http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i2p078-102

Livros Dinâmicos de Matemática

Dynamic Mathematics Books

JORGE CÁSSIO COSTA NÓBRIGA [1]

IVANETE ZUCHI SIPLE[2]

RESUMO

As novas possibilidades da plataforma GeoGebra permitem a criação de atividades que podem ser organizadas por meio de uma ferramenta chamada de "Livro". Tais atividades podem conter textos, figuras, questões abertas e fechadas, applets, vídeos, arquivos pdf e páginas da web. Com o propósito de sugerir algumas orientações de como esses materiais podem ser produzidos nesse ambiente, propomos um conceito que chamamos de Livros Dinâmico de Matemática, fundamentado na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. Neste artigo apresentaremos características, exemplos e sugestões de como desse tipo de livro pode ser usado no ensino da matemática.

Palavras-chave: *GeoGebra; Livros Dinâmicos; Representações Semióticas.*

ABSTRACT

The new possibilities of the GeoGebra platform allow the creation of activities that can be organized by a tool called "Book". These activities may contain texts, figures, open and closed questions, applets, videos, pdf files and web pages. In order to suggest some guidelines on how these materials can be produced in this environment, we propose a concept that we call Dynamic Mathematics Books, based on the Theory of Registers of Semiotic Representation of Duval. In this article we will present characteristics, examples and suggestions of how this type of book can be used in the teaching of mathematics.

Keywords: *GeoGebra, Dynamic Mathematics Books, Semiotic Representation*

Introdução

Não é novidade que os livros didáticos funcionam como guias para os professores e estudantes. Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998, p.96) já destacavam isso, dizendo que "o livro didático é um dos materiais de mais forte influência na prática de ensino brasileira". Ou seja, de certa forma, o livro didático muitas vezes orienta o que será ensinado, a ordem e como o professor vai ensinar. Já

[1]Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC – j.cassio@ufsc.br geogebra.org/u/jcássio

[2] Universidade do Estado de Santa Catariana- UDESC –ivanete.siple@udesc.br

para o estudante, o livro é um material com o qual ele poderá rever e exercitar os conteúdos trabalhados em sala. Talvez a grande pretensão para o livro didático seja a promoção da aprendizagem com autonomia. Mas de que forma o livro didático de matemática impresso ou no formato digital (PDF) busca criar condições para que o estudante possa aprender matemática? Como as novas tecnologias podem contribuir para aperfeiçoar as características e superar alguns limites do livro didático? Os constantes avanços da tecnologia possibilitam a exploração de recursos potenciais para o desenvolvimento de livros digitais. A plataforma GeoGebra, por exemplo, possui ferramentas que possibilitam a criação de livros digitais dinâmicos. Mas esses não podem ser simples reproduções dos livros estáticos em ambientes dinâmicos. Ao longo da nossa experiência como professores e pesquisadores na área de tecnologias educacionais temos visto muitos materiais sendo divulgados na plataforma e em outros ambientes. Entretanto, tais materiais são, em sua maioria, *applets* sem nenhuma orientação pedagógica de utilização pelo professor e/ou pelo aluno. Acreditamos que tais *applets* são importantes, mas sua manipulação por si só pode não promover a aprendizagem. Assim, temos defendido a produção de atividades que contenham *applets* com orientações pedagógicas de utilização. Tais atividades precisam conter organização e coordenação entre os registros de representação dos objetos matemáticos que serão trabalhados. Dessa forma, neste artigo, apresentaremos a teoria que subsidiou a criação de alguns livros digitais dinâmicos na plataforma GeoGebra, evidenciando as características que tais livros precisam conter para ser considerados como dinâmicos.

1. Teoria dos Registros de Representações Semióticas e o Livro Didático

Segundo a Teoria de Registros de Representações de Duval (2009), o único acesso ao objeto matemático é por meio de suas representações em seus diferentes registros semióticos. Assim, o estudo das representações é fundamental para explicar a compreensão dos conceitos e da aprendizagem da matemática. Deste ponto de vista, a compreensão de um conceito é construída por meio de atividades que implicam a utilização de diferentes registros de representação e na coordenação entre essas representações.

Duval (2009, p. 14) diz que "[...] não se pode ter compreensão em Matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação" e "o acesso aos objetos matemáticos passa, obrigatoriamente, pela produção de representações semióticas" (DUVAL, 2018, p. 4). De acordo com Duval (2016) a matemática tem uma situação epistemológica totalmente diferente de outras disciplinas. O conhecimento matemático se fundamenta na mobilização de diferentes sistemas semióticos que são utilizados para preencher, além da comunicação e objetivação, a função de tratamento.

Para Duval (2011, p. 117) os registros utilizados em Matemática podem ser classificados em:

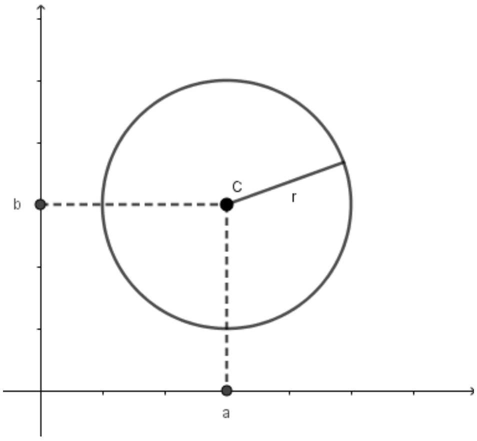
- Discursivos: língua natural e sistemas de escrita (numéricas, algébrica e simbólicas);
- Não-discursivas: Figuras Geométricas Planas ou em perspectiva e Gráficos cartesianos.

Segundo Duval (2016), os registros de linguagem natural e de visualização (reconhecimento perceptivo de formas) são mobilizados em todas as áreas de conhecimento, porém os outros registros são exclusivos da matemática e são utilizados nos últimos anos do Ensino Fundamental para aprender a resolver equações, para instrumentalizar a resolução de problemas e para introduzir o conceito de funções.

Como exemplo, podemos considerar os seguintes registros de representação do objeto "Circunferência":

- Registro de Representação Linguística (língua materna): Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado (centro) desse plano é igual a uma distância (não nula) dada.
- Registro de Representação Simbólica (equação algébrica): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

- Registro de Representação Visual (gráfico):



Nenhuma representação pode ser considerada de forma isolada (DUVAL, 2018), ou seja, nenhuma representação sozinha é suficiente para designar o objeto. É importante que o uso da pluralidade potencial das diversas formas de representações semióticas não seja confundido com o objeto em questão (DUVAL, 2008).

Duval (2008, p. 14) diz que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação". Apesar das expressões "simultânea" e "ao mesmo tempo" na mesma frase terem ficado redundantes, pode-se concluir que Duval quis enfatizar que, em matemática, há necessidade de se trabalhar sempre com pelo menos dois registros de representações ao mesmo tempo. Entendemos que o autor está considerando a mobilização como utilização, movimentação, transformação ou operação. Tal trabalho é feito por meio de variações de conteúdo das representações geradas pelas transformações que ocorrem dentro de um mesmo registro ou de um registro para o outro. De acordo com Duval (2009), o tratamento é uma transformação que se efetua dentro de um mesmo registro. Por exemplo, ao desenvolver a equação geral da circunferência $x^2 + 2x + y^2 = 0$ para forma reduzida $(x + 1)^2 + \mathrm{y}^2 = 1$ tem-se um exemplo de tratamento no registro algébrico. A conversão é uma transformação que se efetua ao passar de um registro a outro. Por exemplo, o teorema "Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos" pode ser representado pela equação $a^2 = b^2 + c^2$ (onde "a" representa a medida da hipotenusa, "b" e "c" representam as medidas dos catetos do triângulo retângulo). Nesse caso, há uma conversão da representação do teorema do registro linguístico para o registro simbólico.

