Modos de produção de significados no ensino da derivada: um olhar para as dissertações do PROFMAT

Modes of meaning production in derivative teaching: a look at PROFMAT dissertations

RICARDO AUGUSTO DE OLIVEIRA[1]

http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p003-025

RESUMO
Pretendemos identificar os modos de produção de significados atribuídos ao conceito da derivada, presentes nos trabalhos de dissertação do programa PROFMAT, a partir da concepção de campos semânticos apresentados por Romulo Campos Lins. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa, cujo resultado é apresentado na forma de Quadros descritivos. Aos Quadros seguem imagens que ilustram apontamentos dos autores, tais como: a representação de diferentes modos de produção de significados atribuídos ao conceito da derivada; diferentes propostas de seu estudo; concepções de conteúdos tidos por essenciais a sua compreensão; e diferentes modos de utilização do GeoGebra no ensino deste conteúdo. Este trabalho está vinculado a pesquisa de nome Tecnologias digitais para formação inicial e continuada de professores de matemática que está em desenvolvimento junto a UNEMAT de Barra do Bugres – MT.

Palavras Chaves: Produção de significados; Campos semânticos; Conceitos a respeito da derivada.

ABSTRACT
We intend to identify the modes of production of meanings attributed to the concept of the derivative, present in the dissertation works of the PROFMAT program, from the conception of semantic fields presented by Romulo Campos Lins. For this, we perform a qualitative research, whose result is presented in the form of descriptive tables. The tables follow images that illustrate authors' notes, such as: the representation of different modes of production of meanings attributed to the concept of the derivative; different proposals of his study; conceptions of contents considered essential for their comprehension; and different ways of using GeoGebra in teaching this content. This work is linked to the research called Digital Technologies for initial and continuing training of mathematics teachers that is under development with UNEMAT of Barra do Bugres - MT.

Key-words: *Production of meanings; Semantic Fields; Concepts about derivative.*

[1] UNEMAT – algustoricardo@hotmail.com - https://orcid.org/0000-0001-7534-7568

Introdução

Movido pelo esforço de compreensão do conceito de campos semânticos apontados por Lins (1993, 1994, 1999) e Lins e Gimenez (1997) - conceito chave da pesquisa a qual fazemos parte-; pelo consenso constatados entre pesquisadores sobre as potencialidades do uso do *software GeoGebra* para o ensino de matemática (DANTAS, 2016); bem como, diferentes formas de linguagens (Matemática do Matemático, Matemática da Escola e Matemática do *GeoGebra*) e representações (algébricos, geométricos e numéricos) no ensino de matemática (GONÇALVES, 2016); e pela percepção de iminência de uso deste recurso tecnológico em diferentes modos ao ensino de derivada, identificadas por Oliveira *et al*. (2018), investigamos junto aos trabalhos de dissertações do PROFMAT[2], os modos de produção de significados propostos, na busca de identificações de existência ou não de diferentes discursos no ensino desta disciplina.

Este trabalho segue paralelo a pesquisa Tecnologias digitais na formação inicial e continuada dos professores de matemática, desenvolvida junto a UNEMAT de Barra do Bugres, e visamos aqui, por meio de uma pesquisa qualitativa, reconhecer os modos de tratamento do conceito da derivada com uso do *GeoGebra*. Para tal reconhecimento, seguimos o entendimento de campos semânticos apresentados por Lins (1993, 1994, 1997 e 1999).

Como objetivos específicos, buscamos responder aos seguintes questionamentos: quais as formas de representação da derivada são identificadas nas dissertações do PROFMAT? Quais os conteúdos tidos como necessários para sua compreensão? Quais os recursos ou forma de abordagens utilizadas na proposta de seu ensino?

Tais questões são respondidas parte no Quadro 1, parte nos Quadros interpretativos (nos quais expressamos nossas impressões) sequenciados por Figuras, que visam representar os caminhos e as propostas que reconhecemos nestes trabalhos. Importante frisar que os Quadros apresentam as impressões que (enquanto

2 Programa de Mestrado Profissional em Rede, disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/.

pesquisadores) formamos no momento de investigação, e as Imagens assim como alguns recortes, são resíduos de enunciação que influenciaram na atribuição de significados ou identificação dos significados compartilhados em nossa pesquisa.

Iniciamos nosso trabalho com a apresentação de alguns modos de uso do *GeoGebra* no ensino de matemática; seguimos para a apresentação da pesquisa, dos resultados alcançados (com o tópico: modos de produção de significados); e considerações finais.

1. O GeoGebra e o ensino de matemática

Para iniciarmos nosso trabalho, acreditamos ser necessário apontar algumas possibilidades de uso do *GeoGebra* em atividades de ensino de matemática (modo geral), para indicar os modos de uso com o qual pesquisadores têm tratado diferentes temas desta disciplina. No entanto, queremos em seguida, chamar a atenção para a seguinte questão: como tais possibilidades têm sido aproveitadas no ensino de derivada? Nas palavras de Freitas B (2013):

> Muitos pesquisadores afirmam que o conhecimento geométrico possui níveis diferenciados de compreensão, que cresce gradativamente com a qualidade dos estudos oferecidos. Esses níveis vão do reconhecimento visual de uma figura geométrica (mais básico), passando pela identificação das propriedades, até chegar na fase de abstração, que torna possível compreender e demonstrar teoremas. (FREITAS B, 2013, p. 59).

Freitas não cita os autores que segundo suas impressões, apresentam tal perspectiva a respeito do conhecimento geométrico. No entanto, utiliza dos trabalhos de Fainguelernt (1995), Lorenzato (1995) e outros para com o uso das tecnologias (*GeoGebra*) no ensino, elaborar uma proposta de atividade que visa possibilitar contribuições ao currículo de matemática no Ensino Fundamental e Médio, uma vez que além da possibilidade de trabalho com diferentes representações do objeto em estudo (geométrico e algébrico) (p. 40), exigirá do professor também maior planejamento de suas atividades (p. 60).

> As tecnologias disponíveis na área da matemática podem ajudar os alunos nos seus processos de aprendizagem [...] é possível implementar estratégias de ensino que estimulam atitudes de experimentar, testar e descobrir. O *software GeoGebra* apresenta recursos que simulam régua e o compasso e um de seus diferenciais está na possibilidade de manipular pontos da figura e observar, via

> dinamismo, regularidades geométricas. Na sequência de atividades que elaboramos para nosso experimento, tratamos de contemplar situações que provocam nos alunos os hábitos de pensamento discutidos por Goldenberg (1998a, 1998b): visualizar; fazer experiências e explorações; reconhecer padrões ou invariantes; descrever relações e processos, informalmente e formalmente, do verbal para o visual e vice-versa. (GIROTTO, 2016, p. 12).

A importância dada a demonstração matemática (no sentido visual, um visualizar geométrico e gráfico do objeto e suas propriedades) com o *GeoGebra* em seu trabalho, está materializada na apresentação da validade dos procedimentos adotados na construção geométrica de conceitos matemáticos e no respaldo das argumentações a respeito das propriedades ali discutidas, e o *GeoGebra* é utilizado como recurso que possibilita tal efeito de maneira dinâmica, instigante, permitindo ao aluno não apenas realizar a construção pretendida, mas explorar, investigar, experimentar, construir imagens mentais, conjecturar hipóteses, testar e validar a partir das potencialidades que o *software* permite. (GIROTTO, 2016, p. 31).

