



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i3p015-029>

Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra

Investigating plane geometry theorems with GeoGebra

RODRIGO CESAR LAGO ¹
RUDIMAR LUIZ NÓS ²

RESUMO

Motivados pela necessidade de construções com régua e compasso na demonstração de teoremas geométricos, apresentamos neste trabalho investigações de alguns teoremas geométricos abordados em cursos de geometria plana na Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat. Investigamos, empregando o GeoGebra, um software gratuito de geometria dinâmica, teoremas geométricos selecionados pela abrangência de aplicações e que permitem a construção de animações relevantes, sendo que as animações geradas nos processos investigativos, assim como os roteiros que possibilitam a construção das mesmas, foram disponibilizados no site oficial do GeoGebra. Concluímos que as investigações com o GeoGebra aprimoram as concepções envolvidas nas construções com régua e compasso e são relevantes porque complementam/enriquecem as provas formais dos teoremas analisados e, também, as referências bibliográficas básicas empregadas nas disciplinas de geometria plana e construções geométricas do Curso de Licenciatura em Matemática e do Profmat.

Palavras-chave: teorema de Simson-Wallace; teorema de Steiner-Lehmus; investigações geométricas dinâmicas.

ABSTRACT

Motivated by the necessity of constructions using ruler and compass in the demonstration of geometric theorems, we present in this work investigations of some geometric theorems covered in plane geometry courses in Mathematics Degree and in Professional Master in Mathematics in National Network - Profmat. We investigated using GeoGebra, a free software of dynamic geometry, geometric theorems selected by the scope of applications and that allow the construction of relevant animations, and the animations generated in the investigative processes, as well as the scripts that enable their construction, were made available on the official GeoGebra website. We conclude that the investigations with GeoGebra improve the conceptions involved in constructions with ruler and compass and are relevant because they complement/enrich the formal proofs of the analyzed theorems and, also, the basic bibliographic references used in courses of plane geometry and geometric constructions of Mathematics Degree and Profmat.

Keywords: Simson-Wallace theorem; Steiner-Lehmus theorem; geometric dynamic investigations.

Introdução

Geralmente, a prova formal de um teorema de geometria plana requer construções geométricas auxiliares, as quais são, algumas vezes, complexas (GREITZER; COXETER, 1967; LAGO, 2018; NETO, 2013; POSAMENTIER; SALKIND, 1996). Ao se usar régua e compasso para as construções auxiliares, a construção principal pode ficar “poluída” de forma a comprometer a compreensão das hipóteses e da tese do teorema a ser demonstrado. No GeoGebra (GEOGEBRA, 2020), as construções auxiliares feitas na Janela de Álgebra podem ser omitidas na Janela de Visualização, deixando a construção final “limpa”, ou seja, livre de excessos que comprometam a comprovação visual do teorema que está sendo investigado. A Figura 1 compara as construções necessárias à demonstração do Teorema 1, conhecido como recíproco de Simson-Wallace, com régua e compasso e no GeoGebra.

¹ Secretaria de Estado da Educação do Paraná – rodrigoclaro@gmail.com

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Curitiba – rudimarnos@utfpr.edu.br

Teorema 1. Em um triângulo ABC , se os pés das perpendiculares baixadas de um ponto P , não pertencente às retas suportes dos lados de ABC , aos três lados de ABC são colineares, então o ponto P pertence à circunferência circunscrita a ABC .

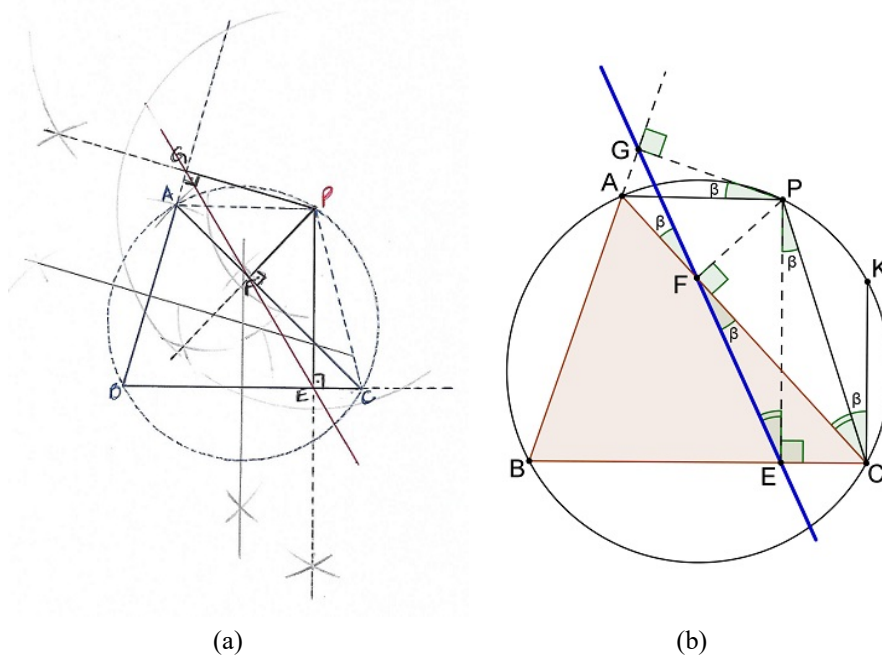


FIGURA 1: Investigação do Teorema 1: (a) régua e compasso; (2) GeoGebra

FONTE: Os autores

O professor de matemática da Educação Básica pode substituir provas formais, particularmente em geometria, por provas sem palavras (*proofs without words*) (NELSEN, 1993; NÓS; FERNANDES, 2018; NÓS; FERNANDES, 2019) ou por demonstrações dinâmicas (NÓBRIGA, 2019). Para estas, o professor pode empregar *softwares* de geometria dinâmica, como, por exemplo, o aplicativo gratuito GeoGebra. Para Amado, Sanchez e Pinto (2015):

Um dos aspectos que merece particular destaque no trabalho com o GeoGebra são as figuras que se obtêm em contraposição com as atividades geométricas apenas levadas a cabo com lápis e papel. Facilmente se podem adivinhar as dificuldades de compreensão que podem surgir quando os alunos tomam como referência um desenho e não uma figura. Um ambiente de geometria dinâmica permite superar definitivamente essas dificuldades. As figuras ou construções feitas em ambientes de geometria dinâmica comportam-se de acordo com as leis da geometria, isto é, refletem todas as consequências das propriedades que as definem (p. 646);

[...] é fundamental estimular os alunos para demonstrações mais formais, com caráter explicativo e incentivá-los a utilizar raciocínios dedutivos e a justificar o surgimento de novos resultados na busca da compreensão. Deste modo, podemos concluir que os ambientes de geometria dinâmica, como o GeoGebra, podem constituir um forte aliado da demonstração [...] (AMADO, SANCHEZ E PINTO, 2015, p. 655).