Duval (2018) fala sobre compreensão em dois pontos de vista: matemático e cognitivo. A compreensão do ponto de vista matemático é evidenciada pela justificativa, validação, prova e demonstração. Do ponto de vista cognitivo, é evidenciada pelo reconhecimento dos objetos estudados por meio de suas múltiplas representações ou manifestações possíveis. Em outras palavras: "o critério de compreensão é o reconhecimento imediato de um mesmo objeto em representações em que os conteúdos não possuem nada de comum" (DUVAL, 2018, p. 16). Para que haja compreensão do ponto de vista cognitivo, a conversão, em ambas as direções, é fundamental, mas isso não é fácil. Duval (2018, p.9) diz que "o obstáculo maior à operação de conversão das representações é o fato de que não há nada de comum entre os conteúdos das representações de dois registros diferentes".

Assim, para reconhecer que duas representações se referem ao mesmo objeto e podem ser substituídas uma pela outra, segundo o princípio da equivalência semântica, não existe outra possibilidade que não seja por meio de uma correspondência, termo a termo, entre os conteúdos de dois registros diferentes.

> Somente fazendo corresponder as unidades de sentido, que são próprias aos diferentes níveis de organização dos conteúdos respectivos de duas representações semióticas, é que se torna possível reconhecer se elas representam o mesmo objeto (DUVAL, 2016, p.22)

Consideremos um exemplo a partir da seguinte sentença dada no registro de representação de linguagem natural por:

"Três é menor que quatro"

No registro simbólico temos:

$$3 < 4$$

Nesse caso, é necessário corresponder termo a termo as unidades significantes respectivas para efetuar a conversão das representações desse objeto no registro em língua natural para o registro simbólico, conforme ilustra o quadro 1.

Registros de Representações	**Representação de Partida: Registro de Representação Linguística**	**Representação de Chegada: Registro de Representação Simbólica**
	Três é menor que quatro	$3 < 4$
Unidades de sentido	Três	3
Unidades de sentido	é menor que	$<$
Unidades de sentido	Quatro	4

Quadro 1-Exemplo de conversão das representações

No quadro 1 é possível ver que, se trocássemos a representação de partida para o registro de representação simbólica, o procedimento de conversão para o registro de representação linguística seria o mesmo. Trata-se de um caso de congruência. Vejamos agora outro exemplo:

“Um número negativo”

No registro algébrico temos:

$$x < 0$$

Nesse caso, vemos que falta na representação simbólica uma unidade significante que corresponda a negativo. Assim, é preciso combinar duas unidades significantes ($<$, 0) para amenizar tal ausência. Nesse caso, falamos de não congruência das representações.

Registros Representações	**Representação de Partida: Registro de Representação Linguística**	**Representação de Chegada: Registro de Representação Simbólica**
	Um número negativo	$x < 0$
Unidades de sentido	Um número	x
Unidades de sentido	Negativo	< 0

Quadro 2-Exemplo de conversão não congruente

De acordo com Duval (2009, p.66)

> Nos fenômenos de conversão em que ocorre a não congruência, não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de compreender, se não houver aprendizagem prévia concernente às especificidades semióticas de formação e tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros em presença.

A conversão pode ser quase imediata nos casos de congruência das representações. O que não acontece nos casos de não congruência entre as representações.

Duval (2018) alerta ainda que o reconhecimento de um mesmo objeto quando se muda de registro de representação deve ser efetuado nos dois sentidos de conversão e não em um só, ou seja, aquele que é frequentemente privilegiado pelo professor. Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado pela ideia de que o exercício efetuado num sentido estaria automaticamente exercitando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são propositadamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência.

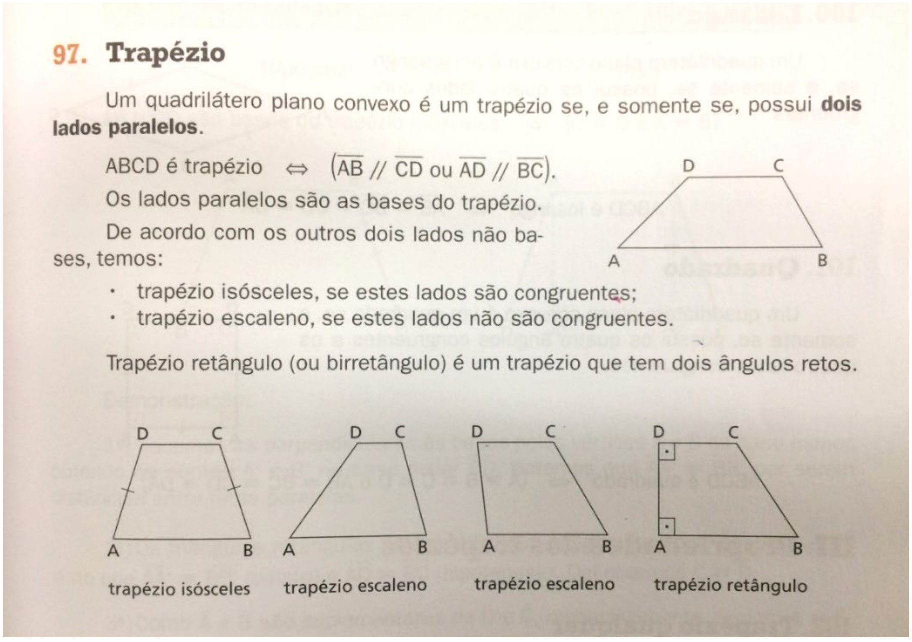
Para que haja compreensão do ponto de vista cognitivo é preciso criar condições para que os estudantes reconheçam um objeto matemático por meio de diferentes representações. Nesse sentido, Duval (2018, p.12) diz que para aprender matemática:

> É preciso construir situações de aprendizagem nas quais os alunos possam comparar as variações de conteúdo das representações em um registro A com variações correlatas de conteúdo das representações em um registro B: é a única maneira de aprender a discernir as unidades a serem postas em correspondência e tornar-se capaz de reconhecer, rapidamente, se duas representações quaisquer sendo dadas em dois registros são, ou não são, duas representações equivalentes de um mesmo objeto (DUVAL, 2018, p.12)

Duval (2009, p. 101) fala sobre a necessidade de se “[...] possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes de representação em outro registro”. Diante disso, perguntamo-nos: Como os livros didáticos impressos ou PDF buscam criar tais condições para uma exploração que permita prever ou observar as variações concomitantes de representação em outro registro? Como eles buscam criar situação para a formação, tratamento e conversão dos registros?

De maneira geral, nota-se que os livros didáticos de matemática apresentam diferentes registros de representações semióticas para os objetos matemáticos. Duval (2011) diz que é comum vermos em livros de Matemática e de diversas outras áreas, várias representações em uma mesma página: frases em língua natural, fórmulas, figuras geométricas, gráficos cartesianos, etc. A conexão entre tais representações fica a cargo do leitor, como se atividade de conversão fosse espontânea.

Para ver como, em geral, é feita a formação, tratamento e conversão das representações, vamos analisar alguns exemplos. A figura 1 apresenta uma página de um livro didático que explora o Trapézio.


97. Trapézio

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui **dois lados paralelos**.

ABCD é trapézio $\Leftrightarrow$ ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ou $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$).