Entendemos que tais possibilidades também podem ser adotadas no ensino da derivada, tendo em vista que muitos dos trabalhos que realizamos (tanto nesta como em outras pesquisas) apontam para as potencialidades dos recursos visuais e da construção de representações geométricas da derivada para interpretação de fenômenos físicos que podem ser investigados com uso deste dispositivo.

Seguindo com a citação de autores que apontam para as possibilidades pedagógicas do uso do *GeoGebra*, temos:

> Durante essa pesquisa, percebeu-se que o *GeoGebr*a permite a exploração das diferentes funções da demonstração. Mais do que isso, possibilita uma forma de representação de resultados matemáticos e pode ajudar na visualização de novos casos ou na criação de outras possibilidades a serem exploradas (MOD, 2016, p. 90).

Assim como em Girotto (2013), a demonstração com o *GeoGebra* em seu trabalho, tem a intenção de mostrar ao aluno por meio de recursos visuais e geométricos, a partir da construção e manipulação do objeto matemático, as propriedades dos elementos matemáticos em estudo. Neste caso em específico, pretende inclusive, verificar a validade de alguns teoremas.

Deste modo, nos limitamos a apresentar estas referências por entender que são suficientes para indicar diferentes direções de uso do *GeoGebra* em situações de ensino, e também, por não ser nossa intenção apresentar (neste trabalho) um posicionamento quanto a qual deve ser o papel do *GeoGebra* no ensino da derivada. Pretendemos, no entanto, nos dirigir aos textos que investigamos nesta pesquisa, para responder: quais os modos de produção de significados utilizados para o entendimento do conceito de derivadas, podemos identificar nos trabalhos de dissertações do PROFMAT? É para este fazer que nos dirigimos nos próximos capítulos.

2. Método de pesquisa

Consideramos a pesquisa qualitativa descrita conforme Garnica (1999), uma importante ferramenta para a leitura das obras pesquisadas no banco de dados do PROFMAT, bem como a mais adequada para o trabalho de investigação e atribuição de significados, por entender que a preocupação com o processo de pesquisa deve ser mais importante do que seus resultados.

> O produto é, portanto, uma reelaboração de compreensões tornado compreensão mais fecunda, mais elaborada que, tornada pública, vê-se na situação de um novo esforço de atribuição de significado que um outro pesquisador, por sua vez, pode reelaborar. Tal é esse processo interminável. Tal é a natureza de uma abordagem de pesquisa na qual "a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto" (GARNICA, 1999, p. 67).

E também:

> Não tendo as coisas significado em si (o significado é "atribuído" às coisas pelos que com elas se relacionam) e sendo a atribuição de significado dependente das compreensões que cada um tem sobre o mundo que o cerca (compreensões que não são meramente subjetivas, pois são compartilhadas, dependentes do fluxo cultural, social e histórico no qual estamos, já em princípio, inseridos), o que percebemos, a partir das inquietações que nos levam a pesquisa, são disposições que tornamos públicas (dando-lhes publicidade), sujeitando-as às compreensões de outros sujeitos que, na maior parte das vezes, podem complementá-las, completá-las, aprofundá-las, revivê-las, tomando-as para, novamente, compartilhá-las (GARNICA, 1999, p. 64).

A ferramenta de pesquisa qualitativa na perspectiva de Garnica, juntamos o modelo de campos semântico (MCS) de Lins (1993, 1994, 1997 e 1999), pois, tratando em sua obra, da atribuição de significados a linguagem do matemático, aponta "[...] o que define a Matemática do matemático são certos modos – tomado então como legítimo – de produção de significados para a Matemática, um conjunto de enunciados" (LINS, 1999, p. 108).

O MCS é aqui entendido como um modelo epistemológico que permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em diversas áreas do conhecimento, cujas noções centrais são: "Significado, objeto e conhecimento." Sendo que, "Significado" refere-se ao que se diz sobre algo em uma dada situação de comunicação; "Objeto" refere-se ao que se constitui com base nos significados apontados em uma dada comunicação; "Conhecimento" seria a construção com base nos enunciados, de uma crença-afirmação sobre o objeto, junto a uma justificação (argumentos aceitos pelos interlocutores como verdade) (LINS, 1999).

Desta forma, ao proceder às leituras das dissertações identificadas em nossa pesquisa, pretendemos nos colocar no papel de autor/leitor destes trabalhos, identificar os objetos e possíveis significantes constituídos a respeito destes objetos e presentes nos resíduos de enunciação (discursos a respeito do objeto) para atribuir e compartilhar possíveis significados, na procura de se tornar interlocutor de seus discursos, e proceder com a esquematização das informações presentes nas obras para responder aos objetivos propostos em nosso trabalho.

Sob esta perspectiva de compartilhar impressões, realizamos uma investigação junto ao repositório de dissertações do PROFMAT disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/> no mês de dezembro de dois mil e dezoito, utilizando os descritores: Derivada; Integral; Cálculo; Limites e Cálculo Diferencial, a fim de identificar trabalhos que tratam do ensino de derivada utilizando o *software GeoGebra*. Dentre os trinta e um trabalhos identificados, nove nos serviram de dados para a presente pesquisa, os quais são referenciados no Quadro 1.

Optamos por apresentar no Quadro 1 somente os nomes dos autores das obras (que podem ser identificados nas referências deste trabalho), dando ênfase aos modos de utilização do *GeoGebra* em cada pesquisa e o modo como tratam da derivada.

Estes dados foram levantados após leitura minuciosa dos trabalhos, sob uma perspectiva de identificar a concepção de ensino (proposta de construção do conceito) da derivada adotada nos textos.

Tal intencionalidade se fundamenta na concepção de existência de diferentes campos semânticos (CS) na produção de significados (LINS, 1993, 1994, 1997 e 1999) a respeito de um mesmo conteúdo. Tal proposta perpassa pelo campo que a epistemologia propõe investigar. Desta feita, concebemos aqui, epistemologia na forma como descreve Lins (1993): "Epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes (I) o que é conhecimento?; (ii) como é que questões: conhecimento é produzido?; e, (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?" (LINS, 1993, p. 77). Ainda, "De modo geral, posições epistemológicas são elementos essenciais na construção do mundo onde um pesquisador "vive", e é deste mundo - e não de todos os mundos - que o pesquisador está falando" (GOODMAN, 1984, *apud* LINS, 1993, p. 79).

De posse destas colocações, nos dirigimos as informações presentes no Quadro 1 como as tentativas de representação epistemológicas de cada autor, quanto a forma que concebe o conceito de derivada (quando o faz) e o modo como propõe seu estudo com a finalidade de perceber este mesmo modo de produzir significados a respeito deste assunto. Ou seja, o campo semântico presente na obra.

> Posso agora definir: um *campo semântico* é um *modo de produzir significado.* Embora seja tentador interpretar esta definição como simples questão terminológica, este não é o caso. O que esta definição indica é que minha formulação de *semântica* em relação a *conhecimento* não faz referência primária a objetos, mas a modos de produzir objetos (LINS, 1994a, p. 31).

