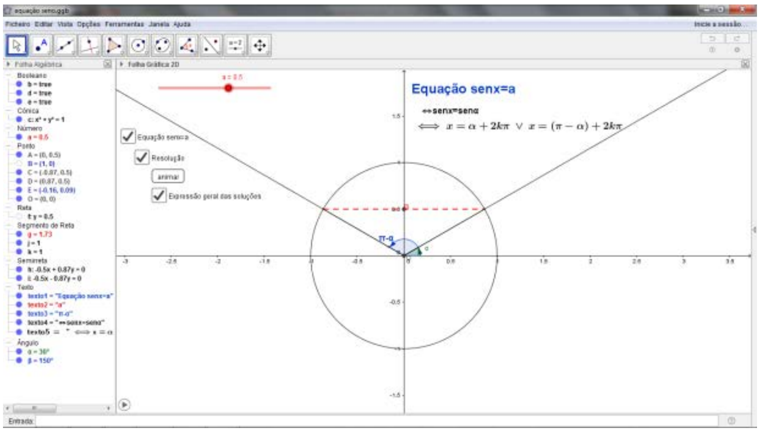


Fig. 9 Equação sin x = a

Equações do tipo $cos x = a$

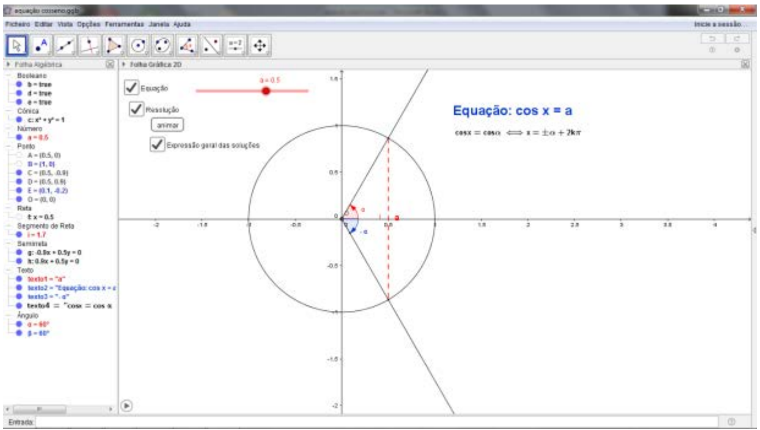


Fig. 10 Equação cosx=a

Equações do tipo $tan x = a$

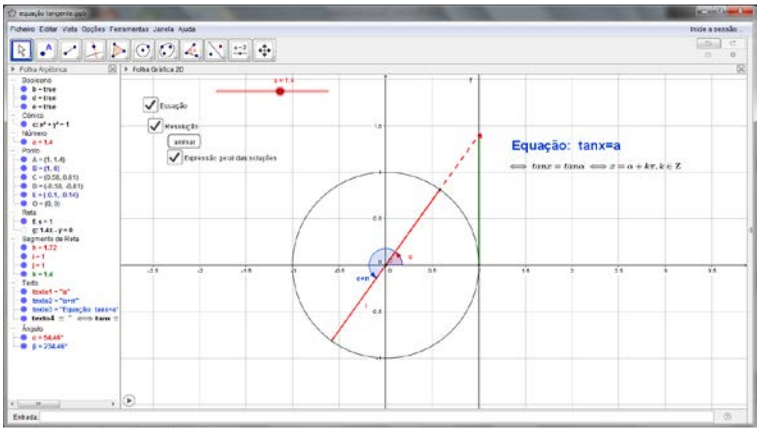


Fig. 11 Equação tan x = a

Funções trigonométricas.

Seja o seletor x, que exprime a amplitude de um ângulo, a construção gráfica é visível a partir da deslocação de um ponto genérico do gráfico, de coordenadas (x,f(x)), em função da variação de x.

Função seno

Seja P definido pelas coordenadas (x, sinx), o seu movimento define o gráfico da função *f(x)=sinx*.