Os lados paralelos são as bases do trapézio.

De acordo com os outros dois lados não bases, temos:

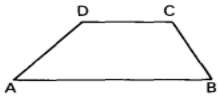
- trapézio isósceles, se estes lados são congruentes;
- trapézio escaleno, se estes lados não são congruentes.

Trapézio retângulo (ou birretângulo) é um trapézio que tem dois ângulos retos.

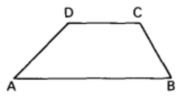
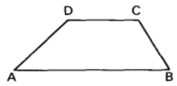
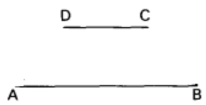
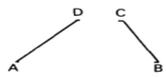
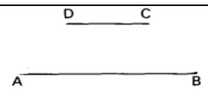
FIGURA 1: Definição e classificação do Trapézio
FONTE: Dolce & Pompeu (2013, p.97)

Pode-se perceber, na figura 1, que o livro traz registros de representações linguística, simbólica e visual para definir e classificar o trapézio:

- Registro de Representação Linguística (língua materna): "Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos";
- Representação Mista (linguística e simbólica): ABCD é trapézio $\leftrightarrow$ ($\overline{AB}//\overline{CD}$ ou $\overline{AD}//\overline{BC}$)

- Registro de Representação Visual (geométrico): 

Para que o estudante possa fazer a conversão dessas representações precisará associar as seguintes unidades de sentido:

	Representação de Partida- Registro de Representação Linguística	**Representação Mista (auxiliar) Registro de Representação Simbólica e linguística**	**Representação de Chegada: Registro de Representação Visual**
Registros de Representação	Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos	ABCD é trapézio ↔ $\underline{AB}//\underline{CD}$ ou $\underline{AD}$ $//\underline{BC})$	
Unidades de sentido	- quadrilátero plano convexo - trapézio	ABCD	
Unidades de sentido	dois lados	$\overline{CD}$ $\overline{AB}$	
		$\overline{AD}$ $\overline{BC}$	
Unidades de sentido	paralelos	$//$	
Unidades de sentido	se, e somente se,	↔	

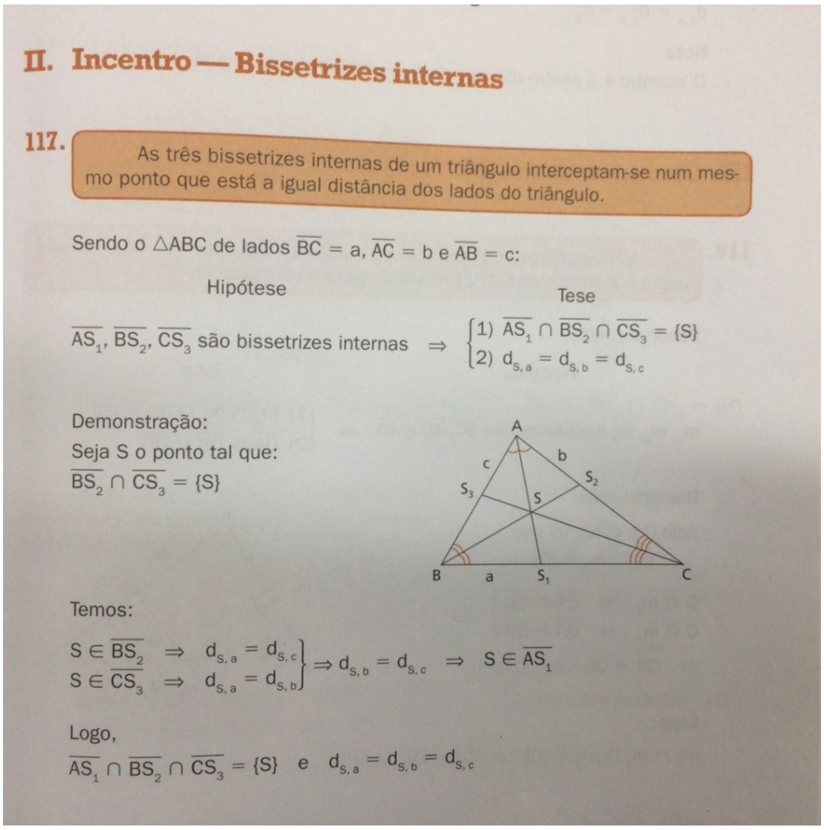
Quadro 3: Unidades de sentido do conceito Trapézio

Percebe-se que a associação das unidades significantes dos diferentes registros não é simples, porque se trata de um caso típico de não congruência e, como se pode ver, não há nada de comum entre os conteúdos das representações. Além disso, há alguns registros que não possuem unidades de sentido correspondentes nos outros, como por exemplo, a palavra plano. A conversão inversa também não é simples.

Outro aspecto que se deve levar em consideração é o fato de ser comum a representação geométrica do trapézio aparecer nos livros didáticos sempre com as bases na horizontal.

Isso pode fazer com que o estudante ache que a posição da figura influencia o conceito, levando-o acreditar que um quadrilátero com dois lados paralelos que não estejam na horizontal não é um trapézio.

Vejamos na figura 2 outra situação para analisarmos como são apresentadas as propriedades e justificativas.



II. Incentro — Bissetrizes internas

117. As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

Sendo o $\triangle ABC$ de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$:

Hipótese		Tese
$\overline{AS_1}, \overline{BS_2}, \overline{CS_3}$ são bissetrizes internas	$\Rightarrow$	$\begin{cases} 1)\ \overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\} \\ 2)\ d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c} \end{cases}$

Demonstração:

Seja S o ponto tal que:

$\overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} S \in \overline{BS_2} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,c} \\ S \in \overline{CS_3} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,b} \end{array}\right\} \Rightarrow d_{S,b} = d_{S,c} \Rightarrow S \in \overline{AS_1}$$

Logo,

$\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$ e $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

FIGURA 2: Incentro do triângulo
FONTE: Dolce & Pompeu (2013, p.121)

A figura 2 mostra uma página de um livro didático que trata do incentro do triângulo. Primeiramente, traz um registro de representação linguística para apresentar uma propriedade: "As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados triângulo". Ao que parece, para fazer a conversão, espera-se que o estudante possa, com o auxílio de representações auxiliares e do tratamento no registro de representação simbólico, associar os conteúdos do registro de representação linguístico com os conteúdos do registro de representação visual do triângulo.

Além das dificuldades já relatadas no exemplo anterior, outra que merece ser destacada é o fato das representações aparecerem ao mesmo tempo numa mesma página. Diante disso, perguntamos: qual a ordem que o estudante deve fazer a leitura para poder associar as unidades significantes e, consequentemente, fazer a conversão? A leitura em matemática não pode ser feita, simplesmente, de cima para baixo. Tal leitura precisa ocorrer com idas e vindas aos diferentes registros de representação, possibilitando criar condições para a "...mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação" (DUVAL, 2008, p. 14). Em geral, espera-se que o professor mostre como estabelecer essa ordem de leitura, mas e se o estudante estiver estudando sozinho?

Alguns trabalhos que investigaram, a partir da Teoria de Registros de Representações Semióticas, como assuntos matemáticos abordados em livros didáticos mostram outras limitações. No que diz respeito às conversões, é comum privilegiar-se a transformação em apenas um sentido. Cataneo e Rauen (2018, p. 146) dizem que "ao privilegiar o sentido da conversão da representação dos problemas às equações e das equações aos gráficos, conversões de representações inversas ficam em segundo plano". Destacam ainda que, nas atividades investigadas, o sentido da conversão é predominantemente orientado da língua natural para o registro algébrico.

