



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i2p005-025>

## Veinte casos inéditos de construcción de esfera modelados con ayuda de GeoGebra

Vinte casos inéditos de construção de esfera modelados com a ajuda do GeoGebra

Twenty unpublished sphere construction cases modelled with the help of GeoGebra

JORGE LUIS CALDERÓN SALCEDO<sup>1</sup>

[0000-0002-2107-7352](mailto:0000-0002-2107-7352)

### RESUMEN

*Los lugares geométricos forman parte esencial en la resolución de problemas geométricos complejos, dado que su propia definición representa una forma de aislar sus posibles soluciones mediante la aplicación del razonamiento deductivo euclidiano. Uno de los campos de aplicación de los lugares geométricos en tres dimensiones más útiles desde el punto de vista didáctico, es el de la determinación del centro y el radio de una esfera. Si bien este tipo de problemas cobraron importancia con el origen y auge de la Geometría Descriptiva, muchos de ellos han sido descartados en los últimos años debido a la dificultad de su representación gráfica. El surgimiento de programas de computadora orientados hacia la geometría dinámica en 3D, han hecho posible retomar las situaciones cuyos planteamientos geométricos hacían casi imposible su resolución en el pasado. En esta comunicación se presentan veinte casos de determinación del centro y el radio de una esfera, inéditos en tanto y en cuanto la revisión preliminar hecha por el autor así lo demuestra, cuyas soluciones han sido halladas y verificadas con el apoyo del software GeoGebra, siguiendo una metodología desarrollada y propuesta por el autor, de modo a permitir construir conjeturas o verificaciones, todavía sin pretender aquí presentar pruebas matemáticas.*

**Palabras clave:** Esfera; Lugares Geométricos; Geometría Sintética; Geometría Descriptiva; Geometría Dinámica; GeoGebra.

### RESUMO

*Os lugares geométricos são uma parte essencial na resolução de problemas geométricos complexos, uma vez que a sua própria definição representa uma forma de isolar as suas possíveis soluções através da aplicação do raciocínio dedutivo euclidiano. Um dos campos de aplicação dos lugares geométricos tridimensionais mais úteis do ponto de vista didático é o da determinação do centro e do raio de uma esfera. Embora esses tipos de problemas tenham ganhado importância com a origem e surgimento da Geometria Descritiva, muitos deles foram descartados nos últimos anos devido à dificuldade de sua representação gráfica. O surgimento de programas de computador orientados para a geometria dinâmica em 3D possibilitou o retorno*

---

<sup>1</sup> Universidad de Los Andes – Venezuela - [jcalderonsalcedo@gmail.com](mailto:jcalderonsalcedo@gmail.com)

*a situações cujas abordagens geométricas tornavam sua resolução quase impossível no passado. Nesta comunicação são apresentados vinte casos de determinação do centro e raio de uma esfera, inéditos na medida em que o demonstra a revisão preliminar feita pelo autor, cujas soluções foram encontradas e validadas com o apoio do software GeoGebra, seguindo uma metodologia desenvolvida e proposta pelo autor, de modo a permitir construir conjecturas contudo sem pretender-se aqui apresentar provas matemáticas.*

**Palavras-chave:** *Esfera; Lugares Geométricos; Geometria Sintética; Geometria Descritiva; Geometria Dinâmica; GeoGebra.*

## **Introducción**

La determinación del centro y del radio de una esfera es una de las aplicaciones más comunes del trabajo con lugares geométricos en el espacio en los cursos de Geometría Descriptiva. De forma general, el proceso consiste en la creación de lugares geométricos que permitan, mediante intersecciones y métodos auxiliares específicos, hallar los elementos buscados. Se trata de un procedimiento enmarcado en lo que se conoce como Geometría Euclidiana, la cual descansa en la efectuación real de construcciones geométricas tridimensionales, que luego serán representadas sobre uno o más planos según los métodos de la Geometría Descriptiva.