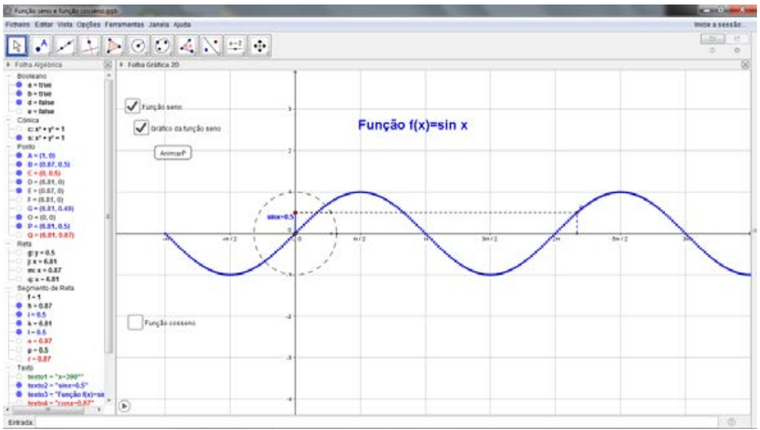


Fig. 12 Gráfico da função f(x)=sinx

A partir da análise do gráfico, é possível identificar as seguintes propriedades:

i) **Domínio**: $D_f = \mathbb{R}$

ii) **Contradomínio:** $D'_f = [-1,1]$

iii) **Zero**: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z$

iv) **Paridade**: A função seno é ímpar, $sin(-x) = -sinx \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.

v) **Período:** A função é periódica de período 2π, $\sin(x + 2\pi) = sinx, \forall x \in \mathbb{R}$.

Função cosseno

De modo análogo, o gráfico da função f(x)=cosx obtém-se do rasto do ponto Q (x, cosx)

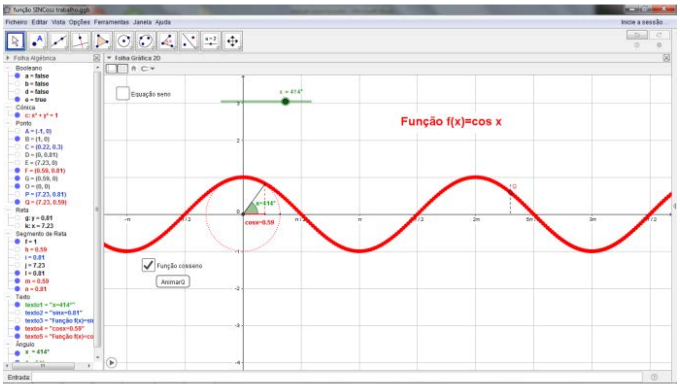


Fig. 12 Gráfico da função f(x)=cosx.

A partir da análise do gráfico, é possível identificar as seguintes propriedades:

i) **Domínio**: $D_f = \mathbb{R}$

ii) **Contradomínio:** $D'_f = [-1,1]$

iii) **Zeros**: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

iv) **Paridade**: A função é par, $cos(-x) = cosx \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

v) **Período:** A função é periódica de período 2π,$\cos(x + 2\pi) = cosx, x \in \mathbb{R}$

Função tangente

O rasto da deslocação do ponto T (x, tanx) define o gráfico da função f(x)=tanx.

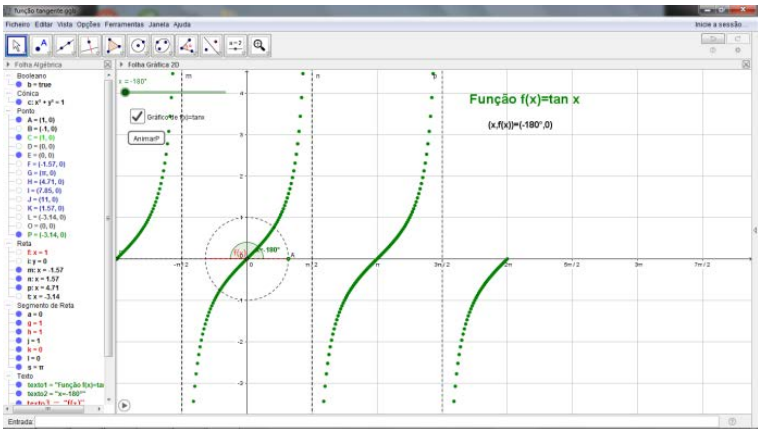


Fig. 14 Gráfico da função f(x)=tanx.