Dallemole e Groenwald (2014) realizaram uma investigação em livros didáticos de matemática do Ensino Médio das coleções aprovadas pelo PNLD- Programa Nacional do Livro Didático (2012), tendo como um dos objetivos identificar os registros de representações utilizados para abordar os conteúdos de Geometria Analítica propostos, em particular para Reta e Circunferência. As autoras concluíram que nas obras analisadas todas utilizam diferentes registros de representação tanto na exposição teórica do conteúdo quanto nos exercícios resolvidos e nas atividades propostas, sendo algumas dessas representações mais privilegiadas. Embora as obras apresentem a conversão em duplo sentido dos registros algébrico e gráfico, essa não ocorre nos demais registros, sendo também privilegiado o tratamento nas atividades propostas e nos exercícios resolvidos em detrimento das conversões.

> Verifica-se que os livros didáticos priorizam atividades que envolvem tratamentos e, ainda assim, com ênfase no registro numérico e algébrico. Infere-se a necessidade de os livros didáticos apresentarem uma abordagem dos conteúdos de Geometria Analítica (Ponto e Reta e Circunferência) articulada ao uso de diferentes registros semióticos, potencializando as atividades de conversão entre estes e em duplos sentidos para que o aluno analise propriedades que não são perceptíveis na conversão em apenas um sentido (DALLEMOLE e GROENWALD, 2014, p.61)

A teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval nos propicia reflexão sobre as faces opostas para a compreensão em matemática, sendo que uma das faces é a exposta, que é relativa aos conhecimentos e dos métodos de cálculo, de resolução ou de raciocínio; a outra é a face oculta das coordenações, de ao menos, dois registos de representação. "Essas coordenações precisam ser desenvolvidas, uma vez que o pensamento matemático é a sinergia de diversos registros, e o que se chama de "conceitualização" não é nada mais do que a mobilização sinérgica de diversos registros" (DUVAL, 2016, p.34). Assim, o autor sugere oferecer aos alunos os meios para uma autonomia intelectual, sendo que para isso é preciso organizar o ensino de matemática privilegiando a coordenação de registos.

> Para que os alunos tomem consciência das diferentes unidades de significado possíveis no conteúdo das representações e para que ele possa reconhecer as correspondências e as não correspondências entre duas representações diferentes de registro, é necessário tarefas de reconhecimento que não são exercícios nem problemas convencionais. Estas tarefas devem organizar a observação em paralelo das variações de representação em dois ou até três registros de cada vez (DUVAL, 2013, p.156)

Nesse contexto, explorando as potencialidades das tecnologias digitais, tais como fornecer novas formas de olhar para objetos matemáticos, propiciar *feedback* imediato e evidenciar as representações conectadas dinamicamente, propomos algumas características que acreditamos que um livro dinâmico de matemática deveria conter para, dentre outras possibilidades, permitir o desenvolvimento da coordenação entre os diversos registros de representação.

2. Livro Dinâmico de Matemática

2.1 O que é?

Levando em consideração as recomendações da Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval e as potencialidades da plataforma GeoGebra para a produção de livros, tais como textos, imagens, *applets*, vídeos, questões, web, arquivos em pdf foram produzidos materiais (NOBRIGA, 2017; LEMKE, 2017) com características de um "Livro dinâmico de Matemática".

O Livro Dinâmico de Matemática não pode ser confundido como um livro digital de matemática. Ele tem características que o diferencia dos livros digitais clássicos. Uma característica fundamental desse tipo de livro está no fato de se integrarem dinamicamente, numa mesma página, as diferentes representações dos objetos da Matemática. Ou seja, quando se está explorando um objeto matemático, as diferentes representações desse objeto não apenas aparecem simultaneamente, mas se apresentam conectadas. Por exemplo, ao se explorar um teorema, os registros de representações linguística, simbólica e visual estão conectados de forma que quando se altera alguma representação, as outras também se alteram, adequando-se às modificações. Com isso, espera-se poder criar condições para atender a recomendação feita por Duval (2018, p.12) em que ele diz "é preciso construir situações de aprendizagem nas quais os alunos possam comparar as variações de conteúdo das representações em um registro A com variações correlatas de conteúdo das representações em um registro B" e com isso poder ajudar o estudante a perceber qual a relação que existe entre as diferentes representações.

Para que se possa entender melhor o que é a integração dinâmica das representações é preciso entender antes o que estamos considerando como "dinâmico". Tal termo tem a ver com algo que se modifica de maneira contínua. No contexto dos *softwares* de Geometria Dinâmica (GD) o conceito está relacionado com o princípio de manipulação direta. De acordo com Bellemain (2001) tal princípio permite ao usuário a sensação de agir direta e livremente sobre a representação do objeto e controlar imediatamente os efeitos dessa ação. Com o auxílio do *mouse*, pode-se arrastar ou manipular diferentes representações e visualizar os efeitos de suas ações. Isso contribui para a percepção das relações entre as representações, formulação de conjecturas, identificação de contraexemplos etc. A partir desse conceito foram elaborados outros que estão presentes nos livros dinâmicos: Tratamento Dinâmico, Conversão Dinâmica e Demonstração Matemática Dinâmica (NÓBRIGA, 2019). Na sequência, mostraremos exemplos de partes de alguns livros dinâmicos produzidos e que evidenciam como tais conceitos são usados nesses livros.

2.2 Textos Dinâmicos, Demonstração Matemática Dinâmica e Exercícios dinâmicos.

Nos Livros Dinâmicos, as diferentes representações podem ser dinâmicas, inclusive as representações simbólicas e linguísticas. Isso é possível graças aos textos dinâmicos, ou seja, textos que mesclam diversos símbolos matemáticos e variáveis que podem ser alterados pelo usuário. Tais textos alteram seu conteúdo a partir da manipulação dos diferentes registros com os quais se relacionam. As figuras 3 e 4 apresentam exemplos de atividades do livro “Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra” (NÓBRIGA, 2017) que possuem tais características:

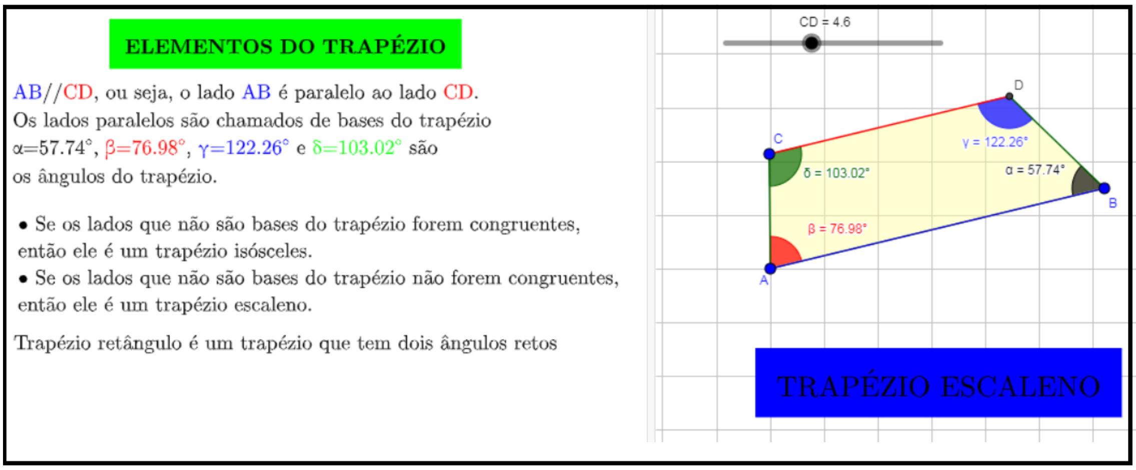


FIGURA 3: Elementos e classificação do trapézio.
FONTE: https://ggbm.at/dXfysuQV acesso em 17 de fevereiro de 2020