Demonstrações dinâmicas são também importantes no Ensino Superior, como no Curso de Licenciatura em Matemática e também na Pós-Graduação, como no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, e as mesmas podem ocorrer tanto antes quanto depois da prova formal, eviden-

ciando a importância de cada uma das hipóteses na construção da tese. Quanto à Licenciatura em Matemática, Zengin (2017) concluiu que o software GeoGebra é uma ferramenta eficaz para melhorar as atitudes dos candidatos a professor de matemática em relação à demonstração de propriedades e teoremas. Já em relação à Pós-Graduação, onde se insere o Profmat, Oliveira e Gonçalves (2019) realizaram um mapeamento literário junto à Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), buscando por obras catalogadas no período de 2010 a 2018 que abordassem o uso do GeoGebra em demonstrações no ensino de matemática. Nessa pesquisa, constataram um número muito pequeno de trabalhos na área de educação que abordam o GeoGebra como ferramenta de demonstração em matemática.

Dessa forma, apresentamos neste trabalho algumas investigações dinâmicas, efetuadas com o GeoGebra, de teoremas geométricos abordados em disciplinas de geometria plana, tanto na Licenciatura em Matemática quanto no Profmat. Os teoremas selecionados foram divididos em dois grupos: Simson-Wallace e Steiner-Lehmus. As provas formais dos teoremas investigados estão disponíveis em Lago (2018), sendo que as animações provenientes dos processos investigativos, assim como os roteiros que possibilitam a construção das mesmas, foram disponibilizadas pelos autores no site oficial do GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/materials>.

1. Simson-Wallace

1.1 Quadriláteros inscritíveis

Teorema 2. *Um quadrilátero é inscritível em uma circunferência se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.*

A Figura 2(a) ilustra uma construção realizada no GeoGebra de um quadrilátero onde um dos vértices não pertence à circunferência que passa pelos outros três vértices. O GeoGebra permite que se mova o vértice não pertencente à circunferência e que se verifique a soma dos ângulos opostos quando esse vértice pertence (ou não pertence) à circunferência - Figura 2(b). A investigação dinâmica do Teorema 2 pode ser empregada pelo professor de matemática na Educação Básica. Disponibilizamos uma animação dessa investigação com roteiro descritivo na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/u8eqt3w8>.

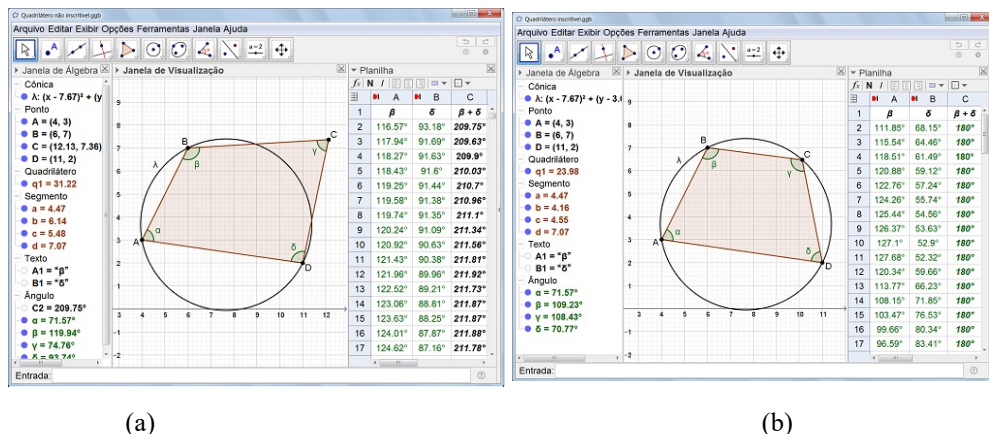


FIGURA 2: Investigação do Teorema 2 no GeoGebra: soma dos ângulos opostos de um quadrilátero quando um vértice não pertence (a) ou pertence (b) à circunferência que passa pelos outros três vértices.

FONTE: Nós e Lago (2020)

1.2 Triângulo pedal e a reta de Simson-Wallace

Definimos, inicialmente, o triângulo pedal e a reta de Simson-Wallace, e depois investigamos o Teorema 3, denominado Teorema de Simson-Wallace, assim como algumas propriedades da reta de Simson-Wallace.

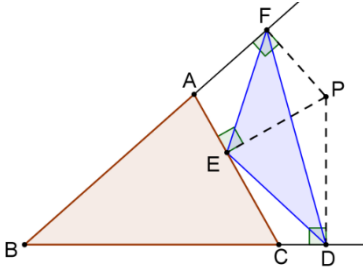


FIGURA 3: Triângulo pedal DEF do triângulo ABC

FONTE: Os autores

Definição 1. Sejam ABC um triângulo qualquer, P um ponto não pertencente às retas suportes dos lados de ABC , e D , E e F os pés das perpendiculares baixadas de P sobre as retas suportes dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. O triângulo de vértices D , E e F é o triângulo pedal de P em relação a ABC .

A Figura 3 ilustra o triângulo pedal segundo a Definição 1. Se D , E e F são colineares, o triângulo pedal é degenerado e a reta que passa por esses três pontos é denominada reta de Simson Wallace (de polo P em relação ao triângulo ABC), em homenagem aos matemáticos escoceses Robert Simson (1687-1768) e William Wallace (1768-1843).

Teorema 3. Sejam um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre as retas suportes dos lados de ABC . Se o ponto P pertence à circunferência que circunscreve o triângulo ABC , então o triângulo pedal de P em relação a ABC é degenerado.