Da análise do gráfico, é possível identificar as seguintes propriedades:

i) **Domínio**: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

ii) **Contradomínio:** $D'_f = \mathbb{R}$

iii) **Zeros**: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

iv) **Paridade**: A função é ímpar. $tan(-x) = -tanx, \forall\, x \in D_f$.

v) **Período:** A função é periódica de período π $\tan(x + \pi) = tanx, x \in D_f$.

Transformações dos gráficos das funções trigonométricas – caso da função seno

A utilização das funções trigonométricas na modelação de situações reais é uma das importantes aplicações do estudo da trigonometria.

Para resolver este tipo de problemas é importante conhecer os efeitos nos gráficos das funções, provocadas pela introdução de parâmetros nas funções $y = sinx$ e $y = cosx$.

Gráfico da função $y = a\ sinx$.

Partindo do gráfico da função $y = sinx$, podemos obter os gráficos de $y = 3sinx$ e $y = -\frac{1}{2}sinx$.

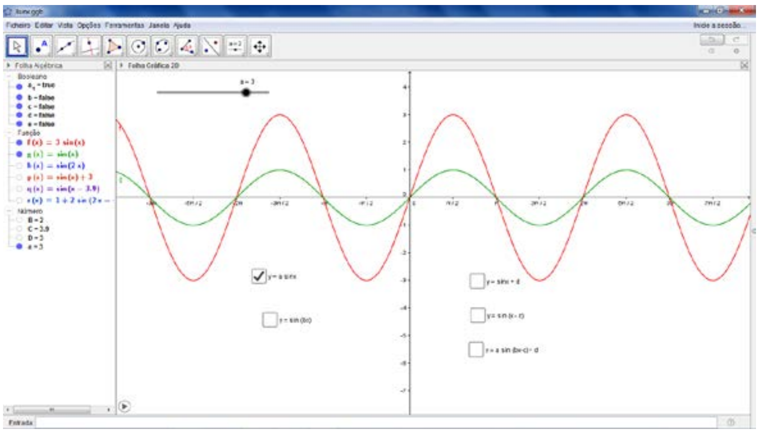


Fig. 15 Gráfico da função y =3sinx

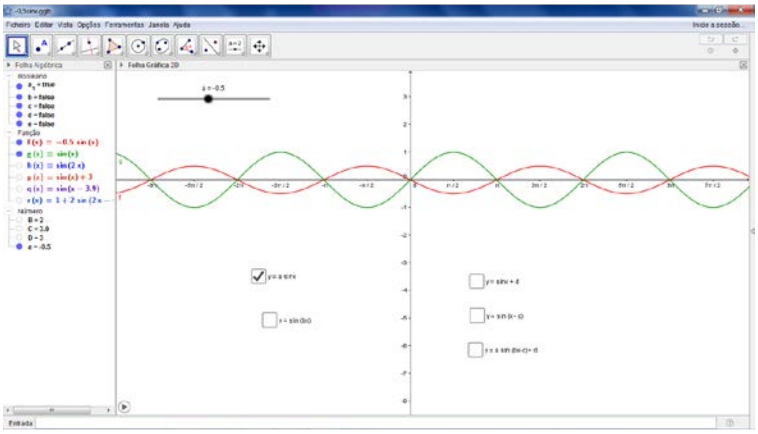


Fig. 16 Gráfico da função y = -1/2 sinx

O gráfico da função de $y = 3sinx$ é obtido fazendo uma extensão na vertical segundo o fator 3; e o de $y = -\frac{1}{2}sinx$ é obtido fazendo uma contração na vertical segundo o fator $\frac{1}{2}$ e em seguida uma reflexão segundo o eixo das abcissas.

De um modo geral:

- |a| = amplitude; a < 0 produz uma reflexão relativamente ao eixo das abcissas.
- |a| > 1 produz uma extensão na vertical;
- |a| < 1 produz uma contracção na vertical

Gráfico da função $y = \sin(bx)$

Como se obtém o gráfico das funções $y = \sin(2x)$ e $y = sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ a partir do gráfico da função $y = sinx$?

O primeiro é obtido efetuando uma contração na horizontal segundo o fator 2 e o segundo por uma extensão segundo o fator $\frac{1}{2}$. Como se pode ver, o período da primeira função é π enquanto a segunda tem por período 4π.