En relación con la Geometría Euclidiana es preciso señalar que el enfoque que se aborde origina una separación de esta en dos, a saber: la Geometría Métrica, en la que se introduce desde su inicio la medición de distancias entre puntos, con la finalidad de establecer todo aquello referido a las congruencias; y la Geometría Sintética, en la cual se obvia la noción de distancia entre puntos, admitiendo como términos originales de su desarrollo las relaciones de congruencia básicas, postura personalizada en el propio Euclides y, posteriormente, con David Hilbert.

En sentido lato, la Geometría Sintética es aquella geometría que basa el raciocinio y las demostraciones en la construcción de los objetos o entidades geométricas a partir de determinadas reglas o postulados. Los elementos geométricos básicos que la fundamentan son los puntos, líneas y planos. A su vez, todo el razonamiento y los métodos demostrativos se ciñen a construcciones caracterizadas por el empleo de técnicas propias exclusivamente de la geometría. En otras palabras, el método sintético se vale de técnicas que no provienen de otras disciplinas de las matemáticas, como, por ejemplo, el álgebra. Heredera directa de la Geometría Euclidiana lo es la Geometría Descriptiva; creada como un conjunto de métodos orientados hacia la aplicación de las técnicas geométricas del campo bidimensional en la resolución de problemas de construcción y representación de elementos en el mundo tridimensional, su utilidad práctica la ha convertido en asignatura obligatoria en los programas de las carreras de diseño, ingeniería y arquitectura, desde el mismo momento de su creación como disciplina revestida de rigor científico, hecho que se atribuye a Gaspard Monge. Si bien es obvia su importancia como base de la

representación gráfica y como instrumento de potenciación de la percepción espacial de las personas, no es menos cierto que el estudio de la más variada gama de problemas geométricos complejos constituye un verdadero reto y deleite para quienes cultivan la Geometría Descriptiva.

Un aspecto especialmente resaltante en el conjunto de temas abordados en los cursos clásicos de Geometría Descriptiva es el de encontrar el centro y el radio de una esfera. Este problema representa una especie de síntesis de casi todo el conjunto de conceptos y técnicas propias de la Geometría Sintética, especialmente en lo atinente a los lugares geométricos y a los temas relacionados con las circunferencias.

De acuerdo con Harry Osers (2006), un determinado caso de construcción de esfera está caracterizado por un conjunto de condiciones geométricas dadas. Cada una de estas condiciones (Cuadro 1) reciben un valor intrínseco, tal que en cada caso de construcción la suma total de estos valores es de cuatro (4). Del Cuadro 1 se desprende que existen 163 posibles combinaciones que generan casos viables de construcción de esfera. En este trabajo nos proponemos presentar veinte (20) casos inéditos resueltos con la ayuda del modelado tridimensional usando el software GeoGebra.

**CUADRO 1:** Valores de las condiciones geométricas según Harry Osers

CONDICIÓN	VALOR
Centro $O$ de la esfera	3
Recta $s$ que contiene al centro de la esfera	2
Plano $\delta$ que contiene al centro de la esfera	1
Punto $P$ sobre la superficie de la esfera	1
Radio $R$ de la esfera	1
Recta $t$ tangente a la esfera con punto de tangencia $T$	2
Recta $t$ tangente a la esfera	1
Plano $\tau$ tangente a la esfera con punto de tangencia $T$	3
Plano $\tau$ tangente a la esfera con recta de tangencia $t$	2
Plano $\tau$ tangente a la esfera	1

## 1 Marco teórico

### 1.1 El papel de GeoGebra como software de Geometría Dinámica

Autores como Schumann (2005), sostienen que el estudio de lugares geométricos como las secciones cónicas se ha restringido al tratamiento de dichas entidades geométricas en dos dimensiones, situación ocasionada, de acuerdo con este investigador, por la falta de métodos y soportes tecnológicos que brinden un ambiente en tres dimensiones para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las secciones cónicas mediante sus representaciones gráficas a partir de un cono. Las actividades propuestas por el autor implican desde la construcción de un cono

circular recto hasta cortes de dicha superficie con planos en distintas posiciones relativas con respecto al eje del cono, a fin de reconocer las secciones cónicas generadas por intersección. Por otra parte, con el objetivo de lograr el reconocimiento de cada cónica a partir de su definición, el autor emplea las Esferas de Dandelín, al determinar mediante tangencia de superficies la ubicación de los focos de cada curva.