A Figura 4(a) ilustra a construção do triângulo pedal de um ponto P em relação a um triângulo ABC . O GeoGebra permite que se mova o ponto P e se observe quando o triângulo pedal é degenerado e, conseqüentemente, a determinação da reta de Simson-Wallace - Figura 4(b). O roteiro das construções do triângulo pedal e da reta de Simson-Wallace, bem como uma animação dinâmica dessa construção, foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/t33pqmf3>

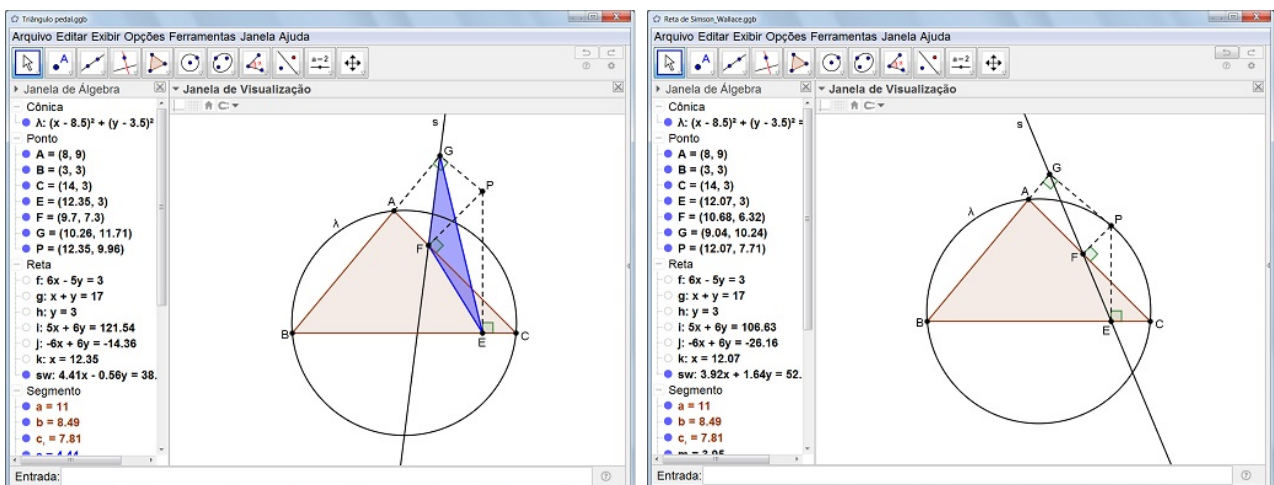


FIGURA 4: Investigação do Teorema 3 no GeoGebra: (a) construção do triângulo pedal; (b) a reta de Simson-Wallace

FONTE: Os autores

1.3. Propriedades da reta de Simson-Wallace

1.3.1 Ortocentro do triângulo inscrito

Definição 2. Ortocentro é o ponto onde se intersectam as três alturas de um triângulo, isto é, as perpendiculares traçadas de cada vértice do triângulo aos lados opostos ou aos seus prolongamentos.

Teorema 4. Se H é o ortocentro de um triângulo ABC e P é um ponto da circunferência circunscrita a ABC , então o ponto médio M do segmento \overline{PH} pertence à reta de Simson-Wallace do triângulo ABC com polo em P .

O GeoGebra permite que se mova o polo P da reta de Simson-Wallace sobre a circunferência que circunscribe o triângulo ABC e se observe o segmento \overline{PH} e seu ponto médio M , onde H é o ortocentro de ABC . A Figura 5 ilustra essa construção, cujo roteiro e a animação gerada por ele foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/f8peu43e>

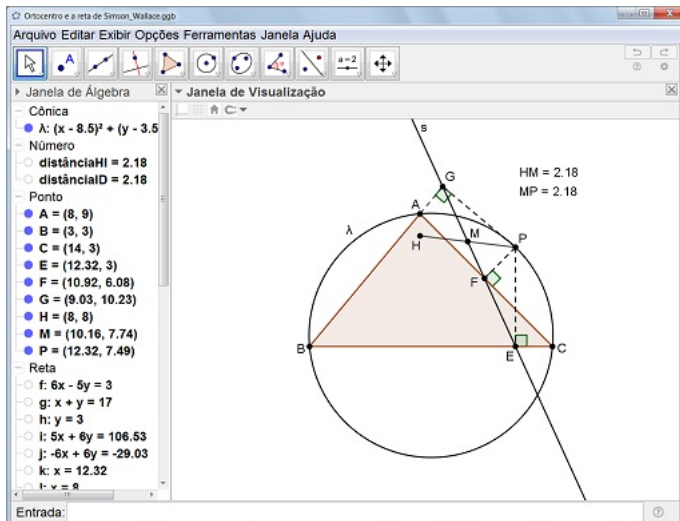


FIGURA 5: Investigação do Teorema 4 no GeoGebra: o ponto médio de um segmento e a reta de Simson-Wallace
FONTE: Os autores

1.3.2 Ângulo entre duas retas de Simson-Wallace

Teorema 5. Se P e J são dois pontos pertencentes à circunferência circunscrita a um triângulo ABC , com A pertencente ao menor arco PJ , então o ângulo entre as retas de Simson-Wallace que possuem os pontos P e J , como polos, é congruente ao ângulo inscrito PBJ do menor arco PJ .

A Figura 6(a) ilustra a construção de duas retas de Simson-Wallace. O GeoGebra possibilita que se observe a congruência entre o ângulo de duas retas de Simson-Wallace e o ângulo inscrito no menor arco determinado pelos polos dessas retas – Figura6(b). O roteiro dessa investigação dinâmica e a animação gerada pelo roteiro foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/g2xq9bhh>