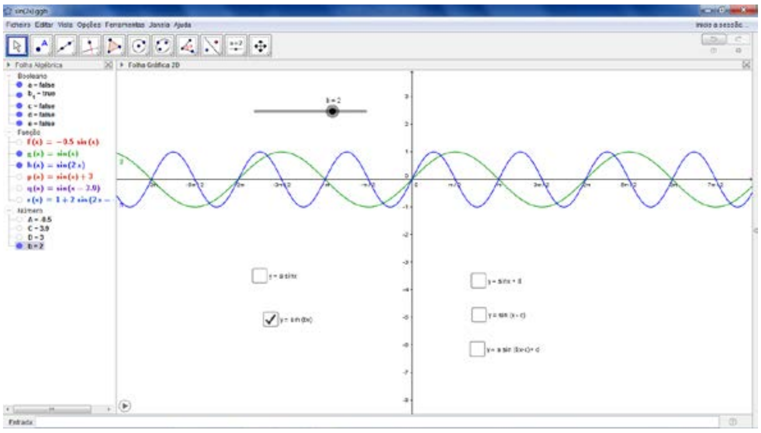


Fig. 17 Gráfico da função y =sin(2x)

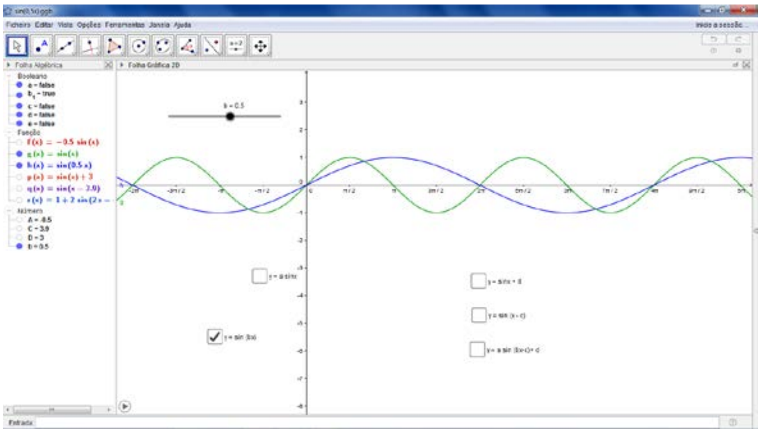


Fig. 18 Gráfico da função y = sin(1/2 x)

Como se altera o período, também se altera a expressão geral dos zeros.

De um modo geral:

- Período $P = \frac{2\pi}{|b|}$; Zeros $x = \frac{k\pi}{|b|}$ $, k \in \mathbb{Z}$
- |b| > 1 produz uma contracção na horizontal;
- |b| < 1 produz uma extensão na horizontal

Gráfico da função $y = sinx + d$

O gráfico da função $y = \sin x + 3$, é obtido partindo de $y = \sin x$ e fazendo uma translação na vertical segundo o vetor $\vec{v} = (0,3)$.

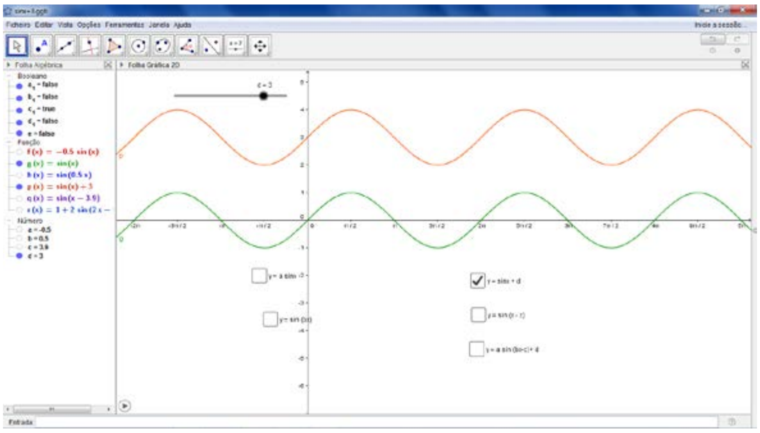


Fig. 19 Gráfico da função y = sinx+3

De um modo geral:

- |d| representa a deslocação na vertical;
- d > 0 produz uma deslocação para cima;
- d < 0 produz uma deslocação para baixo.