Schumann (2005) afirma que, mediante el uso de un programa de Geometría Dinámica – este autor emplea el programa Cabri 3D® - el alumno puede estudiar de perfectamente en un entorno virtual las representaciones de las secciones cónicas, como curvas generadas a partir de la intersección de un cono con planos orientados en distintas posiciones relativas con relación a su eje. Para ello, el autor se vale de un plano de proyección normal a la base del cono para representar en dicho plano (rebatido para lograr las verdaderas magnitudes) las secciones cónicas, lo cual es factible gracias a la posibilidad de desplazar la posición del vértice del cono. Todo esto permite hacerse una idea del potencial de este tipo de software, en tanto que facilitan la manipulación de variables, lo que permite al usuario apreciar los resultados de esta manipulación y generar observaciones, hipótesis y conclusiones al respecto.

Las principales características de un programa de Geometría Dinámica (como GeoGebra) que son especialmente útiles en el planteamiento y resolución de problemas de construcción de esfera, son las siguientes:

- Modelado de entidades geométricas: con base en un sistema cartesiano tridimensional, el programa permite el modelado de los elementos geométricos básicos en la denominada vista gráfica 3D: puntos (en un objeto o dadas sus coordenadas), rectas (dados dos puntos, perpendicular a un plano, paralela a otra recta, tangentes a una cónica) y planos (dados tres puntos, dadas dos rectas, dada una recta y un punto, perpendicular a una recta, paralelo a otro plano). Asimismo, el software ofrece distintas herramientas de modelado de superficies y sólidos: pirámides, prismas, tetraedros, cubos, esferas, conos y cilindros (estos últimos pueden ser de directriz circular, elíptica, parabólica o hiperbólica). Por otra parte, las entidades geométricas pueden ser creadas introduciendo la expresión algebraica correspondiente. Resalta también las opciones de intersección: entre líneas, entre líneas y superficies, y entre superficies. Todas estas prestaciones permiten generar los diferentes elementos que intervienen en el proceso de determinación del centro de la esfera en cada caso.
- Construcción de circunferencias (dados tres puntos, dado el centro y el radio, dado el centro y un punto) y cónicas (dados los focos y un

punto, en el caso de la elipse y la hipérbola, o el foco y la directriz, en el caso de la parábola; o dados cinco puntos).

- Distintas opciones de visualización: GeoGebra presenta una variada paleta de opciones de visualización en la vista gráfica 3D, tales como rotación libre de la vista (mediante clic y arrastre del mouse); desplazamiento de la vista en las tres direcciones principales del sistema cartesiano; acercamiento y alejamiento; mostrar/ocultar objetos (especialmente construcciones auxiliares y para mejorar la claridad del trabajo); vista frontal (que permite presentar planos en verdadera magnitud y rectas proyectadas como un punto); y tipo de proyección (paralela, perspectiva u oblicua). Todas estas herramientas son de gran ayuda para validar resultados (como tangencias) y mejorar la percepción de la construcción.
- Representación 2D de un plano: Esta opción ofrece la posibilidad de trabajar directamente sobre un plano determinado, por lo que resulta el equivalente a los procedimientos auxiliares conocidos como rebatimiento, giro o cambio de plano aplicados a la determinación de la verdadera magnitud de figuras planas. Con frecuencia, el proceso de determinación del centro de una esfera pasa por el trazado de tangentes a circunferencias, de lugares geométricos bidimensionales y secciones planas, lo cual implica el desarrollo de procedimientos de geometría 2D que solamente pueden ser ejecutados en verdadera magnitud.
- Herramienta Casilla de Control: Permite ocultar grupos de entidades geométricas en la construcción, lo cual facilita el control por parte del usuario en lo referente a la claridad de la visualización. La técnica indagatoria empleada es la entrevista, estructurada por medio de un cuestionario de respuestas abiertas como instrumento de recolección de datos.