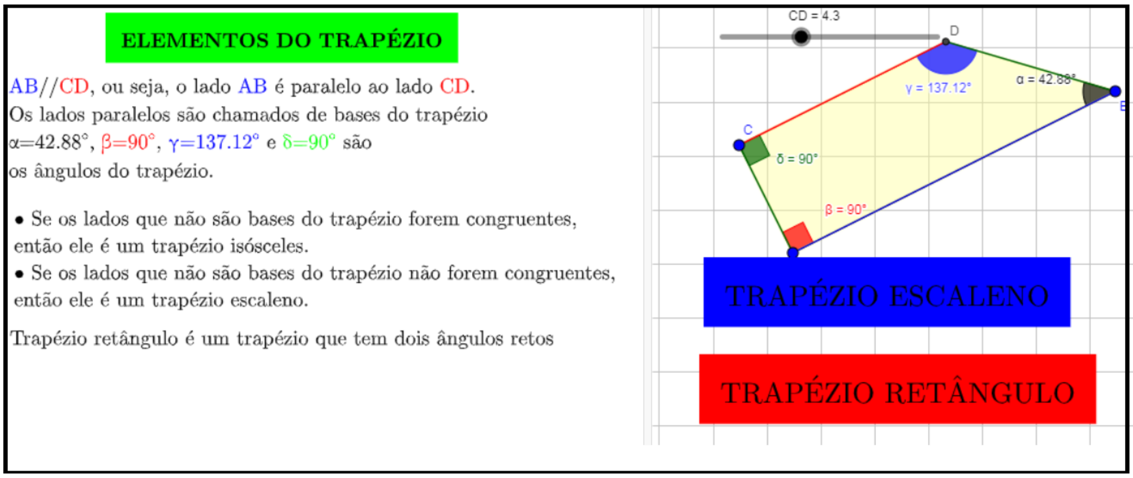


FIGURA 4 Trapézio retângulo.
FONTE: https://ggbm.at/dXfysuQV acesso em 17 de fevereiro de 2020

Na construção apresentada na Figura 3 é possível observar que unidades significantes de cada registro estão com mesmas cores. Ao se manipular os vértices A, B ou C, as medidas dos ângulos e lados do quadrilátero são alteradas tanto no registro geométrico, quanto no registro simbólico. Quando tal manipulação gera dois ângulos retos, aparece o texto "Trapézio retângulo" (Figura 4). A representação visual do trapézio pode sofrer várias transformações, permitindo visualizações em diferentes posições, inclusive com bases na horizontal ou não.

Além disso, é possível fazer cálculos automáticos dentro do próprio texto, usando valores ou medidas de objetos matemáticos que estão no *applet* GeoGebra. Os resultados dos cálculos podem ser alterados automaticamente se as medidas ou valores desses objetos forem alterados. Os textos dinâmicos são essenciais para a produção de Demonstrações Matemáticas Dinâmicas (NÓBRIGA, 2019), Exercícios dinâmicos e apresentação de definições ou propriedades.

Uma das grandes dificuldades em matemática é a compreensão das demonstrações ou justificativas de teoremas e propriedades. Acreditamos que essas dificuldades podem estar relacionadas com o fato de que, em livros de Matemática tradicionais, é comum vermos várias representações em uma mesma página: frases em língua natural, fórmulas, figuras geométricas, gráficos cartesianos etc. A conexão entre as representações fica a cargo do leitor. A ausência de orientação para coordenação entre as diferentes representações pode gerar dificuldades de aprendizagem. Buscando tentar superar tal dificuldade, Nóbriga (2019) propõe uma nova forma de se apresentar as demonstrações de propriedades e os teoremas. Tal forma foi chamada de Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. É preciso ficar claro que não se trata de um novo método para se provar teoremas e propriedades. Trata-se apenas de uma nova forma de se apresentar as demonstrações. Uma característica fundamental é o fato da demonstração não estar totalmente visível ao abrir a página. Ou seja, as representações não aparecem todas de uma vez, sendo apresentadas por etapas. Para que se possa ver cada etapa da demonstração, o estudante precisa movimentar um seletor, chamado de "etapas". Ao movimentá-lo, as representações vão aparecendo, gradativamente, de forma simultânea e conectadas dinamicamente com as outras formas de representação. As representações que tratam de um mesmo objeto podem possuir, por exemplo, a mesma cor para que estudante possa identificá-las melhor.

Outra característica importante é que quando se altera o caso de uma demonstração, o procedimento de justificativa também pode se alterar para se adequar ao novo caso. Um exemplo disso pode ser visto na demonstração da propriedade do ângulo inscrito na circunferência, no qual os alunos podem explorar os casos em que o centro está num lado do ângulo, no interior de um ângulo inscrito e no exterior de um ângulo inscrito, conforme evidenciadas pelas figuras 5, 6 e 7 que mostram partes dessa demonstração. Nesses exemplos, o aluno altera o ângulo inscrito, na representação visual, podendo observar nas representações simbólica e linguística as variações da demonstração para os três casos possíveis.

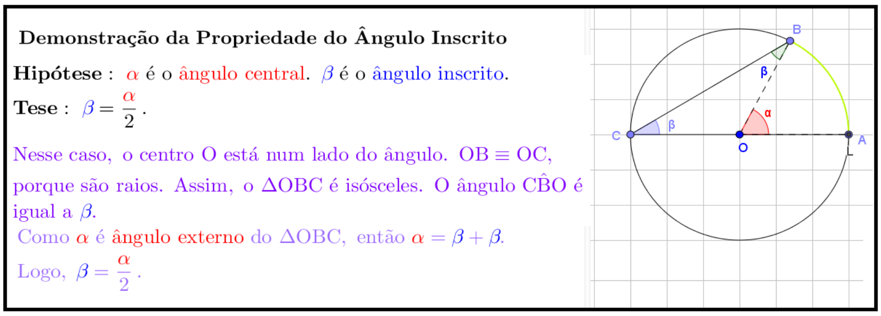


Figura 5: Ângulo inscrito em que o centro está num lado do ângulo
FONTE: https://ggbm.at/PybdQ59b acesso em 17 de fevereiro de 2020

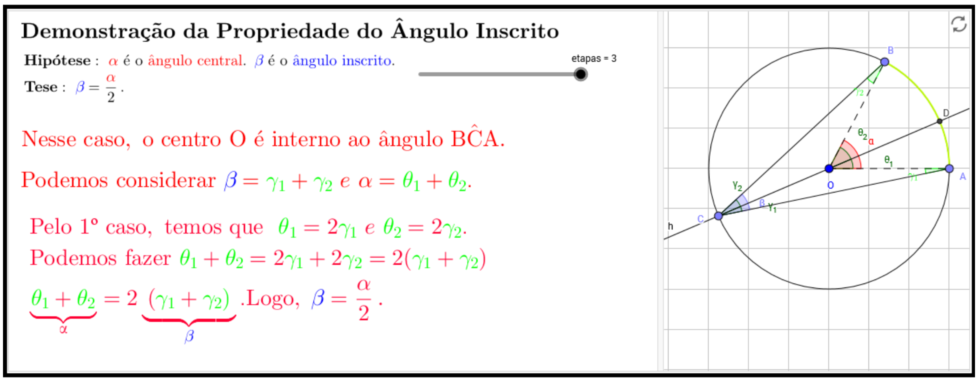


FIGURA 6–Ângulo inscrito com ângulo central no interior do ângulo inscrito
FONTE: https://ggbm.at/PybdQ59b acesso em 17 de fevereiro de 2020