Gráfico de $y = \sin(x - c)$

Para a função $y = sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, obtemos o seu gráfico fazendo uma translação de $y = sinx$ segundo o vetor $\vec{v} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

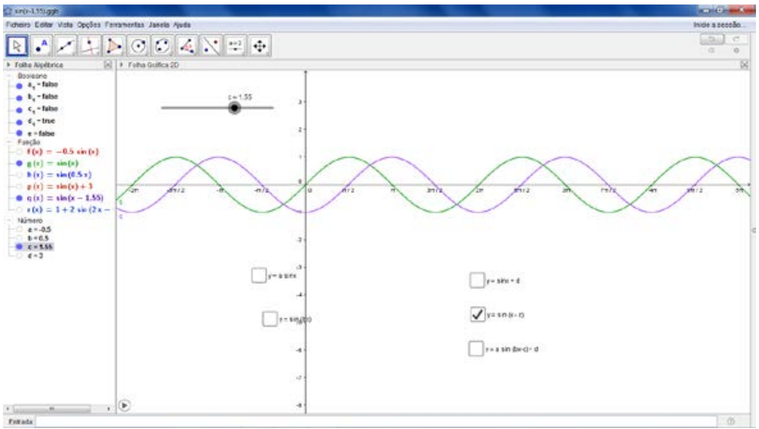


Fig. 20 Gráfico da função y= sin(x-π/2)

De um modo geral:

- |c| é a deslocação na horizontal.
- c > 0 produz uma deslocação para a direita;

- c < 0 produz uma deslocação para a direita.

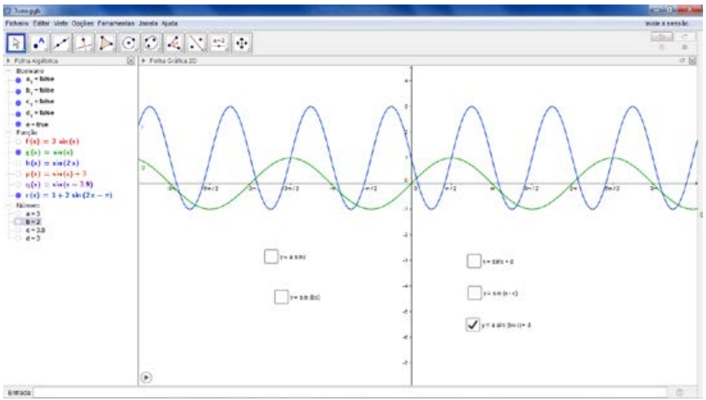


Fig. 21 Gráfico da função y = 1-2sin (2x-π)

Análise da componente prática

As tarefas da componente prática foram realizadas num laboratório informático do Liceu Ludgero Lima, das 10h:30 as 12h:30, com a presença dos autores do trabalho.

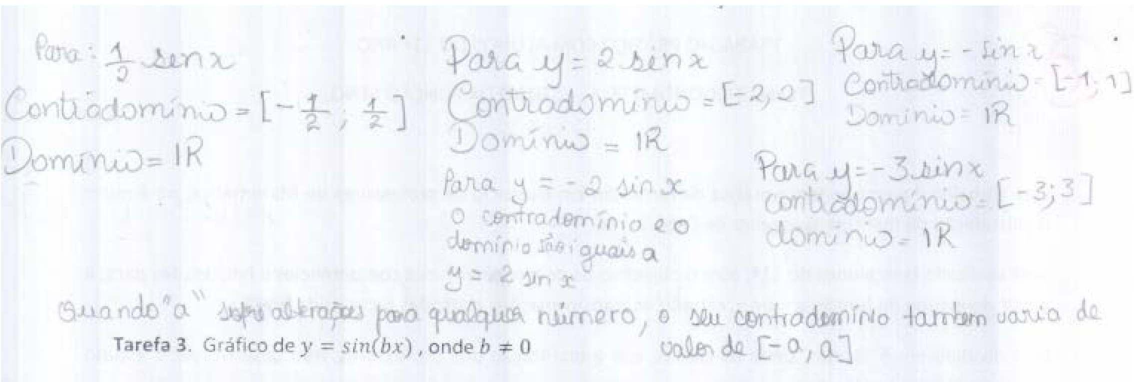
Da atividade, esperava-se que o aluno concluísse quanto ao efeito de cada parâmetro nos gráficos das funções ***f(x)=a.sinx***, ***g(x)=sin(bx)***, ***h(x)=sinx+c*** e ***i(x)=sin(x+d)*** comparativamente com o da função y=sen x, recorrendo ao software GeoGebra**.**

A análise das respostas mostra-nos que os alunos não tiveram dificuldade em identificar as propriedades (o contradomínio, os zeros e o período) das funções consideradas.