## 1.2 Lugares Geométricos

Siguiendo a Osers (2006, pág. 85), el lugar geométrico *“es la figura geométrica, que contiene todos los puntos que cumplen una cierta y determinada propiedad y recíprocamente, todos los puntos de esta figura cumplen con esta misma propiedad”*.

De acuerdo con Rondón y Téllez (1985), el lugar geométrico que contiene al centro de la esfera correspondiente, en función de las condiciones señaladas (o de combinaciones de estas) puede ser descrito como en el Cuadro 2.

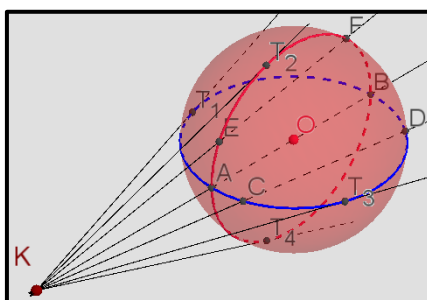
**CUADRO 2:** Lugares geométricos en la construcción de esfera según Rondón y Téllez (1985)

CONDICIONES	LUGAR GEOMÉTRICO
Dos puntos ( $A$ y $B$ ) sobre la superficie esférica	El plano $\mu$ , mediador del segmento $AB$ (plano que es perpendicular a la dirección $AB$ que pasa por el punto medio del segmento $AB$ )
Tres puntos ( $A$ , $B$ y $C$ ) sobre la superficie esférica.	Una recta $p$ que es perpendicular al plano determinado por los puntos dados y pasa por el centro de la circunferencia $ABC$ .
Una recta $t$ tangente a la esfera con punto de tangencia $T$ .	Un plano $\pi$ que es perpendicular a la recta $t$ y pasa por el punto de tangencia $T$ .
Tres rectas $t$ , $t_1$ y $t_2$ tangentes a la esfera que concurren en un punto $P$ exterior a la misma	El eje $e$ de un cono de revolución de vértice en $P$ formado por las retas tangentes.
Un plano $\tau$ tangente a la esfera con punto de tangencia $T$	Una recta $p$ que es perpendicular al plano $\tau$ y pasa por el punto de tangencia $T$ .
Dos planos $t$ y $t_1$ tangentes a la esfera	Los planos $\beta$ y $\beta_1$ , bisectores del ángulo formado entre los planos $t$ y $t_1$ (planos que pasan por la recta de intersección de dos planos dados y dividen en dos ángulos iguales al ángulo formado por estos; los puntos de dichos planos bisectores equidistan de los planos dados.
Tres planos $t$ , $t_1$ y $t_2$ tangentes a la esfera	La recta $i$ de intersección entre los bisectores a cada par de planos tangentes (existen 4 soluciones posibles)

### 1.3 Potencia de un punto respecto de una esfera

Por otra parte, el concepto de potencia de un punto respecto de una esfera es también un elemento importante en la resolución de varios de los casos que pueden ser planteados a partir de las posibles combinaciones de las condiciones mostradas en el Cuadro 1. En efecto, el propio Harry Osers describe la solución de siete de esos casos, aplicando en el último de ellos (Plano tangente a la esfera con recta de tangencia y dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la superficie esférica) el concepto de potencia en el proceso. Análogamente al caso bidimensional (potencia de un punto respecto de una circunferencia), la potencia de un punto exterior  $K$  a una esfera respecto de ella (Fig.1) se define como el producto entre las distancias entre  $K$  y dos puntos  $A$  y  $B$  de la superficie esférica, medidas sobre una misma secante (Puig Adam, 1979). Este producto es un valor constante para todas las rectas que pasan por  $K$  y son secantes a la esfera, por lo que:

$$P = KA * KB = KC * KD = KE * KF \quad (1)$$



Además, en el caso límite en el cual las rectas que pasan por K son tangentes a la esfera se cumple que:

$$P = KT^2 \quad (2)$$

Donde T es el punto de tangencia considerado. De lo anterior se concluye que la distancia entre K y los puntos de tangencia de las infinitas rectas que pasan por K y son tangentes a la esfera es constante. Y como toda recta que pasa por K tangente a la esfera, es tangente a las infinitas circunferencias generadas en la esfera por el corte de infinitos planos que contienen a dicha recta, lo anterior es aplicable a la distancia entre K y los puntos de tangencia en dichas circunferencias.