Concebemos assim, que diferentes modos de pensar correspondem a diferentes modos de produção de significados, ou seja, diferentes campos semânticos. Logo, atentos aos modos de produzir significado ao objeto que chamamos derivada, procuramos identificar nestes trabalhos, os modos de produção de significados atribuídos ao conceito de derivada.

A seguir, trazemos uma exemplificação dos diferentes modos de produção de significados apresentados no Quadro 1, ressaltando que, quando tais concepções se repetiam nas obras (mesmo com exemplos diferentes) escolhemos um único Quadro para representá-los, e por isso não trazemos abaixo a citação de todos os autores.

3. Modos de produção de significados no ensino da derivada

Apresentamos primeiramente um Quadro demonstrativo dos modos de uso do *GeoGebra* no ensino da derivada. Por demonstrativo, queremos dizer, um Quadro que esquematiza e organiza as obras que analisamos, colocando-as em ordem temporal e apresente o uso do *GeoGebra* e os modos de representação da derivada que identificamos em seu texto.

Em seguida, apresentamos na forma de Quadros sequenciais, descrições dos modos de significação apontada nas leituras e o caminho seguido para permitir ou fundamentar a proposta, em seguida, inserimos algumas imagens retiradas das próprias leituras, com o fim de representar o que apontamos nos Quadros.

É importante que o leitor perceba, que o próprio Quadro 1 seguido dos Quadros sequenciais, são informações que se complementam, frutos das investigações e das leituras que realizamos, e representam os resultados da pesquisa propriamente dito.

Autores	**Uso do *Software*.**	**Modo de representação e/ou abordagens à derivada.**
Ladislau (2014)	Sequência didática para aulas expositivas. Explorar gráficos de funções na perspectiva da visualização.	Após estudo de limites, apresenta a derivada como taxa de variação.
Mota (2014)	Para otimizar atividades de resolução de problemas e formalização de conceitos no estudo de cálculo diferencial.	O conteúdo da derivada é inserido sem um conteúdo inicial de limites; associa um estudo interdisciplinar entre matemática e física; e apresenta a derivada como taxa de variação média, reta tangente e taxa de variação instantânea.
Godinho (2014)	Para agilizar construções de gráficos de funções, apresentar exemplos e demonstrações matemáticas como estratégia de ensino.	Propõe a derivada com atividades de aplicações no campo da física, ligadas à velocidade média, seguindo para o estudo e representação da reta tangente, construção e estudo de funções, culminando na noção de limites.
Araújo (2015)	Construção manipulação e exploração de *applets* no *GeoGebra*, envolvendo diferentes conteúdos matemáticos.	Os conceitos de derivadas são associados ao estudo de: retas tangentes e secantes; construção de gráficos de funções; significado de velocidade média; função quadrática; e cálculo de área de retângulos. Após abordagem de diferentes tópicos matemáticos tidos como pré-requisitos para sua compreensão, tais como: números

		reais, ideia intuitiva de limites, derivada, e abordagem do método de Newton.
Gaglioli (2015)	Realiza construções de *applet*s para explorar, conjecturar, abstrair e experimentar conceitos, dando ênfase a trabalhos com resolução de problemas.	A partir do conceito de variação de grandezas, interpretação geométrica da taxa de variação, estudo de funções de 1º grau, taxa de variação pontual, existência da derivada e aproximação linear. O conceito de taxa de variação é tido por base para a compreensão da derivada desde o Ensino Fundamental.
Ferreira (2016)	Para estudo com atividades guiadas de modo que o aluno construa gráficos de funções e manipule alguns elementos, a fim de responder a questionamentos pré-estabelecidos.	Após trabalho de diferentes tópicos matemáticos considerados importantes para a aprendizagem do CDI, tais como: apresentação dos números reais, racionais e irracionais para intuição do conceito de limites, e após estudo de limites, explorar conceito de reta tangente a uma curva no estudo da representação geométrica da derivada.
Ribeiro (2016)	Centrado na proposta de visualizar e explorar gráficos de funções com atividades de aplicações, no qual a observação do fenômeno a partir do recurso visual sugere dar dinamicidade à resolução das atividades e permitir o exercício crítico e autônomo do aluno durante o processo.	A derivada é conceituada após estudo de polinômios, funções polinomiais e limites, e seu estudo envolve os conceitos de taxa de variação média, velocidade escalar instantânea, aceleração escalar instantânea, e estudos de máximos e mínimos de funções polinomiais em atividades de aplicações.
Ribeiro (2018)	Para operacionalizar os cálculos algébricos e permitir explorar de modo conceitual os resultados gráficos e algébricos resultantes de atividades conceituais e de aplicações.	Após um estudo inicial do conceito de limites, envolve atividades de representação geométrica da reta tangente a uma curva, derivada de uma função em um dado ponto e sua conceituação como taxa de variação.
Alves (2018)	Na elaboração de quatro propostas de aulas para o estudo de limites e derivadas em PDF interativo com uma proposta lúdica.	Após trabalhos com tópicos de funções e limites, sendo a derivada conceituada no estudo de funções e posteriormente em atividades de aplicação onde é aplicada como taxa de variação e problemas de máximos e mínimos.

QUADRO 1. Quadro de obras e modos de representação da derivada e o modo de utilização do *GeoGebra*.
FONTE: O autor.

No Quadro 1 retratamos as formas de uso do *GeoGebra* no ensino da derivada e os modos de tratamento deste conteúdo no decorrer dos trabalhos. Tais informações não serão discutidas individualmente, mas servem de direcionamento para compreensão do movimento de leitura que fizemos para montar os Quadros interpretativos dos itens: modos de produção de significados e caminho proposto para realizar tal compreensão.

Queremos apontar que o item “modo de significação” refere-se à “crença-afirmação” da proposta de conceber o conceito da derivada identificada nas obras; e o item “caminhos” refere-se ao percurso necessário, ao caminho metodológico sugerido, a justificação capaz de tornar realizável o modo de significação indicado.

Com este dueto (modo de significação/caminho) estamos tentando nos aproximar da concepção de conhecimento proposto por Lins (1993, 1994, 1997 e 1999) com o modelo teórico de campos semântico, no qual, conhecimento é uma crença-afirmação seguida de justificação, possível no domínio da enunciação, da fala, no processo de produção de significado (LINS, 1994a, p. 29). Os resultados da investigação passam então a serem apresentados nos Quadros explicativos a seguir:

Modo de significação	Trata a derivada como taxa de variação média partindo da percepção de linearidade local, para estudo da reta tangente e limites.
Caminho	A partir de um problema físico (para convidar o aluno a querer conhecer formas de solucionar o problema proposto) ligado a uma situação de deslocamento de um objeto em função do tempo gasto no percurso, relaciona o conceito de taxa de variação $TV = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ envolvido na atividade para solucionar o problema que envolve velocidade constante. A partir do qual questiona se podemos calcular a velocidade instantânea e a aceleração desenvolvida pelo objeto em um determinado tempo, em uma situação em que a velocidade do objeto não é constante, e passa a introduzir o conceito da derivada como taxa de variação média e como inclinação da reta tangente a um gráfico, se ela existir nesse ponto, fazendo uso da razão infinitesimal ou $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Inicia a construção da noção de derivada pelo processo de “linearidade local ou gamificação”, definindo uma função derivável como sendo aquela em que parece linear quando uma pequena parte do gráfico (região em torno do ponto de tangência) é gamificada. A atividade é exploratória com uso de *applets* pré-produzidos com questionamentos em aulas com data *show* para introduzir o estudo da reta tangente pelo processo de linearidade local, limites, derivada (no qual faz uso da taxa de variação média). Propõe a partir de um problema físico, apontar para o estudo da derivada como taxa de variação média, iniciando o caminho de linearidade de uma curva nas proximidades de um ponto; estudo de reta tangente a uma curva por meio da vizinhança de um dado ponto de tangência; e da própria derivada inclinação da reta tangente a um gráfico, se ela existir, nesse ponto (p. 51) e como taxa de variação média (p. 52) fazendo uso da razão infinitesimal ou do $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

QUADRO 2. Modos de significação da derivada. Elaborado pelo autor.
FONTE: O autor.