Embora a maioria não tenha apresentado uma conclusão genérica, as respostas apresentadas mostram que perceberam o efeito dos parâmetros na função:

1. **Parâmetro a**:

   Resposta A1



Para: $\frac{1}{2}$ sen x
Contradomínio = $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$
Domínio = IR

Para y = 2 sen x
Contradomínio = [-2, 2]
Domínio = IR

Para y = -2 sin x
o contradomínio e o domínio são iguais a y = 2 sin x

Para y = - sin x
Contradomínio = [-1; 1]
Domínio = IR

Para y = -3 sin x
contradomínio = [-3;3]
domínio = IR

Quando "a" sofre alterações para qualquer número, o seu contradomínio também varia de valor de [-a, a]

Tarefa 3. Gráfico de $y = sin(bx)$, onde $b \neq 0$

   Resposta A2

	$f(x) = \text{sen}(x)$	$f(x) = a \text{ sen } x$	
Zeros	$k\pi$	$k\pi$	→ o mesmo
D'	$[-1 ; +1]$	$[-a ; a]$	
P	2π	2π	→ o mesmo

2. **Parâmetro b** :

   Resposta B1

Indica a expressão de: Período P e Zeros

$y = \sin(2x)$ $P = \pi$ | $y = \sin(4x)$ $P = \frac{\pi}{2}$ $O_z = \frac{k\pi}{4}$ | $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ $P = 4\pi$ $O_z = k2\pi$ | $y = \sin(-2x)$ $P = \pi$ $O_z = \frac{k\pi}{2}$

Tarefa 4 Gráfico de $y = sinx + c$

   Resposta B2

→ juntamente com o b varia o comprimento de onda

→ D' permanece

→ zeros e período variam / aumentando b aumenta o período e a distância entre os zeros

Indica a expressão de: Período P $\frac{2\pi}{|b|}$ e Zeros $\frac{\pi}{b} K$

3. **Parâmetro c**:

   Resposta C1

$y = \text{sen}x + 1 \rightarrow D =]-\infty ; +\infty[$ $D' = [0 ; 2]$ zeros $- K \frac{3\pi}{2}$; $K \in \mathbb{Z}$

$y = \text{sen}x + \frac{1}{2} \rightarrow D =]-\infty ; +\infty[$ $D' : [-\frac{1}{2} ; +1,5]$.

Houve uma translação vertical em relação a sen x.

$y = \text{sen}x + 2 \rightarrow D =]-\infty ; +\infty[$ $D' = [1 ; 3]$ zeros não há

$y = \text{sen}x + 2 \rightarrow D =]-\infty ; +\infty[$ $D' = [-1 ; -3]$ zeros não há

Resposta C2

Quanto maior for "c", assim o gráfico desloca-se no eixo dos y na vertical, o contradomínio varia $[-1+c, 1+c]$, o período e o domínio mantêm-se iguais e para que haja zeros c tem de $\in [-1, 1]$.

4. **Parâmetro d**.

Resposta D1

O contradomínios ficam iguais. Mas os zeros vão variando.
Em relação à função seno, o seu gráfico desloca-se na horizontal.
Expressão dos zeros: $k\pi + d$

Resposta D2

$D'f\ \text{sen}(x-d) = [-1;1] = D'f\ \text{sen}\,x$
Domínio → mantêm

Conclusão
O gráfico desloca no eixo de x em que o domínio e o contradomínio mantêm-se igual a $\text{sen}\,x$. E os zeros variam de $k\pi + d$ e o deslocamento é $|d|$

Durante a atividade, houve uma discussão constante entre os alunos na busca de soluções para as questões apresentadas.