## 2 Estado del arte

Haciendo un breve repaso de los autores clásicos en el ámbito de la Geometría Descriptiva, se puede observar el vacío que hasta ahora existe en cuanto al abordaje de los numerosos problemas o casos posibles. Izquierdo Asensi (1978) no menciona ni describe ninguno de tales casos, al igual que Donato Di Pietro (1962) y Gordon, Sementsov y Oguyevski (1973). Rodríguez de Abajo (1958) describe la construcción de esferas inscritas y circunscritas en un tetraedro, es decir, los casos que involucran cuatro planos tangentes y cuatro puntos (no coplanarios) de la superficie esférica, respectivamente). El propio Gaspard Monge, en su obra magna *Géométrie Descriptive* (1827), solamente abordó dos de las posibles configuraciones, a saber: esfera inscrita en una pirámide de base triangular (tangente a cuatro planos) y esfera conocidos cuatro puntos (no coplanarios) de su superficie.

En la obra de Gordon, Ivanov y Solntseva (1974), dedicada a la presentación y resolución de ejercicios prácticos relativos al Sistema Diédrico, se plantean los siguientes casos: dado el centro y un punto de la superficie esférica; dado el radio y un plano tangente conocido el punto de tangencia; y dada una recta que contiene al centro y dos planos tangentes.

Son, precisamente, los ya citados Osers y Rondón y Téllez quienes describen una mayor cantidad de casos en sus respectivas obras, los cuales se muestran en el Cuadro 3.

**CUADRO 3:** Casos de construcción de esfera presentes en Osers (2006) y en Rondón y Téllez (1985)

CASO (Condiciones dadas)	Osers	Rondón y Téllez
Dos puntos de la superficie esférica y recta que contiene al centro	X	X
Cuatro puntos (no coplanarios) de la superficie esférica	X	X
Recta tangente con punto de tangencia y dos puntos de la superficie esférica (la recta y los puntos no son coplanarios)	X	X
Plano tangente con punto de tangencia y un punto de la superficie esférica	X	X
Plano tangente con punto de tangencia y otro plano tangente	X	X
Recta tangente y tres puntos de la superficie esférica (la recta no pertenece al plano determinado por los tres puntos)	X	X
Recta tangente y tres puntos de la superficie esférica (la recta es paralela al plano determinado por los tres puntos)		
Plano tangente con recta de tangencia y dos puntos de la superficie esférica	X	X
Dos rectas tangentes (no coplanarias) con sus respectivos puntos de tangencia		X
Plano tangente con punto de tangencia y recta tangente (la recta no es paralela al plano)		X
Tres planos tangentes y un punto de la superficie esférica		X

En una época previa al desarrollo de los programas de Dibujo Asistido por Computador (CAD) y de Geometría Dinámica, los procedimientos de la Geometría Descriptiva, desarrollados con materiales e instrumentos de dibujo tradicionales, hacían que la resolución y representación de muchos de los casos de construcción de esfera fueran realmente engorrosas. Recientemente, con el desarrollo de herramientas digitales orientadas al modelado tridimensional más allá del trazado en dos dimensiones, se ha logrado facilitar de manera notable la representación de situaciones geoméricamente complejas. En este sentido, es necesario mencionar el trabajo realizado por Antonio Castilla y colaboradores (2020) en el foro de la web de dibujo técnico y CAD “Trazoide”, en lo que respecta al planteamiento y resolución de una gran cantidad de ejercicios enmarcados en diferentes casos, tales como: esfera de radio conocido y tangente a una recta y a dos planos; esfera tangente a las seis aristas de un cubo; esfera tangente a dos rectas coplanarias conocido el



radio; esfera tangente a tres rectas y tangente a un plano; esfera tangente a otra dada, conocidas dos coordenadas del centro; esfera conocidos dos puntos por los que pasa, su radio y un plano que contiene al centro; esfera conocidos tres puntos y un plano que contiene al centro; esfera tangente a tres planos conocido el radio; esfera dada una sección menor y un plano tangente; esfera tangente a cuatro planos; esfera de radio conocido, tangente a dos planos y a una esfera dada.