O Quadro 2 aponta para a ideia de gamificação nas proximidades de um ponto para tratamento do ponto de tangência, e a ideia de limites é tida como central para a compreensão da derivada. As Figuras 1 e 2 apresentam sua proposta.

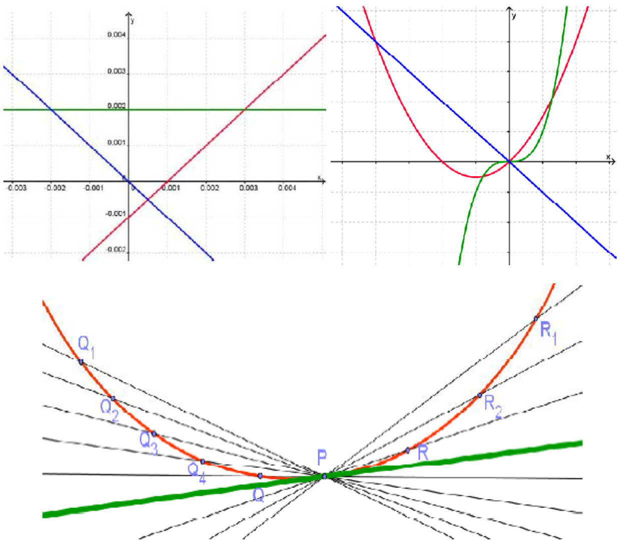


FIGURA 1: Gamificação (ampliação) de uma parte do gráfico das funções y=0,5x² + 0,999x - 0,001; y=x³ + 0,002; y=-x; e gráfico das funções y=0,5x² + 0,999x - 0,001; y=x³ + 0,002; y=-x; construção de retas secantes nas proximidades do Ponto de tangência P. tendendo o Ponto Qn até o limite do Ponto P. Respectivamente.
FONTE: Godinho (2014, p. 40, 41, 48).

Veja também que além da ideia de gamificação, há a proposta de tornar retas secantes cada vez mais próximas da reta tangente para imprimir a ideia de limites.

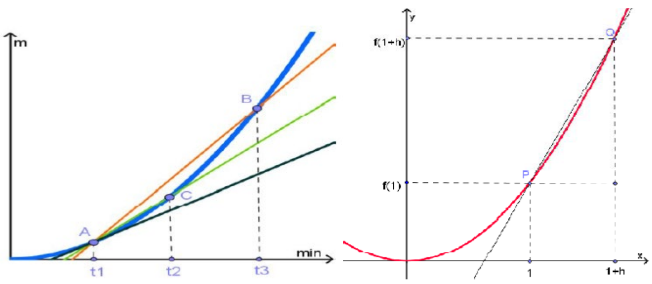


FIGURA 2: Gráfico gerado para aplicação da derivada como taxa de variação média no cálculo da velocidade instantânea do problema físico inicial de seu trabalho; e gráfico utilizado para calcular a derivada de uma função polinomial e em seguida calcular a taxa de variação média no ponto P, fazendo uso da razão infinitesimal, respectivamente.
FONTE: Godinho (2014, p. 51 e 52).

A ideia apresentada na Figura 2 é retomada como proposta de tratamento da taxa de variação no cálculo de um fenômeno, proposta (aplicação da derivada em resolução de problemas) também apresentada em outros trabalhos.

Modo de significação	Conceitua a taxa de variação como a própria derivada, intuída pela sua representação geométrica associada ao processo de gamificação da região próxima ao ponto de tangência entre uma reta e uma curva.

Caminho	Após trabalhar com conceitos de taxa de variação $TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (taxa de variação média), taxa de variação instantânea, reta tangente passando pelos pontos $\left(x1, f(x1)\right)e\left(x1 + \Delta x, f(x1 + \Delta x)\right)$, calcular a TV em um dado ponto de uma curva quando $\Delta x \to 0$ para definir a derivada no ponto dado. A partir daí, desenvolve uma atividade exploratória no qual o aluno é convidado a utilizar o *GeoGebra* (ou outro *software* de geometria dinâmica) para construir uma parábola e uma reta tangente a ela, e com o exercício de aproximação do zoom da tela ao ponto de tangência, visualizar a proximidade de tal ponto como se fosse um segmento minimamente pequeno, a partir do processo de magnificação da curva. Busca possibilitar que a partir do estudo de limites, se conceitue a taxa de variação como a própria derivada, e a partir daí, permitir que através da experimentação no *software*, os alunos possam sem muita formalidade interpretar a derivada com uso da visualização de representações da derivada.

QUADRO 3. Modos de significação da derivada.
FONTE: O autor.

Há nosso ver, esta proposta diferencia da anterior por percorrer o caminho oposto sugerido no Quadro 2. Lá, a proposta seguia do processo de gamificação até se chegar à aplicação da taxa de variação, sendo esta última uma forma de enxergar a derivada; já no Quadro 3, a proposta é perceber que a taxa de variação é a derivada, e não uma forma de como a enxergar, tendo no processo de gamificação um modo de compreendê-la. Importante perceber que não somente o processo de gamificação é utilizado aqui, mas também, a proposta de construção guiada e exploração do construto pelo aluno.

Modo de significação	Apresenta um estudo centrado no conceito de derivada de uma função em um dado ponto, visando sua conceituação como taxa de variação.
Caminho	Após trabalhar com conceitos de taxa de variação $\Delta x, \Delta y, TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (taxa de variação média), TVM como coeficiente de reta secante e taxa de variação pontual, para que a partir de uma reta secante passando pelos pontos $\left(x1, f(x1)\right)e\left(x1 + \Delta x, f(x1 + \Delta x)\right)$ calcular a TVM em um dado ponto de uma curva quando $\Delta x \to 0$ para aproximar seu resultado a um único número real. Para tanto, utiliza da razão infinitesimal com $\Delta x \to 0$ para verificar se $TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}$ tende para um único valor representado por um número real, e assim investigar por meio da taxa de variação média se a função admite uma derivada no ponto dado. Daí em diante trabalha-se com investigação a respeito da existência da derivada, pontos extremos e pontos críticos, problemas de aplicação na física e matemática, o estudo de reta tangente e aproximação linear (entre retas secante e tangente).

QUADRO 4. Modos de significação da derivada.
FONTE: O autor.