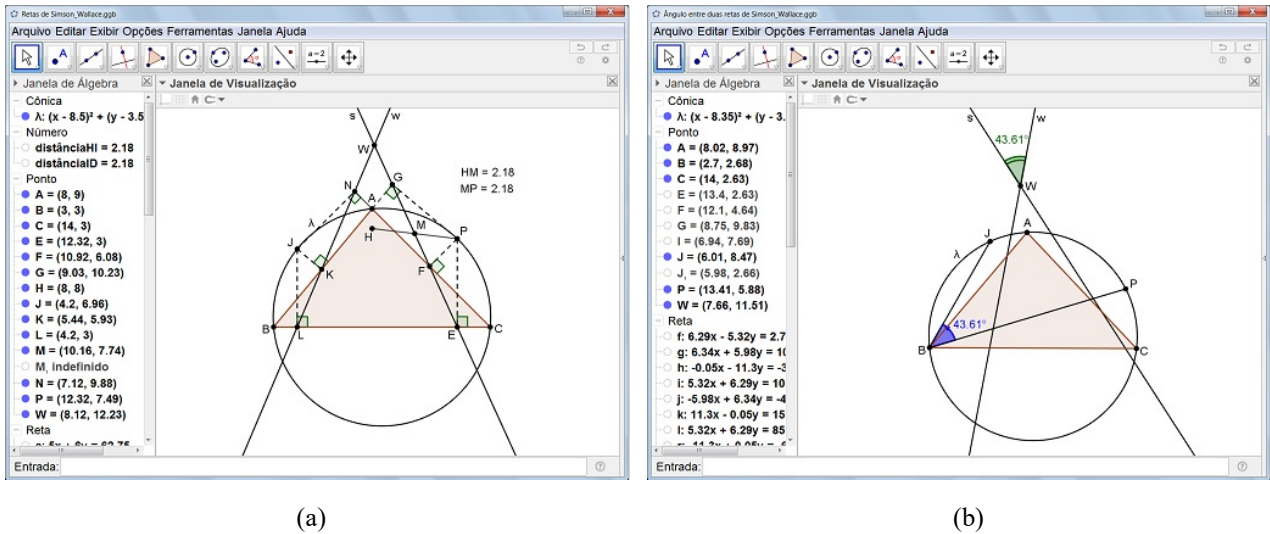


FIGURA 6: Investigação do Teorema 5 no GeoGebra: (a) construção das retas de Simson-Wallace com polos em P e J; (b) ângulo entre as retas de Simson-Wallace com polos em P e J.

FONTE: Os autores

Corolário 1. *Duas retas de Simson-Wallace para um determinado triângulo são perpendiculares se, e somente se, seus polos estão em extremidades opostas de um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.*

A Figura 7 ilustra a construção de duas retas de Simson-Wallace perpendiculares. No GeoGebra, podemos mover os polos P e J, colocando-os em posições diametralmente opostas e verificando, dessa forma, a condição de perpendicularidade das duas retas de Simson-Wallace. Disponibilizamos uma animação dessa investigação com roteiro descritivo na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/u8cdwwjm>.

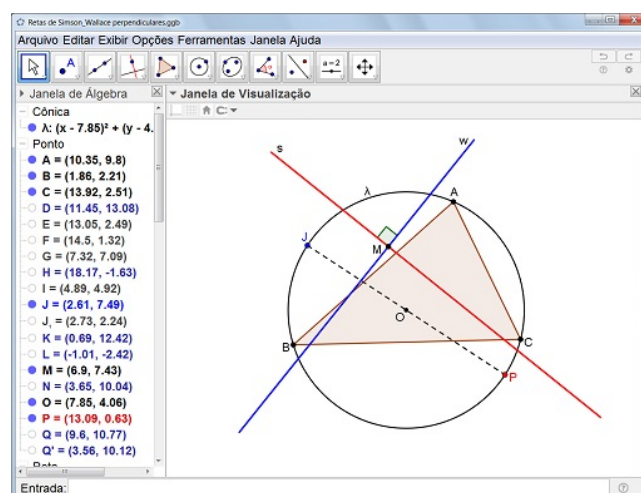
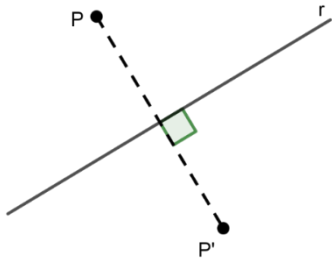


FIGURA 7: Investigação do Corolário 1 no GeoGebra: construção das retas de Simson-Wallace com polos diametralmente opostos.

FONTE: Os autores

1.3.3 A reta de Steiner



Definição 3. Um ponto P' é simétrico do ponto P em relação à reta r se r é a mediatriz de $\overline{PP'}$. A Figura 8 ilustra a simetria de um ponto em relação a uma reta.

FIGURA 8: Reflexão de um ponto em torno de uma reta: P' simétrico a P em relação à r

FONTE: Os autores

Teorema 6. Os pontos simétricos de um ponto P , pertencente à circunferência circunscrita a um triângulo ABC , em relação às retas suportes dos lados de ABC , são colineares e pertencem à reta de Steiner, paralela à reta de Simson-Wallace com polo em P .

A Figura 9 ilustra a construção da reta de Steiner no GeoGebra. No aplicativo, o ponto P pode ser movido, juntamente, com os pontos simétricos de P em relação às retas suportes dos lados do triângulo ABC , observando-se o paralelismo entre as retas de Simson-Wallace e de Steiner. Uma animação dessa investigação, assim como o roteiro que dá origem à mesma, foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/wbpegzar>.

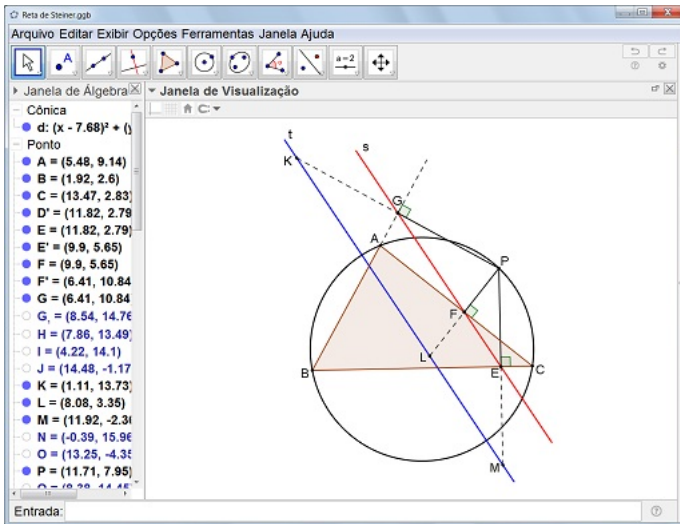


FIGURA 9: Investigação do Teorema 6 no GeoGebra: as retas paralelas s de Simson-Wallace e t de Steiner

FONTE: Os autores

1.4. Aplicações da reta de Simson-Wallace

1.4.1 A desigualdade de Ptolomeu

Teorema 7. Se $ABCD$ é um quadrilátero de diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , então

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} \leq \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}, \quad (1)$$

ocorrendo a igualdade, somente se o quadrilátero $ABCD$ estiver inscrito em uma circunferência.