Los ejercicios planteados y resueltos en este foro y enumerados anteriormente, han sido representados en Sistema Diédrico con ayuda de una herramienta de CAD, sin incluir modelos tridimensionales digitales. En su mayoría, las rectas y planos tangentes a las esferas tienen una orientación notable en el sistema de representación, es decir, paralelos o perpendiculares a los planos de proyección del sistema, lo cual facilita los procedimientos desde el punto de vista de la Geometría Descriptiva. Por otra parte, los lugares geométricos empleados son los que aparecen el Cuadro 2, aplicando eventualmente el concepto de potencia. Como puede apreciarse, varios de los casos mencionados no se encuentran en los textos citados más arriba, en especial los que se refieren a la tangencia entre dos esferas.

Asimismo, merece una mención especial el trabajo de Font Andreu y colaboradores (2006), puesto que plantea dos problemas de construcción de esfera en el marco de un trabajo dedicado a la aplicación práctica de métodos 2D para el modelado geométrico 3D. En uno de estos casos, la esfera pedida es tangente a un plano, contiene a un punto en su superficie y es tangente exterior a una esfera dada; en el otro caso, la esfera debe ser tangente exterior a otras tres esferas, conociendo la distancia del centro a un plano dado. Si bien la condición de tangencia entre dos esferas no deja de ser interesante, pues implica la generación de hiperboloides de revolución\*, escapa al alcance del presente trabajo, el cual, como ya se ha indicado, está delimitado por las condiciones geométricas mostradas en el Cuadro 1. No obstante, los autores introducen, como parte de la solución del primero de los casos, un paraboloides de revolución con foco en el punto dado, siendo el plano tangente el plano director de la cuádrica, como lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas que pasan por dicho punto y son tangentes al plano mencionado. Es

---

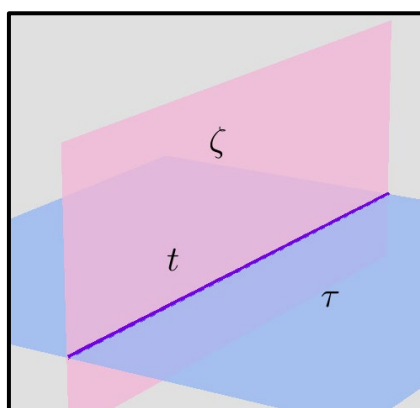
\* De acuerdo con los autores, el lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas que contienen a un punto  $A$ , son tangentes a un plano  $\tau$  y tangentes exteriores a una esfera  $\Sigma$ , es un hiperboloide  $\Theta$  engendrado por la revolución de una rama de hipérbola, la cual equidista de la esfera y del plano tangente, por lo que el centro de la esfera  $\Sigma$  es uno de los focos. Por otra parte, el lugar geométrico de las infinitas esferas tangentes exteriores a dos esferas dadas es un hiperboloide generado por la revolución de las ramas de hipérbolas definidas por los puntos de un plano  $\gamma$  (que pasa por los centros de ambas esferas tangentes) que se encuentran a igual distancia mínima de las circunferencias de sección producidas en las esferas por dicho plano  $\gamma$ .

precisamente esta superficie la protagonista en los algoritmos de solución propuestos para varios de los casos presentados en esta comunicación.

### 3 Lugares geométricos adicionales propuestos

El análisis de muchos de los casos no tratados por los autores consultados, implica la utilización de ciertos lugares geométricos no mencionados en la lista de Rondón y Téllez ni en las demás obras ya citadas (salvando claro está, la obra de Font Andreu et al). Los más resaltantes son los siguientes:

- Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas tangentes a un plano  $\tau$  según una recta de tangencia  $t$ : se trata de un plano  $\zeta$  que contiene a la recta  $t$  y es perpendicular al plano  $\tau$  (Fig. 2).