No Quadro 4 temos um estudo da derivada também conceituada como taxa de variação, mas sem o processo de gamificação. Preocupa-se em apresentar com maior clareza o estudo da derivada para aplicação em atividades de resolução de problemas (vide Quadro 1, GAGLIOLI, 2015). A taxa de variação é concebida como essencial para compreensão da derivada, e a aproximação linear entre retas secantes e tangentes são utilizadas para representar geometricamente o conceito da taxa de variação.

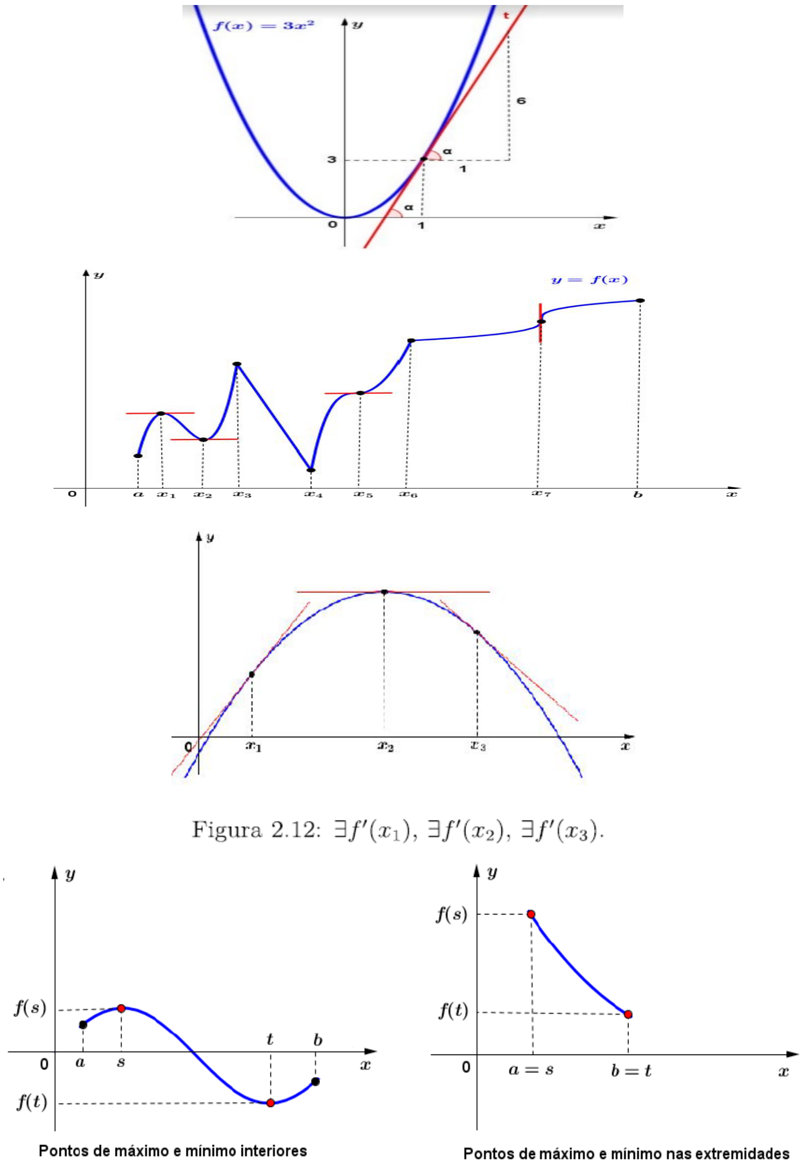


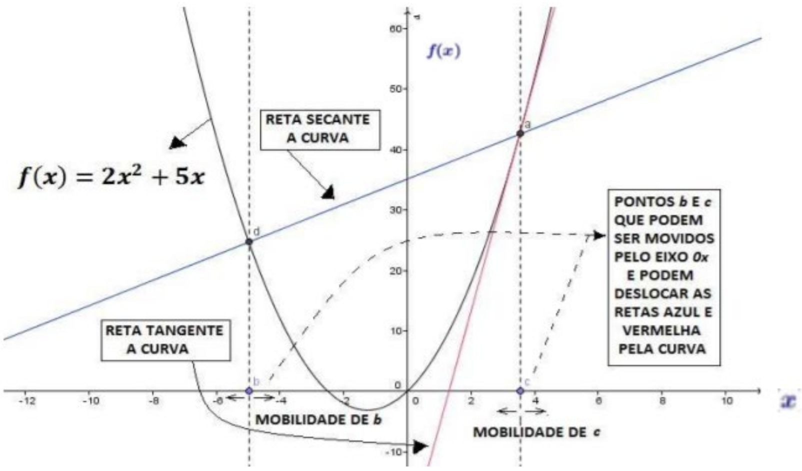
FIGURA 3: Derivada como taxa de variação; investigação a respeito do comportamento da reta tangente nos pontos críticos; estudo dos pontos críticos da função; e existência da reta tangente.
FONTE: Gaglioli (2015, p. 33, 43, 87 e 89).

Em tais Figuras vemos que a utilização do recurso visual é enfatizada como metodologia para interpretação dos conceitos em estudo.

Modo de significação	"Apresentar intuitivamente os conceitos de derivada através do limite da reta secante a reta tangente do gráfico em um determinado ponto" (p. 53).
Caminho	Após estudo de limites, utiliza a movimentação de parâmetros de uma reta secante a uma curva, fazendo aproximar a reta secante a uma reta tangente a esta mesma curva, investigando as inclinações das retas com conceitos de tendência de superposição entre elas (tornando-as a mesma reta) com as noções de limite e uso do recurso visual, para introduzir o conceito geométrico de derivada. Logo, quando $b - c \vee\rightarrow 0$ podemos dizer que $retasecante = retatangente$. Ver Figura a seguir, de Araújo (2015, p. 56), a partir daí explora conceitos de coeficiente angular e reta tangente.

QUADRO 5 - Modos de significação da derivada.
FONTE: O autor.

Optamos por manter a própria citação do trabalho como leitura do seu modo de conceber o ensino da derivada. Veja que não só o conceito de representação geométrica é enfatizado, mas também, a representação da derivada como o limite de aproximação linear entre as retas secante e tangente, diferenciando do Quadro 4, por não dar ênfase à resolução de problemas; por entender ser necessário apresentar o conteúdo de limites; e porque o coeficiente angular da reta tangente é estudado somente no final da proposta.