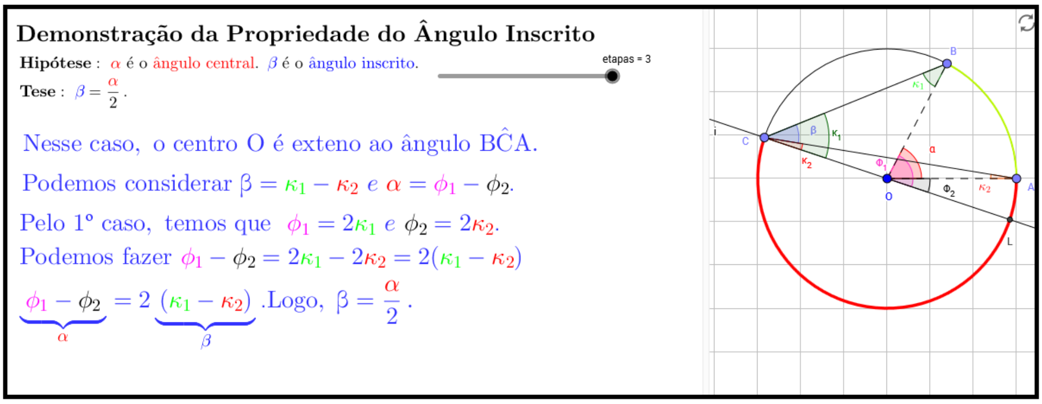


FIGURA 7–Ângulo inscrito com ângulo central no exterior do ângulo inscrito
FONTE: https://ggbm.at/PybdQ59b acesso em 17 de fevereiro de 2020

O livro dinâmico também possui exercícios resolvidos dinâmicos que podem ser tanto explorados pelos estudantes, quanto pelo professor ao abordar uma situação problema em sala de aula. Tratam-se de exemplos de exercícios resolvidos que têm características parecidas com a Demonstração Matemática Dinâmica. Nota-se também que uma das grandes dificuldades na compreensão dos exercícios resolvidos em livros impressos está no estabelecimento de uma ordem de leitura para as diferentes representações dos objetos matemáticos envolvidos. Assim, Nóbriga (2017) apresenta alguns exemplos de exercícios resolvidos dinâmicos. Assim como as Demonstrações Matemáticas Dinâmicas, eles também possuem o seletor “etapas” em que as representações vão aparecendo gradativamente quando ele é manipulado pelo estudante. A figura 8 apresenta um exemplo.

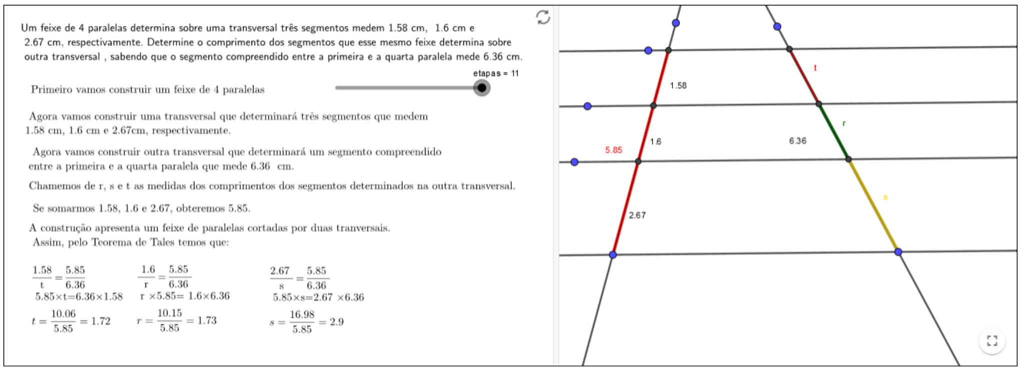


FIGURA 8: Exercício resolvido dinâmico
FONTE: https://www.geogebra.org/m/khreqsna acesso em 17 de fevereiro de 2020

O exemplo da figura 8 é um exercício com o seguinte enunciado: *Um feixe de 4 paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem 1,58 cm, 1,6 cm e 2,67 cm, respectivamente. Determine o comprimento dos segmentos que esse mesmo feixe determina sobre outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e a quarta paralela mede 6,36 cm*. Para resolver o exercício é natural fazer um esboço da representação figural dos dados contidos no problema. Trata-se da conversão das representações desse objeto do registro linguístico para o registro geométrico. Ao movimentar o seletor para a etapa 1, aparece a mensagem “Primeiro vamos construir um feixe de 4 paralelas”. Na etapa 2, aparece a representação visual das 4 retas paralelas. Ao continuar movimentando o seletor, os objetos vão aparecendo gradativamente. Ao final, quando todos os objetos estão na tela, o estudante e ou professor ainda podem fazer conjecturas, tais como, e se as transversais fossem paralelas, o procedimento para resolver seria o mesmo? Para responder, poderia alterar as posições das retas na representação visual e, consequentemente, por se tratar de um objeto com representações dinâmicas, os valores no enunciado do problema se alterariam, assim como as representações algébricas que contém as medidas e os cálculos. Espera-se que isso possa contribuir para uma melhor compreensão da resolução do exercício, pois possibilita aos alunos explorarem vários casos e não apenas um exercício particular, instigando os alunos a validarem ou refutarem suas conjecturas.

O Livro dinâmico também possui exercícios dinâmicos. Como eles, o aluno pode fazer, dinamicamente, várias alterações, seja visual ou simbólica, propiciando lhes um ambiente enriquecedor de simulação, auxiliando-o na mobilidade entre os diferentes registros de um objeto matemático. Em Lemke (2017) podem ser encontrados vários exemplos de exercícios dinâmicos, como por exemplo o sistema de coordenadas retangulares no espaço, curvas de níveis, exploração de superfícies, plano tangente, dentre outros, que podem ser explorados tanto pelos alunos, quanto pelo professor em suas aulas. Um exemplo é a atividade que envolve a "interpretação geométrica das derivadas parciais", na qual é possível mobilizar as representações algébrica e gráfica presentes na construção de um plano tangente a uma dada superfície, possibilitando as conexões com as derivadas parciais Nessa atividade é possível entrar com uma dada equação explícita de uma superfície, realizar as interseções da referida superfície com os planos paralelos aos planos coordenados do sistema cartesiano, sendo possível explorar as representações das curvas de interseção nos registros simbólico e gráfico, conforme ilustra a figura 9. Também é possível manipular a representação das retas tangentes à curva num dado ponto da superfície, obtendo assim duas retas concorrentes, denominadas de r_1 e r_2, nos registros simbólico e gráfico. Por meio do produto vetorial dessas retas poderá encontrar o vetor normal do plano tangente à superfície dada (LEMKE, 2017).