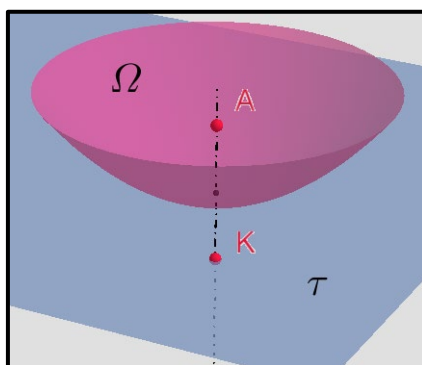


**FIGURA 2.** Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas tangentes a un plano  $\tau$  según una recta de tangencia  $t$

- Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas que contienen un punto  $A$  en su superficie y son tangentes a un plano  $\tau$ : es un paraboloides de revolución  $\Omega$  de foco en el punto  $A$  y plano director en el plano  $\tau$  (Fig. 3). Todos los puntos de esta cuádrica equidistan del punto  $A$  y del plano  $\tau$ . Esta superficie ha sido generada en GeoGebra mediante la introducción de la ecuación correspondiente en la barra de entrada, procurando siempre que el plano tangente a la esfera coincida con el plano  $XY$  a objeto de simplificar dicha ecuación:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2p(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

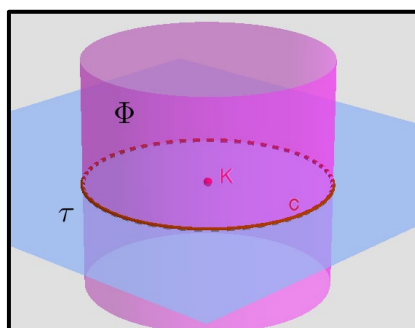
Donde  $p$  es la distancia del foco al plano director, es decir, la distancia entre el punto  $A$  y el punto de intersección  $K$  entre una recta perpendicular al plano  $\tau$  – construida por dicho punto  $A$  – y el propio plano  $\tau$ . Las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  corresponden a las del vértice de la cuádrica, punto medio del segmento  $AK$  (Lehmann, 2006).



**FIGURA 3.** Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas que contienen un punto A en su superficie y son tangentes a un plano  $\tau$

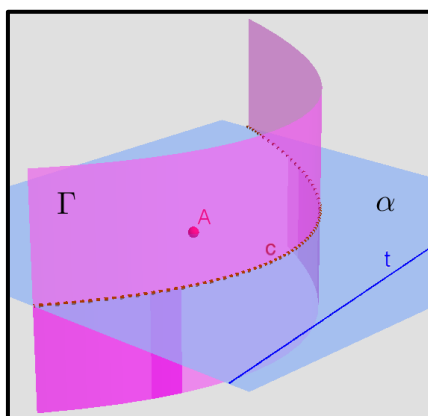
- Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas tangentes a un plano  $\tau$ , conocida la circunferencia  $c$  que contiene a los posibles puntos de tangencia de la esfera en dicho plano: se trata de un cilindro recto de revolución  $\Phi$ , cuya directriz es la circunferencia señalada, siendo sus generatrices perpendiculares al plano  $\tau$  (Fig. 4). La circunferencia en cuestión se define de una de estas dos formas:
  - Tiene por centro el punto de intersección K de una recta  $t$ , tangente a la esfera, en el plano tangente  $\tau$ . El radio de dicha circunferencia corresponde a la distancia  $KT$ , siendo T el punto de tangencia de la recta  $t$ .
  - Tiene por centro el punto de intersección K de una recta  $m$  determinada por dos puntos de la superficie esférica. En este caso, el radio de la circunferencia es la distancia  $KT'$ , donde  $T'$  es el punto de tangencia de la recta  $t$  a cualquier circunferencia que pase por los dos puntos de la superficie esférica mencionados.

Con el objetivo de hacer una aproximación a un cilindro de altura infinita, se han creado en GeoGebra dos superficies de altura igual a 50 mil unidades de longitud, una con altura positiva y otra con altura negativa.