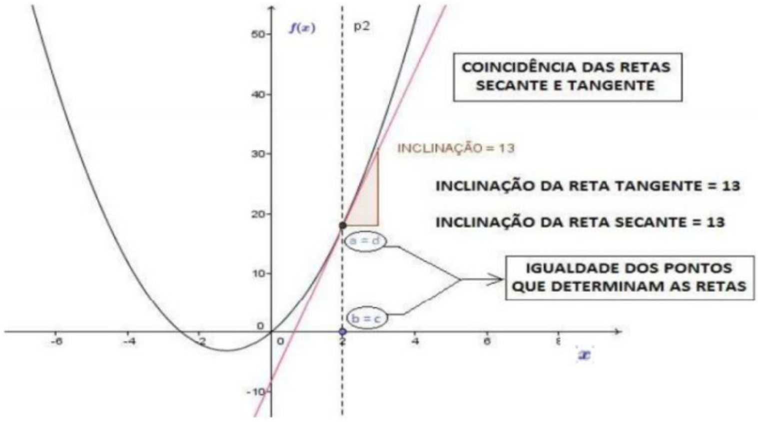


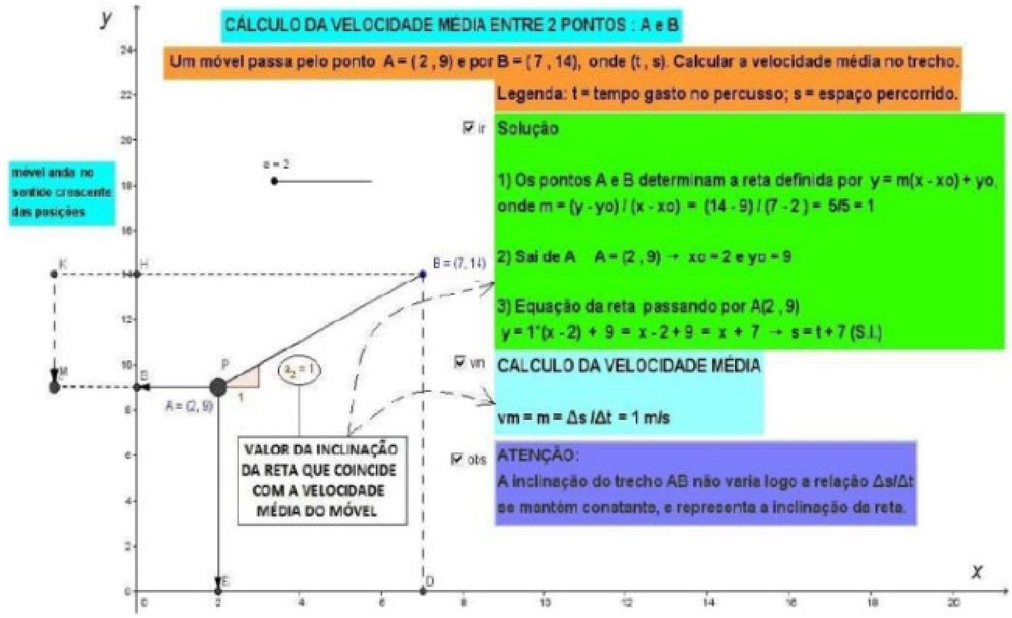
FIGURA 4: Coincidência das retas secante e tangente, onde “b” e “c” são projeções no eixo das abscissas dos pontos “a” e “d” pertencentes da reta secante, que quando coincidem, ocorre também à coincidência das retas secantes e tangente ao ponto comum.
FONTE: Araújo (2015, p. 56).

Na Figura 4 vemos a ênfase dada à representação visual do conceito.

Modo de significação	Apresenta a derivada a partir da relação entre o coeficiente angular da reta tangente e velocidade média, apontando para a aproximação de seus resultados numéricos. Aponta que a inclinação da reta tangente a uma curva é o valor da derivada no ponto de tangência.
Caminho	A partir da relação informada à cima, com a mesma intenção de associar seu conceito à relação de taxa de variação média entre variação de duas grandezas que se relacionam, aplica a derivada em atividades para estudo de: velocidade média e instantânea; problemas de máximos e mínimos (igualando a função derivada a zero para obter a reta tangente de inclinação nula – extremos da função). Ainda, em continuidade aos estudos de coeficiente angular da reta tangente, propõe desenvolver atividades de aplicação no campo da física no conceito de velocidade média de um móvel que percorre certa distância (a partir do ponto A até um ponto distinto de A pertencente a uma dada curva) em um determinado tempo, apontando para o fato de que quando considerado dois pontos A e B pertencentes ao gráfico (curva) em estudo, a velocidade média terá como resultado o mesmo valor resultante do coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos dados. As coordenadas dos pontos são dados pela relação tempo e espaço (t,s) respectivamente.

QUADRO 6. Modos de significação da derivada.
FONTE: O autor.

No Quadro 6 vemos a associação dos conceitos de coeficiente angular da reta tangente e velocidade média como possibilidade de identificar resultados numéricos aproximados, sendo a primeira a própria derivada e a segunda uma aproximação numérica de seu valor (quando existir). Seu trabalho também aponta para a proposta de resolução de problemas por meio da derivada.



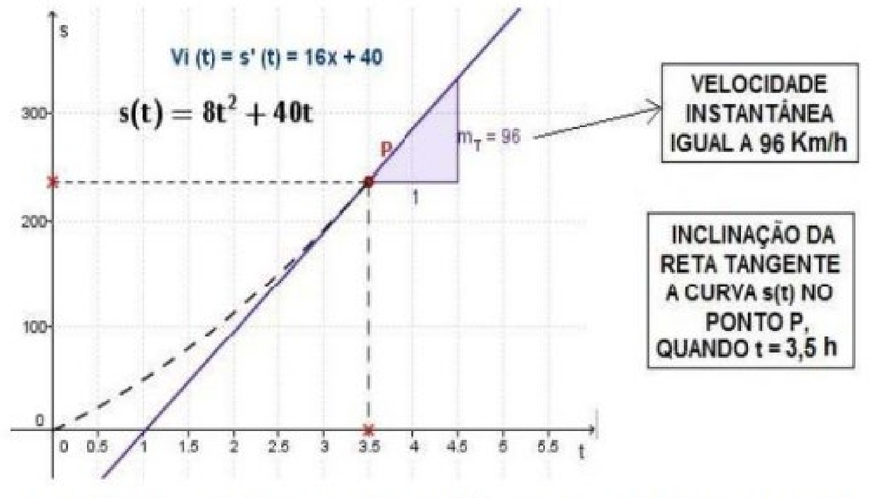


FIGURA 5: Inclinação do segmento AB se relaciona com a velocidade média; e inclinação da reta tangente a s(t) em t=3,5h representa Vi=96Km/h, respectivamente.
FONTE: Araújo (2015, p. 61 e 64).

A Figura 5 aponta para a possibilidade de programação de atividades no *GeoGebra*, no formato de Quis, e assim permitir um estudo diferenciado da derivada.

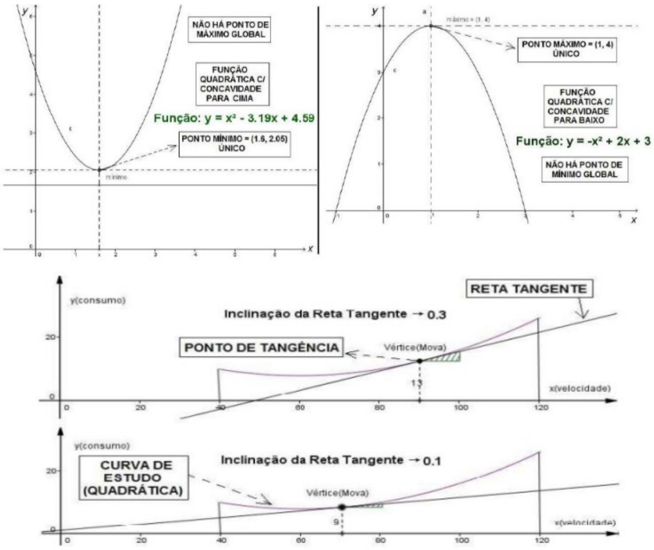


FIGURA 6: Funções quadráticas com concavidade para cima e para baixo e seus pontos críticos; e comparação da inclinação da reta tangente ao aproximar do ponto crítico, respectivamente.
FONTE: Araújo (2015, p. 68 e 71).