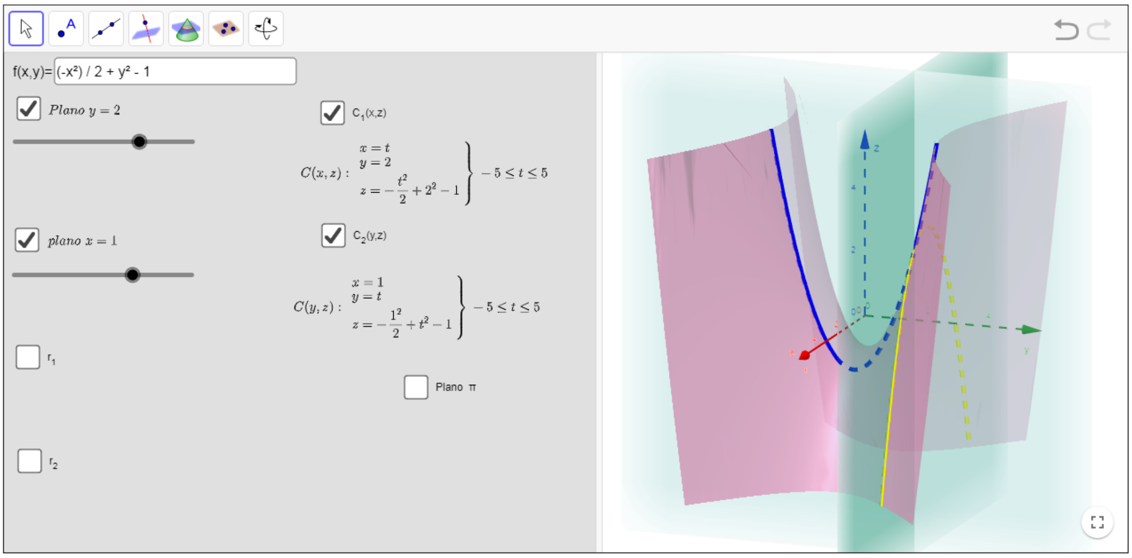


FIGURA 9: Exercício dinâmico: plano tangente
FONTE: https://www.geogebra.org/m/GdZ9wzW8#material/C2ym7MKV acesso em 22 de junho de 2020

Este material vem sendo utilizado por professores em aulas de Cálculo e alguns deles já perceberam as potencialidades do uso dos recursos dinâmicos (LEMKE, 2017 b). Isso fica evidenciado no depoimento de um professor que utilizou esse recurso para trabalhar com a interpretação geométrica das derivadas parciais:

> A equação do plano tangente depende das derivadas parciais da função. Então, ao desenvolver a teoria, eu sempre fazia a representação geométrica no quadro, usando um desenho padrão, um exemplo bem clássico de superfície, genérico. Não dava pra representar de uma forma bem visível tudo que acontecia nesses exemplos. O desenho vai ficando poluído na verdade. Com tanta curva de interseção, reta tangente, vetores diretores, mais o plano tangente, fica bem poluído. Então acho que isso, de alguma forma, podia prejudicar o entendimento dos alunos. E, com o uso do aplicativo, dava pra habilitar e desabilitar em cada momento. Quando eu queria a interseção com o plano x = 2, ia lá e habilitava a representação da curva. Quando eu fazia a interseção com o plano y igual a qualquer constante, eu primeiro desabilitava a representação anterior. Então o aplicativo permite limpar o que você já tinha usado pra explorar o novo conceito. E depois, juntando tudo novamente, pra ir formando o que se desejava. Tudo com apenas um único toque na tela. Ele permitiu usar funções mais complexas. Um dos exemplos que eu usei nas duas turmas foi a função cujo gráfico é uma sela de cavalo, que é bastante difícil de desenhar à mão livre, ainda mais no quadro-negro. Então esse foi mais um lado positivo do aplicativo. Ele permitiu usar, representar geometricamente, aquelas funções que só com quadro e giz eu não iria usar (SIPLE et al, 2016, p.128 e 129)

Percebe-se que o professor enfatiza algumas contribuições das características dos livros dinâmicos que foram descritas neste artigo. Acreditamos que que a produção e utilização de materiais com essas características dinâmicas, nos textos, nas demonstrações e nos exercícios resolvidos e propostos, possa colaborar tanto na prática docente do professor que ensina matemática quanto na aprendizagem dos alunos.

3 Compartilhamento no Grupo e *Feedbacks*

Em geral, o livro dinâmico é elaborado pensando sua utilização por meio da ferramenta "Grupo" da plataforma GeoGebra. Com esse recurso, o trabalho pode ser feito de forma presencial ou a distância. Para isso, professores e estudantes devem ter uma conta na plataforma GeoGebra. O professor deve criar um grupo[3] e inserir os estudantes. Após isso, precisará distribuir as atividades do livro no grupo.

Na plataforma, o estudante pode trabalhar de forma autônoma, mas é possível interagir com o professor, mesmo que esteja à distância. Pode fazer isso, usando as ferramentas de comunicação entre professor e aluno. Para isso, o estudante (ou o professor) deve clicar no "balãozinho[4]" que aparece do lado do *applet* ou da pergunta. Quando faz isso, aparece uma caixa em que podem escrever algo ou inserir imagens (figuras 10 e 11).

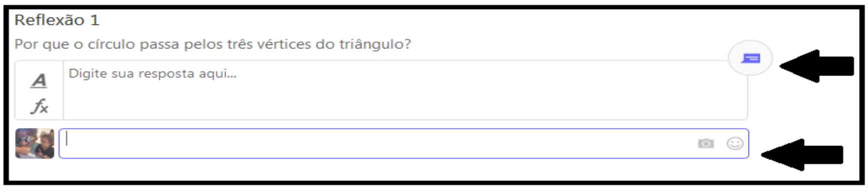


Figura 10: Caixa de mensagem da pergunta

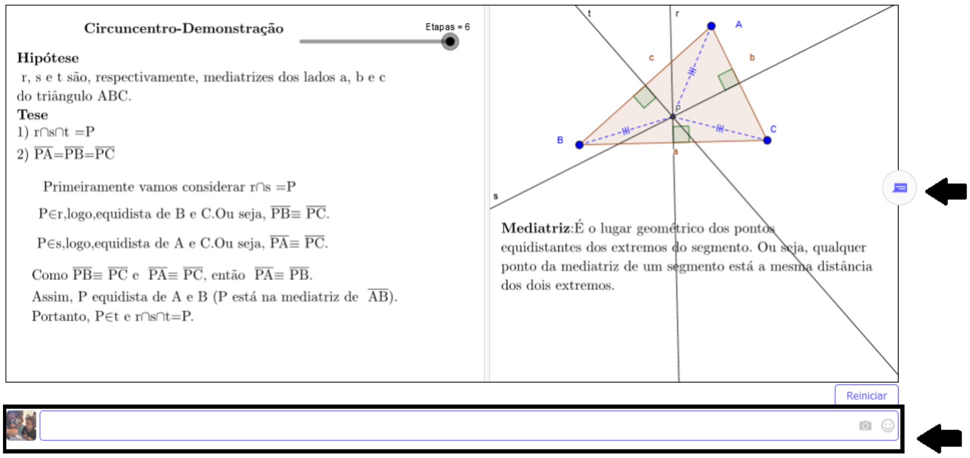


Figura 11-Caixa de mensagem do *applet*

Quando uma mensagem é enviada, o destinatário é notificado por e-mail. O professor ou estudante podem responder na própria plataforma e tudo fica registrado para posterior análise. Vejamos um exemplo na figura 12.