As Figuras 10(a) e 10(b) ilustram, respectivamente, a igualdade e a desigualdade expressas na relação (1). No GeoGebra, ao movermos o ponto D , observamos o que ocorre com a relação (1) quando D pertence ou não à circunferência que circunscreve o triângulo ABC . Uma animação da investigação da desigualdade de Ptolomeu, com roteiro descritivo, foi disponibilizada pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/yf7ttnh>.

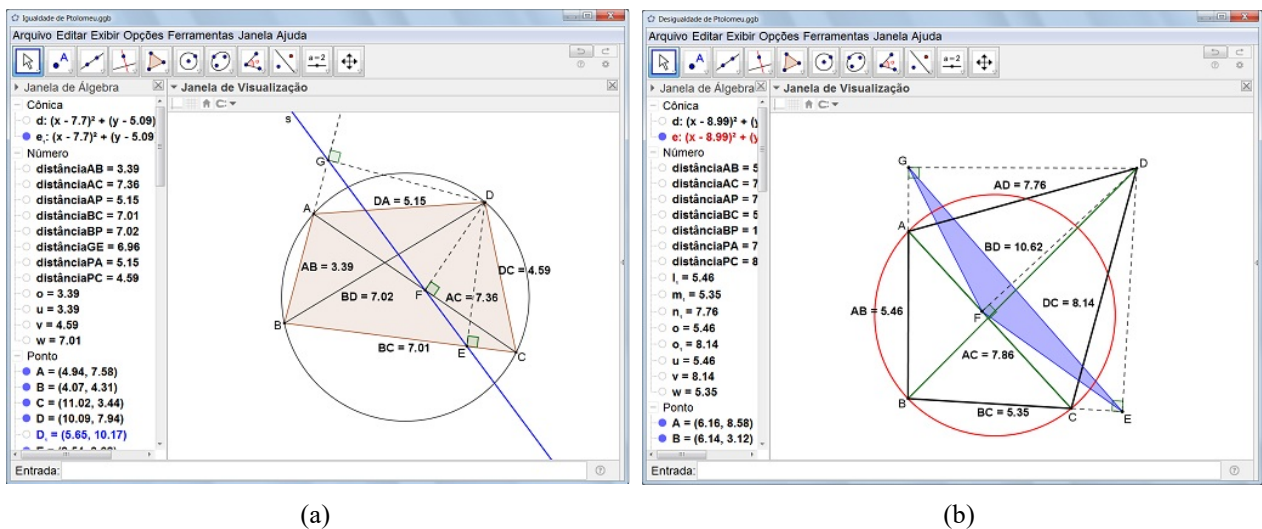


FIGURA 10: Investigação do Teorema 7 no GeoGebra: (a) a igualdade de Ptolomeu e a reta de Simson-Wallace; (b) a desigualdade de Ptolomeu e o triângulo pedal.

FONTE: Os autores

1.4.2 A circunferência de nove pontos

Teorema 8. *Em um triângulo ABC , os pés das alturas, os pontos médios dos lados e os pontos médios dos segmentos que têm por extremidades os vértices e o ortocentro de ABC , pertencem a uma mesma circunferência, denominada circunferência de nove pontos.*

A Figura 11 ilustra, no GeoGebra, a construção da circunferência de nove pontos relativa ao triângulo ABC , onde D , E e F são os pés das alturas, M , M_1 e M_2 são os pontos médios dos lados, P , Q e R são os pontos médios dos segmentos \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} , respectivamente, e H é o ortocentro de ABC . A circunferência de nove pontos também é denominada circunferência de Feuerbach, em homenagem ao geômetra alemão Karl Wilhelm von Feuerbach (1800-1834). O roteiro descritivo da construção da circunferência de nove pontos e uma animação relativa à variação de um ângulo interno foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/fe3ap95d>.

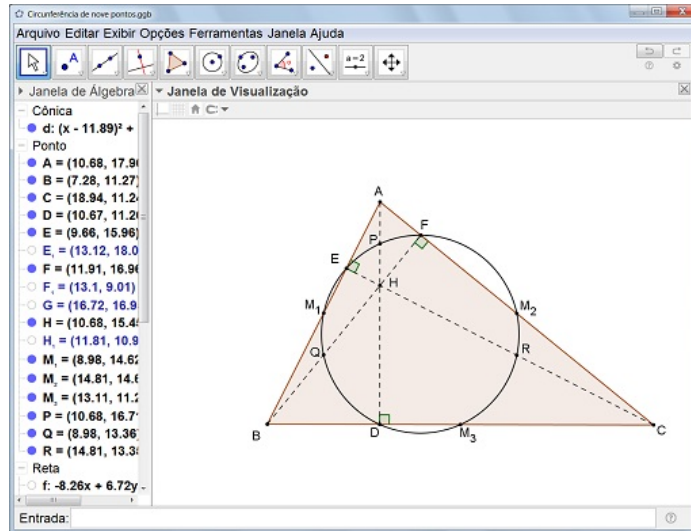


FIGURA 11: Investigação do Teorema 8 no GeoGebra: a circunferência de nove pontos

FONTE: Os autores

Teorema 9. *Se ABC é um triângulo e os pontos P e Q são as extremidades de um diâmetro da circunferência circunscrita a ABC, então as retas s e w de Simson-Wallace do triângulo ABC com polos em P e Q, respectivamente, intersectam-se na circunferência de nove pontos do triângulo ABC.*

Na Figura 12, ao movermos no GeoGebra os pontos P e Q, mantendo-os diametralmente opostos, observamos o ponto W, intersecção das retas de Simson-Wallace com polos em P e Q, percorrer a circunferência de nove pontos do triângulo ABC. Uma animação da investigação das retas perpendiculares de Simson-Wallace, com roteiro descritivo, foi disponibilizada pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/fkbrtgsa>.