Já a Figura 6, parece se aproximar das ideias apontadas na Figura 4, associando a representação gráfica com uso de textos explicativos.

Modo de significação	A derivada é representada como um importante instrumento para estudo de fenômenos possíveis de serem representados por uma expressão polinomial, como por exemplo: o cálculo de velocidade média, instantânea e pontos de máximos e mínimos de um fenômeno.
Caminho	Após estudo preparatório sobre teorema fundamental dos polinômios, introduzir noções limites e derivadas de funções polinomiais de modo conjunto, tendo em vista que a compreensão do primeiro conteúdo será útil para operacionalização dos procedimentos algébricos no estudo da derivada como velocidade média, instantânea e estudo de máximos e mínimos de uma função, os conteúdos são primeiramente tratados no texto de modo formal, com ênfase nos procedimentos algébricos por vezes associados à representação gráfica. Em seguida, é apresentado o modo de uso do *GeoGebra* para construção de um *applets* que permita explorar tais conceitos com uso dos recursos visuais.

QUADRO 7. Modos de significação da derivada.
FONTE: O autor.

No Quadro 7, de modo declarado, a derivada é apresentada como instrumento matemático para resolução de problemas (aplicações). Sua aprendizagem segue propostas de ensino direcionado a percorrer os conteúdos presentes na grade curricular, mas, seguida de construções dos objetos matemáticos junto ao *software*

GeoGebra, como proposta de tratamento visual dos conceitos em estudo. A diferença está na concepção de estudo de polinômios como essencial para sua compreensão.

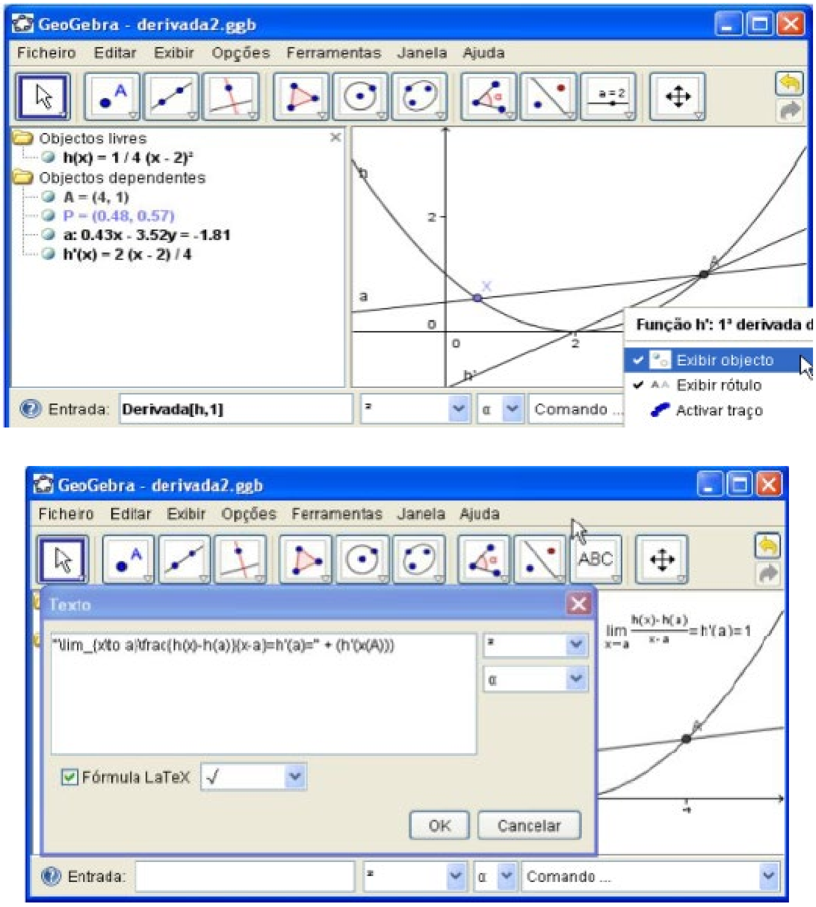


FIGURA 7: Passos de construções realizadas com o *GeoGebra*.
FONTE: Ribeiro (2016, p. 50 e 52).

A Figura 7 aponta para a exemplificação do processo de construção proposto no trabalho e utilização da ferramenta *LaTeX* como auxílio à compreensão do conceito.

Modo de significação	Introduzir o estudo da derivada no 1º ano do Ensino Médio, a partir do estudo de limites em conjunto ao estudo dos números reais, alinhando esta associação (números reais, limites, derivadas) para melhor compreensão de seus conceitos, que serão úteis para resolução de exercícios de aplicação.
Caminho	Por meio da intuição do conceito de limites no estudo dos números reais, introduz o ensino de limites com a representação da reta tangente a uma curva; e tangente a uma curva em um dado ponto para o qual também faz uso da razão incremental e a aproximação de uma reta secante a curva até seu limite de aproximação da reta tangente a curva em um dado ponto; equação da reta tangente (coeficiente angular da reta tangente como limite da razão incremental); reta normal e posterior estudo de limites. O procedimento se justifica por apresentar em seguida a derivada como

	o coeficiente angular da reta tangente a uma curva, quando $\frac{\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x)}{h}$ existir. Pois, assim como em Leibniz, a derivada deveria ser interpretada como quociente de quantidades infinitesimais ou infinitamente pequenas $f'(x) = \frac{dy}{dx} oudy = f'(x)dx$. Seguido ao estudo conceitual, aponta para estudo de algumas aplicações da derivada no campo da física (cinemática), matemática financeira, problemas de otimização, equações diferenciais, encerrando seu trabalho com a apresentação do método de Newton de derivação. O *GeoGebra* é sugerido como instrumento para realização das atividades com os alunos e dar ênfase a conceituação geométrica.

QUADRO 8. Modos de significação da derivada.
FONTE: O autor.

Semelhante a Quadro 7, temos no Quadro 8 uma abordagem a derivada que se diferencia por dois quesitos: primeiro por considerar um estudo de limites de forma intuitiva junto ao estudo dos números reais (e não polinômios) como essencial para a compreensão da derivada; segundo, por se aproximar da proposta do Quadro 4 em dar ênfase às representações geométricas e ao estudo mais profundo da derivada, para em seguida utilizar em atividades de resolução de problemas.

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant \alpha, \qquad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant \alpha, \ etc.$$

$$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$$

$$1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ 1,41421;\ \cdots \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}.$$

$$1^2 < 2 \quad \text{e} \quad 2 < 2^2 \ \Rightarrow \ 1 < \sqrt{2} < 2.$$

FIGURA 8: Processo de cálculo aproximado dos números irracionais para introduzir o conceito de limites.
FONTE: Imagem construída a partir do trabalho de (FERREIRA, 2016) para representar a intuição de limites no estudo dos números irracionais.

Com a Figura 8 preferimos indicar o processo de introdução ao conceito de limites utilizado na obra, uma vez que a proposta de utilização do *GeoGebra* replica a identificada no Quadro 6.