[3] O link https://www.geogebra.org/m/mq7QerYY contém orientações para criar grupo, inserir estudantes, distribuir atividade e dar feedbacks.
[4] Esse recurso só aparece quando a atividade foi distribuída dentro de um grupo

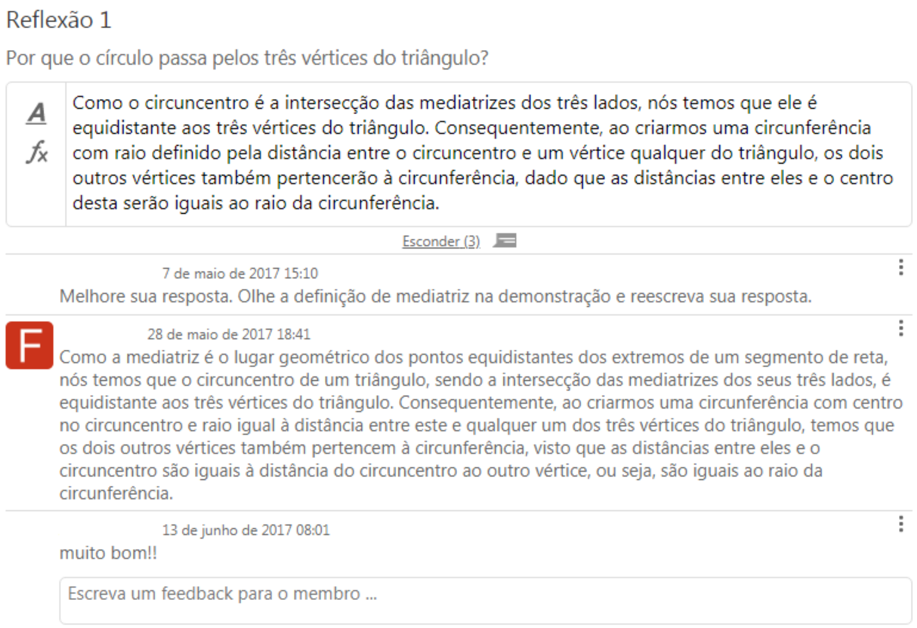


Figura 12: Comunicação registrada na plataforma GeoGebra

É importante que o estudante possa desenvolver a atividade de maneira autônoma, manipulando os *applets* para perceber as invariâncias, formular conjecturas e tentar explicá-las. Todavia, o *feedback* do professor é imprescindível. Ele deve analisar as respostas dos estudantes dentro da plataforma, buscando perceber se os estudantes de fato compreenderam.

Caso os estudantes não tenham acesso aos computadores ou a internet, o professor pode projetar a atividade e ir debatendo com eles. Pode pedir para um estudante manipular os *applets* e fazer as perguntas que estão na atividade. Também pode ir alterando o seletor "etapas" e perguntando para os estudantes o que eles acham que acontecerá na etapa seguinte.

Considerações Finais

Os livros dinâmicos de matemática precisam conter atividades com situações problemas, exercícios e demonstrações que possibilitem ao aluno, durante sua manipulação, explorar e coordenar as diferentes representações de um objeto matemático. Há ainda outras características que a tecnologia possibilita desenvolver nesse tipo de livro, tais como hiperlinks que articulam conteúdos em diferentes páginas do livro ou da web, os vídeos que podem ser inseridos nas páginas do livro dinâmico, sincronização das atividades com a ferramenta grupo que possibilita ao professor acompanhar a evolução das atividades realizadas pelos alunos e dar *feedbacks* e a possibilidade de compartilhamento do livro entre professores, podendo ser desenvolvido colaborativamente. Também tem a possibilidade do professor poder copiar e editar uma determinada atividade, adaptando ao contexto de sua prática. Tais recursos potencializam muito o livro.

No que diz respeito às limitações, há ainda recursos técnicos que precisam ser desenvolvidos para que possamos potencializar ainda mais o livro dinâmico, em especial no que diz respeito à tarefa realizada pelos alunos. Dentre elas destacamos o fato de não ser possível integrar o editor de textos e equações com o *applet* disponibilizado na ferramenta livro. Dessa forma, o estudante não consegue integrar, dinamicamente, um dado do *applet* no campo de resposta de uma pergunta. Destacamos também o fato do recurso Grupo não disponibilizar uma ferramenta para gerar notas. Entretanto, sabemos que há uma comunidade de técnicos, professores e pesquisadores trabalhando na evolução da plataforma e esperamos que em breve muito mais recursos estejam disponibilizados para que as atividades possam ser atualizadas e dessa forma sofrer evoluções, oriundas tanto da parte técnica como da utilização pedagógica que está sendo realizada em sala de aula. Algumas práticas utilizando um livro dinâmico de geometria foram feitas com estudantes do 1º semestre de um curso de licenciatura em Matemática. Em uma análise preliminar constatamos alguns indícios de contribuições, sobretudo no que diz respeito a possibilidade de integração simultânea dos diferentes registros de representações, atendendo as recomendações da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval e possibilidades de produção de materiais didáticos que atendam as perspectivas da modalidade de Ensino Híbrido. Outras práticas com um livro dinâmico de Cálculo foram realizadas com professores e alunos do Ensino Superior. Os resultados dessas experimentações evidenciaram que uma das potencialidades de se utilizarem os recursos do GeoGebra no Ensino e aprendizagem do cálculo é possibilidade de visualizar, conjecturar, simular, testar situações problemas da matemática, articulando diferentes tipos de representações dos objetos matemáticos (SIPLE et al., 2016)

Acreditamos que as orientações e exemplos apresentados nesse artigo podem auxiliar o trabalho de professores e pesquisadores que produzem materiais didáticos para o ensino de Matemática. Além disso, estamos otimistas de que ele pode contribuir para o aumento na produção e qualidade de livros de matemática gratuitos.

Referências

BARUFI, M. C. B.; BROLEZZI, A. **História da Matemática e Ensino de Cálculo: Reflexões sobre o Pensamento Reverso.** Guarapuava, PR: SBHMat, v. 1, p. 50, 2007.

BELLEMAIN, F. Geometria Dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. **International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design** (pp. 1314–1329). São Paulo: USP. 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CATANEO, V. I., RAUEN, F. J. Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira Matemática compreensão e prática. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.** [S.l.], v. 20, n. 2. 2018.

DALLEMOLE, J. J., GROENWALD, C. L. O. A Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. 2014.

DOLCE, O., POMPEU, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar (Geometria plana)**. São Paulo: Editora Atual. Volume 9. 2013.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A**. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2008, p. 11–33.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. (L. F. LEVY & M. R. SILVEIRA, Trans.) (1st ed.). São Paulo: Livraria da Física. 2009.

DUVAL, R. **Ver e Ensinar a Matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. (T. M. M. CAMPOS, Ed.) (Vol. 1). São Paulo: PROEM. 2011.

DUVAL, R. Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.** p. 49-161, 2013.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, 11(2), 01-78, 2016.

DUVAL, R. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 13, n. 2, p. 1-27, dez. 2018.

NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v.15, n.1: pp.1-21. 2019.

NÓBRIGA, J. C. C. Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra. Blumenau: Livre. 2017. [online] https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7. Acesso em 24 de junho de 2020.

LEMKE, R. **Funções reais de duas variáveis e GeoGebraBook: recursos dinâmicos para o ensino de Cálculo**. Produto Educacional (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2017. [online] https://www.geogebra.org/m/GdZ9wzW8. Acesso em 24 de junho de 2020.

LEMKE, R. **Funções reais de duas variáveis e GeoGebra: um livro dinâmico para o ensino de Cálculo.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2017b.

SANTOS, A. T. C. **O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GEOGEBRA**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo SP, 2011.

SIPLE,I.Z.; LEMKE, R. ; SANTOS, L. M. ; MANDLER, M. L. TIC na Prática Docente: o olhar de um Professor de Cálculo Diferencial e Integral. **Revista Docência do Ensino Superior**, v. 6, p. 115-134, 2016.