Fig. 22 Atividade prática

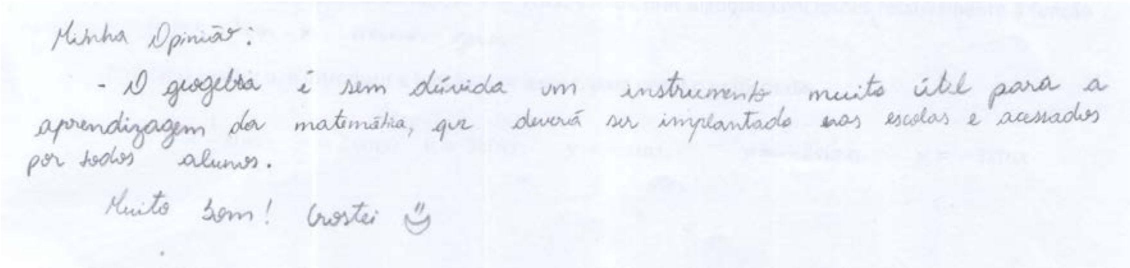
Fig. 23 Atividade prática

Portanto, os objetivos da atividade foram alcançados, ou seja constatamos que é possível ensinar a trigonometria de uma forma interativa e mais eficiente, recorrendo ao *software* GeoGebra, conforme a opinião deixada pelos participantes:

Opinião 1

O software Geogebra é de fácil manuseio e compreensão, permit-nos entender e estabelecer as relações melhores. É um software muito útil para trabalhos.
Permitiu diferentes explorações e de fácil apreendizagem.

Opinião 2

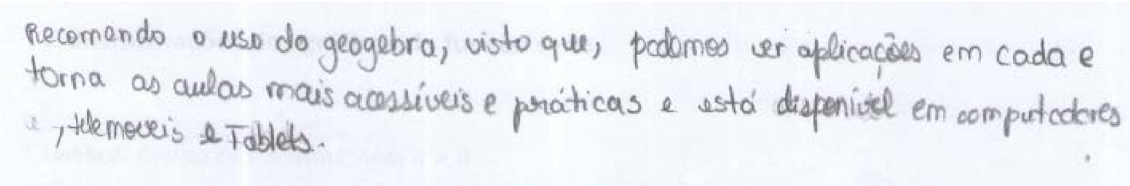


Minha Opinião:

- O geogebra é sem dúvida um instrumento muito útil para a aprendizagem da matemática, que deverá ser implantado nas escolas e acessados por todos alunos.

Muito bom! Gostei ☺

Opinião 3



Recomendo o uso do geogebra, visto que, podemos ver aplicações em cada e torna as aulas mais acessíveis e práticas e está disponível em computadores e, telemóveis e Tablets.

Considerações finais

É comum escutar dos intervenientes do processo ensino- aprendizagem que é necessário repensar as velhas práticas do ensino de modo a responder as necessidades educativas presentes.

Ao longo do trabalho apresentamos uma proposta para uma nova abordagem do capítulo Trigonometria no 11º ano de escolaridade, recorrendo ao *software Geogebra,* com o objetivo de melhorar o desempenho dos nossos alunos.

Este manual, ainda de forma inacabada, visa uma melhor interação professor-aluno e aluno-aluno, permitindo ao aluno a construção do seu próprio conhecimento de uma forma mais dinâmica, conforme foi constatado na atividade prática desenvolvida com os alunos.

Os alunos que integraram a experiência mostraram um grande interesse e motivação no estudo do tema, sugerindo que o mesmo seja integrado no ambiente de sala de aula no futuro próximo.

Acreditamos ter alcançado os objetivos iniciais do trabalho e, também, ter adquirido habilidades e competências com o software GeoGebra, que nos permite melhorar a nossa prática docente visando o sucesso da aprendizagem.

Referências Bibliográficas

Caetano, V. (2011). *O uso do software geogebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais.* Centro Universitário Barriga Verde – Unibave. Disponível em: http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp-content/uploads/2013/10/Vanessa-Isabel-Cataneo.pdf (acedido em 31 de maio de 2017)

Domingos, M. (1986). *Exercícios de Matemática, 10º Ano*. Porto. Edições Asa.

Matos, J. & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa. Universidade Aberta.

Neves, M., Guerreiro, L. & Moura A. (2006). Trigonometria – Matemática A – 12º Ano. Porto. Porto Editora.

Silveira A. & Cabrita, I. (2013). *O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/DHhhWqgw (acedido em 30 de junho de 2017)

Sousa, P. Ciclo Trigonométrico. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/s2tqv3dG (acedido em 31 de maio de 2017).