Modo de significação	Apresenta um desenvolvimento teórico no capítulo de fundamentação de seu trabalho, com o fim de apontar a derivada como um "limite especial" que pode ser utilizado para tratar de problemas reais em vários campos do conhecimento.
Caminho	Após estudo teórico de limites, passando pelos conceitos de ponto de acumulação (ou ponto limite) – a partir da noção de que $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \vee 0 < x - a \vee \delta \rightarrow \vee f(x) - L \vee \varepsilon$ – até limite fundamental trigonométrico e continuidade (a partir dos quais faz uso de imagens), com uma apresentação formal (abordagem numérico e simbólico do conteúdo) sequenciada com estudo de definições, propriedades e teoremas, passa conceituar (na mesma metodologia) a derivada como um "limite

	especial" (p. 35). Utiliza inicialmente a construção de uma reta secante e uma reta tangente a uma curva, o qual faz variar um ponto da reta secante a partir da manipulação de sua coordenada "x" tendendo a coordenada "x" do ponto de tangência, de modo que as retas se sobreponham (tornando a mesma inclinação perante o eixo OX) e uso da razão infinitesimal $Inclinação = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$(com uso de imagens); em seguida, utiliza tal raciocínio para conceituar o cálculo da derivada de uma função de uma só variável como $taxadevariação = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ (sem uso de imagens). Apesar de conceitualmente não utilizar de muitas imagens para ajudar no auxílio à compreensão dos conceitos básicos apresentados, mas, aponta no capítulo 4 de seu trabalho uma série de problemas onde podem ser aplicados os conceitos de derivada por hora discutido e o uso dos *softwares WxMáxima* e *GeoGebra*.

QUADRO 9. Modos de significação da derivada.
FONTE: O autor.

Percebemos no Quadro 9 o tratamento da derivada como instrumento matemático para resolução de problemas (assim como nos Quadros 4 e 7), porém agora, sendo considerada como um "limite especial". Diferente dos demais trabalhos, a derivada é desde o início tratada como limite, e é apresentada de modo mais abrangente, profundo, sem muito uso de imagens geradas no *GeoGebra* (apesar de apontá-lo como recurso a ser utilizado pelos alunos).

Após apresentar nossas impressões, trazemos na sequência nossas considerações.

Considerações

Seria tentador alegar que não houve grandes divergências entre os modos de produção de significados identificados nesta pesquisa. No entanto, isso seria uma afirmação equivocada. Veja bem. Apesar de termos vários trabalhos tratando da derivada como taxa de variação, coeficiente angular da reta tangente, limite, e instrumento matemático para resolução de problemas, é importante destacar que estas percepções se encontram em planos distintos de significações, ou seja, em diferentes campos semânticos.

Temos trabalho em que a derivada pode ser representada pela taxa de variação, e trabalho onde ela é a taxa de variação (o que é muito diferente), ou seja, são ideias que estão em planos de significados (modos de produção de significados) diferentes. Também tivemos trabalhos que, partindo do estudo de limites se chegou ao estudo da derivada, e trabalho onde o limite é compreendido como consequência do estudo da derivada, e ainda, o limite (um limite especial) passa a ser a própria derivada.

Os modos de significações se diferenciam também pela concepção de conteúdos que devem ser trabalhados antes do estudo da derivada, e outros em que seu estudo é apontado diretamente. E mesmo a abordagem formal com mais ou menos ênfase aos procedimentos algébricos, visuais, linguagem científica, proposta de estudo da derivada ou de introdução de sua noção.

Logo, são várias as diferenças aqui identificadas, sendo assim, como dizer que não há diferença nos modos de produção de significado? Com tudo isso posto, acreditamos que há sim diferentes formas de produzir significados para a compreensão da derivada, evidenciadas nos trabalhos do PROFMAT, e que isso deve ocorrer em decorrência da visão epistemológica utilizada pelo pesquisador, assim como coloca Lins (1993).

Referências

ALVES, A. R. **Limites e derivadas: uma abordagem para o ensino médio**, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150920665>. Acesso em: 6/12/2018.

ARAÚJO, E. A. DE. **Proposta de ensino de cálculo diferencial e integral no ensino médio via GeoGebra**, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=78087>. Acesso em: 6/12/2018.

DANTAS. **Design, implementação e estudo de uma rede sócio profissional online de professores de Matemática**, 2016. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/136324>. Acesso em: 6/12/2018.

FERREIRA, A. DE J. DE S. **Cálculo diferencial e integral: uma proposta para o ensino médio**. 2016. Universidade Federal do Maranhão. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=73265>. Acesso em: 9/12/2018.

FAINGUELERNET, E, K. **O ensino de Geometria no 1º e 2º graus**. SBEM A Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 45-53, 1995.

FREITAS, B. AL. **Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com GeoGebra,** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013. Disponível em < https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/1188/1/brasilioalvesfreitas.pdf>. Acesso em 6/12/2018.

GAGLIOLI, M. A. **Derivada como taxa de variação: uma abordagem com base no currículo do ensino médio**, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=86900>. Acesso em: 6/12/2018.

GARNICA. **Filosofia da educação matemática: algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa**. In: UNESP (Org.); Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. p.59–74, 1999.

GIROTTO, N. **O desenvolvimento de hábitos de pensamento: um estudo de caso a partir de construções geométricas no GeoGebra**, 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

GODINHO, L. M. **Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino da derivada na primeira série**, 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade do rio de Janeiro. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=934>. Acesso em: 6/12/2018.

GONÇALVES, W. V. **O transitar entre a Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do GeoGebra: um estudo de como professores de Matemática lidam com as possibilidades e limitações do GeoGebra**, 2016. Faculdade de Ciências, Campus de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/143951>Acesso em: 6/12/2018.

GOODMAN, N. (1984) - *Of mind and other matters;* Cambridge: Harvard University Press.

LADISLAU, C. E. **Noções de cálculo diferencial no ensino médio**, 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Vala do São Francisco. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=237>. Acesso em: 6/12/2018.

LINS, R, C. **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática**. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo. UNESP ed., p.75–94, 1999.

LINS, R, C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997 - (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LINS, R. C. **Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa.** Revista de Educação Matemática SBEM - São Paulo, v. 1, p. 76–91, 1993.

LINS, R. C. **O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico**. Revista Tecnico Cientifica Universidade Regional de Blumenal, v. 2, n. 01040405, p. 29–39, 1994.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** SBEM A Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 4, p. 3-13, 1995.

MOD, L. F. A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**, 12. dez. 2016. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/19669>. Acesso em: 17/12/2018.

MOTA, J. O. **Derivadas no ensino médio: reflexões e propostas**, 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Sergipe. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=739>. Acesso em: 9/12/2018.

OLIVEIRA, R. A. DE; GONÇALVES, W, V.; PIASSON, D. **O Uso do GeoGebra para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, um Mapeamento de Suas Publicações**. Revista Thema, v. 15, p. 466–484, 2018. Disponível em<http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/892> Acesso em: 6/12/2018.

RIBEIRO, D. DA S. P. **Cálculo diferencial de funções polinomiais no ensino médio com o uso do geogebra: fundamentação teórica e suas aplicações.** 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=76090>. Acesso em: 6/12/2018.

RIBEIRO, H. C. **Cálculo: uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no ensino médio**, 2018. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150640701>. Acesso em: 6/12/2018.