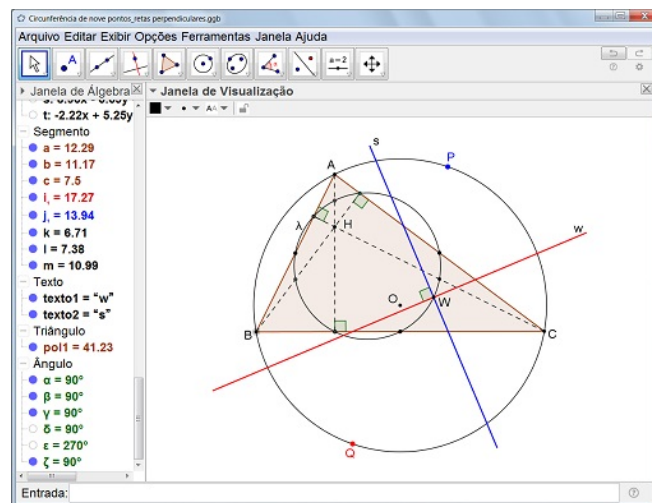


FIGURA 12: Investigação do Teorema 9 no GeoGebra: intersecção W das retas perpendiculares s e w de Simson-Wallace na circunferência de nove pontos λ

FONTE: Os autores

Lema 1. *Se α é uma circunferência de raio $2R$ e centro em O , X é um ponto de α e P é um ponto interior a α , então o lugar geométrico dos pontos M que são pontos médios dos segmentos \overline{PX} , quando X percorre α , é uma circunferência β de raio R e centro em N , ponto médio de \overline{OP} .*

Podemos observar no GeoGebra a trajetória percorrida pelo ponto M quando movemos o ponto X sobre a circunferência centrada em O de raio $2R$. A Figura 13 ilustra essa construção, cujo roteiro e a animação gerada pelo mesmo foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/bwuxpyzv>.

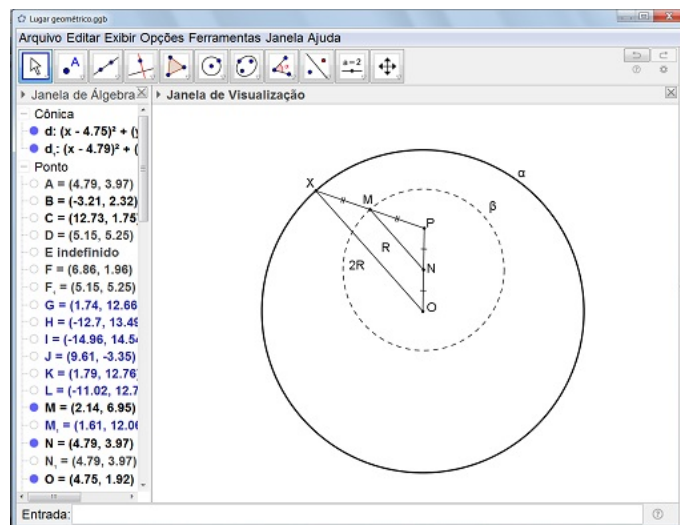


FIGURA 13: Investigação do Lema 1 no GeoGebra: lugar geométrico dos pontos médios M do segmento \overline{PX} , onde X é um ponto da circunferência α e P é um ponto interior a α

FONTE: Os autores

Os Teoremas 10 e 11 são decorrentes do Lema 1.

Teorema 10. *A circunferência de nove pontos de um triângulo ABC é o lugar geométrico dos pontos médios M dos segmentos \overline{HX} , onde H é o ortocentro de ABC e X é um ponto qualquer da circunferência circunscrita a ABC .*

Teorema 11. *A medida do raio da circunferência de nove pontos de um triângulo ABC é igual à metade da medida do raio da circunferência que circunscreve ABC .*

No GeoGebra, movendo o ponto X pertencente à circunferência que circunscreve o triângulo ABC , observamos o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos \overline{HX} , sendo H o ortocentro do triângulo ABC , como ilustra a Figura 14. Uma animação dessa investigação, assim como o roteiro que dá origem à mesma, foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/a3dbrjmn>.

Já na Figura 15, podemos comparar o raio da circunferência de nove pontos de um triângulo ABC com o raio da circunferência circunscrita a ABC. O roteiro descritivo dessa construção e a animação gerada pelo mesmo foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/ct3v8bjv>.

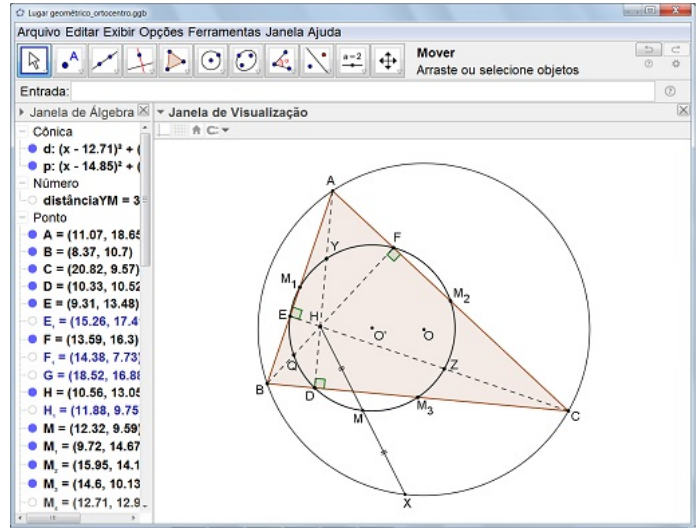


FIGURA 14: Investigação do Teorema 10 no GeoGebra: lugar geométrico dos pontos médios M do segmento \overline{HX} , onde H é o ortocentro do triângulo ABC e X é um ponto da circunferência que circunscreve ABC.

FONTE: Os autores

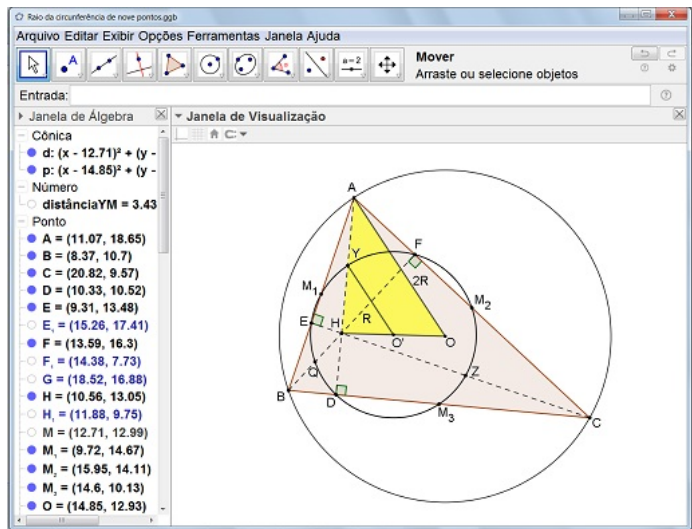


FIGURA 15: Investigação do Teorema 11 no GeoGebra: relação entre os raios da circunferência de nove pontos do triângulo ABC e da circunferência circunscrita a ABC.

FONTE: Os autores

1.4.3 Envelope das retas de Simson-Wallace

Definimos, primeiramente, uma curva hipociclóide para, em seguida, investigar o deltóide de Steiner.

Definição 4. A curva gerada por um ponto da circunferência (geratriz) que rola sem deslizar dentro de uma outra circunferência (diretriz) é denominada hipociclóide.

O deltóide de Steiner é uma curva hipociclóide (YOKOYAMA, 2002). No GeoGebra, movendo o ponto P sobre a circunferência que circunscreve um triângulo ABC e selecionando o rastro, determinamos todas as retas de Simson-Wallace com polo em P, ou seja, o envelope das retas de Simson-Wallace. Esse envelope define o deltóide de Steiner, como ilustra a Figura 16. Uma animação da investigação do envelope das retas de Simson-Wallace, com roteiro descritivo, foi disponibilizada pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/eujaegzk>.

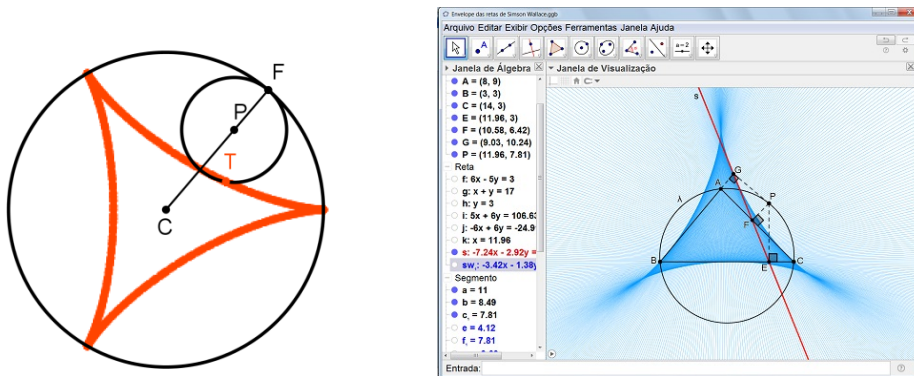


FIGURA 16: Deltóide de Steiner e o envelope das retas de Simson-Wallace no GeoGebra.

FONTE: Os autores

2. Steiner-Lehmus

Teorema 12. Se ABC é um triângulo qualquer, de base \overline{BC} e bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} tais que $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$, então o triângulo ABC é isósceles.

A Figura 17(a) ilustra a construção das bissetrizes de dois ângulos internos de um triângulo ABC qualquer. O GeoGebra possibilita que se verifique a medida das bissetrizes e dos lados e, dessa forma, se o triângulo construído é isósceles ou não - Figura 17(b).

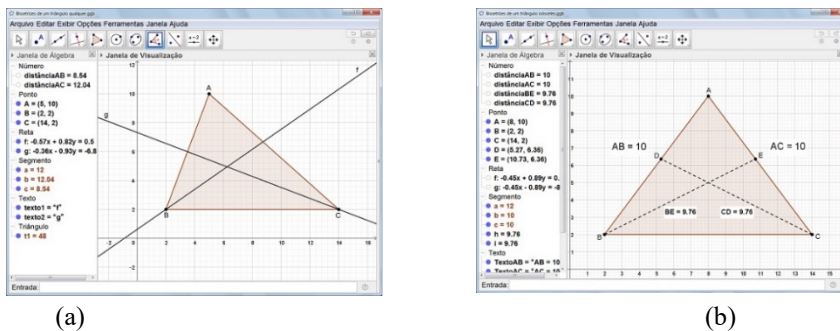


FIGURA 17: Investigação do Teorema 12 no GeoGebra: (a) construção das bissetrizes de um triângulo qualquer; (b) medida das bissetrizes e dos lados de um triângulo isósceles ABC.

FONTE: Nós e Lago (2020)

A investigação dinâmica do Teorema 12 pode ser empregada pelo professor de matemática na Educação Básica. O roteiro dessa investigação e uma animação gerada pelo mesmo foram disponibilizadas pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/j2zn42d6>.

Há várias estratégias para se provar, formalmente, o Teorema 12 (GARDNER, 2013; LAGO, 2018). O GeoGebra pode ser empregado para investigar essas diferentes formas de demonstração, bem como para investigar a demonstração da forma completa do teorema de Steiner-Lehmus (HAJJA, 2001), assim denominado em homenagem ao matemático suíço Jacob Steiner (1796-1863) e ao matemático alemão Daniel Christian Ludolph Lehmus (1780-1863).

Teorema 13 (Steiner-Lehmus completo). *Se ABC é um triângulo qualquer, com ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , então:*

i) *as bissetrizes internas de \hat{B} e de \hat{C} são congruentes se, e somente se, $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$;*

ii) *as bissetrizes externas de \hat{B} e de \hat{C} são congruentes se, e somente se, $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ ou*

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right);$$

iii) *a bissetriz externa de \hat{B} e a bissetriz interna de \hat{C} são congruentes se, e somente se,*

$$\cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right).$$

Assim, dado um triângulo ABC de vértices com coordenadas B(0, 0), C(1, 0) e A(x, y), o lugar geométrico dos pontos A do plano, tais que um par de bissetrizes de ABC, uma de \hat{B} e outra de \hat{C} , internas e/ou externas, são congruentes é dado pela união da curva

$$\begin{aligned} &16x^{11}y - 88x^{10}y + 82x^9y^3 + 192x^9y - 369x^8y^3 - 204x^8y + 168x^7y^5 + 656x^7y^3 + \\ &+ 96x^7y - 588x^6y^5 - 574x^6y^3 + 172x^5y^7 + 808x^5y^5 + 226x^5y^3 - 16x^5y - 430x^4y^7 + \\ &- 550x^4y^5 + 9x^4y^3 + 4x^4y + 88x^3y^9 + 416x^3y^7 + 164x^3y^5 - 40x^3y^3 - 132x^2y^9 + \\ &- 194x^2y^7 + 10x^2y^5 + 10x^2y^3 + 18xy^{11} + 72xy^9 + 34xy^7 - 24xy^5 + 2xy^3 - 9y^{11} + \\ &- 14y^9 + y^7 + 6y^5 - y^3 = 0 \end{aligned}$$

com o eixo Ox (triângulo degenerado) e com $x = 1/2$, mediatriz do segmento \overline{BC} (MONTES; RECIO, 2014; NÓS; LAGO, 2019). A Figura 18, construída no GeoGebra, ilustra esse lugar geométrico, representativo do Teorema 13. Uma animação da investigação desse lugar geométrico, com roteiro descritivo, foi disponibilizada pelos autores na página oficial do GeoGebra, no endereço:

<https://www.geogebra.org/m/xs3dgd6>.

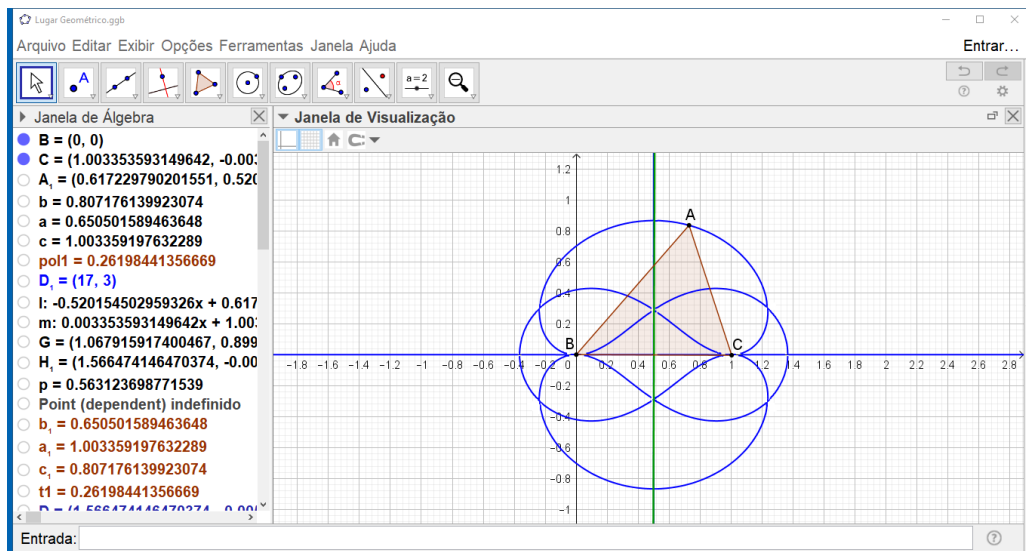


FIGURA 18: Investigação do Teorema 13 no GeoGebra: lugar geométrico dos pontos A do plano, tais que o triângulo ABC, com $B(0, 0)$ e $C(1, 0)$, tem duas bissetrizes, uma de \hat{B} e outra de \hat{C} , congruentes.

FONTE: Os autores

Considerações finais

Fundamentados em estudos sobre o uso de aplicativos de geometria dinâmica como ferramenta de demonstração em matemática (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015; MOD, 2016; NÓBRIGA, 2019; OLIVEIRA; GONÇALVES, 2019; ZENGİN, 2017), apresentamos neste trabalho investigações de teoremas de geometria plana efetuadas com o software GeoGebra. Na lista de teoremas que selecionamos para investigar, há teoremas geométricos elementares, abordados na Educação Básica, assim como teoremas avançados, abordados no Ensino Superior e na Pós-Graduação. A relevância do trabalho é evidenciada quando se compara as provas formais dos teoremas (LAGO, 2018) com as investigações, sendo que estas aprimoram as construções com régua e compasso e também enriquecem as referências empregadas nas disciplinas de geometria plana e/ou construções geométricas da Licenciatura em Matemática e do Profmat.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

- AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do GeoGebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. *Bolema*, v. 29, n. 52, p. 637-657, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11>.
- GARDNER, S. R. *A variety of proofs of the Steiner-Lehmus theorem*. Dissertação de Mestrado - East Tennessee State University, 2013.
- GEOGEBRA. *Download GeoGebra apps*, 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 06 abr. 2020.
- GREITZER, S. L.; COXETER, H. S. M. *Geometry revisited*. Washington: The Mathematical Association of America, 1967.

- HAJJA, M. **Other versions of the Steiner-Lehmus theorem**. The American Mathematical Monthly, v. 108, p. 760-767, 2001.
- LAGO, R. C. **Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus**. Dissertação de Mestrado - UTFPR, Curitiba, 2018.
- LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
- MOD, L. F. A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo GeoGebra**. Dissertação de Mestrado – PUC, São Paulo, 2016.
- MONTES, A.; RECIO, T. Generalizing the Steiner-Lehmus theorem using the Gröbner cover. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 104, p. 67-81, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mat-com.2013.06.006>.
- NELSEN, R. B. **Proofs without words: exercises in visual thinking**. Washington: The Mathematical Association of America, 1993.
- NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 1-21, 2019. DOI: <http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e61725>.
- NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, 2018. DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2018.006.02.0272>.
- NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121-137, 2019.
- NÓS, R. L.; LAGO, R. C. O triângulo isósceles e o teorema de Steiner-Lehmus. **Revista do Professor de Matemática**, n. 100, p. 47-50, 2019.
- NÓS, R. L.; LAGO, R. C. Investigando dinamicamente teoremas de geometria plana. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, 2020. DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2020.007.01.0395>.
- OLIVEIRA, R. A. de; GONÇALVES, W. V. Demonstrações com GeoGebra como atividades de ensino de matemática. **Revista Thema**, v. 16, n. 1, p. 149-162, 2019. DOI: <http://dx.doi.org/10.15536/thema.16.2019.149-162.1119>.
- POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. **Challenging problems in geometry**. New York: Dover, 1996.
- YOKOYAMA, L. A. **Uma prova geométrica da versão projetiva do teorema de Steiner**. Dissertação de Mestrado - UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.
- ZENGIN, Y. The effects of GeoGebra software on pre-service mathematics teachers' attitudes and views toward proof and proving. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 7, p. 1002-1022, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1298855>.