**FIGURA 4.** Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas tangentes a un plano  $\tau$ , conocida la circunferencia  $c$  que contiene a los posibles puntos de tangencia de la esfera en dicho plano

- Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas que son tangentes a una recta  $t$  y contienen a un punto  $A$  en su superficie: es un cilindro parabólico recto  $\Gamma$  cuya directriz es la parábola  $c$  contenida en el plano  $\alpha$  definido por  $t$  y  $A$ , de directriz en la primera y foco en el segundo, con generatrices perpendiculares al plano  $\alpha$ . Su aplicación es importante en los casos en los cuales se conoce una o más rectas tangentes a la esfera y uno o más puntos sobre su superficie. Para validar esto, es preciso partir de la definición de parábola (Puig Adam, 1979) como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto (foco) y de una recta (directriz); así, se tiene que si un punto  $A$  pertenece a una circunferencia y una recta  $t$  es tangente a la misma, los centros de las infinitas circunferencias posibles se encuentra una parábola  $c$  de foco en  $A$  y directriz en  $t$ . Luego, si  $A$  es un punto de la superficie de una esfera y  $t$  es una recta tangente a dicha esfera, el plano  $\alpha$  determinado por  $A$  y  $t$  produce una sección (circunferencia) a la cual se puede aplicar lo anterior. Finalmente, como el centro de la esfera debe encontrarse en una recta perpendicular al plano  $\alpha$  construida por el centro de la sección, y como este punto debe pertenecer a la parábola trazada, los centros de las infinitas esferas que contienen al punto  $A$  y son tangentes a la recta  $t$  se encuentran en las generatrices de un cilindro recto cuya directriz es la mencionada parábola (Fig. 5). La construcción de este cilindro en GeoGebra se ha efectuado mediante la herramienta “Prisma o cilindro desde su base”, creando uno con altura positiva y otro con altura negativa, tomando un número absoluto igual a 50 mil unidades de longitud en ambos casos, a fin de lograr una aproximación a una superficie de altura infinita y así obtener las soluciones buscadas para el centro de la esfera.



**FIGURA 5.** Lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas que son tangentes a una recta  $t$  y contienen a un punto  $A$  en su superficie

#### 4 Descripción de la metodología empleada

La metodología empleada para modelar y validar la solución de los casos planteados se orienta hacia el aprovechamiento de las herramientas 3D de GeoGebra: modelado de puntos libres; de puntos en objetos; de rectas paralelas, perpendiculares y definidas por dos puntos; de parábolas dados su foco y su directriz; de esferas a partir de su centro y un punto en su superficie; de cilindros rectos parabólicos y de revolución; de la intersección entre dos superficies; de la intersección entre una línea y una superficie; y de paraboloides de revolución a partir de su ecuación. De manera general, los pasos que constituyen dicha metodología son los siguientes:

1. Planteamiento del caso (en función de que la suma de los valores asignados a las condiciones geométricas sea igual a cuatro)
2. Modelado de una esfera de centro en un punto cualquiera y radio arbitrario usando GeoGebra.
3. Modelado de los elementos geométricos de partida de acuerdo con el caso en específico (puntos sobre la superficie esférica, planos y rectas tangentes, puntos o rectas de tangencia, plano o contiene al centro). Cada uno de estos elementos se encuentran, con respecto a la esfera creada, en correspondencia con su papel en el caso planteado. Se evita el paralelismo entre rectas, entre planos o entre rectas y planos creados, a fin de presentar la forma más general.
4. Ocultamiento del centro de la esfera y de la propia esfera creada.
5. Implementación del algoritmo de solución propuesto.
  - a. Creación sucesiva de los diferentes lugares geométricos que contengan al centro de la esfera, así como de otras entidades geométricas de utilidad de acuerdo con el algoritmo propuesto.
  - b. Intersección de los diferentes lugares geométricos generados.

- c. Determinación del centro (es posible que exista más de una solución) y el radio de la esfera.
  - d. Modelado de la esfera resultante.
- 6. Validación de la solución obtenida mediante la comparación con la esfera inicialmente creada.
- 7. Validación de otras posibles soluciones encontradas.
  - a. Modelado de la esfera alternativa.
  - b. Comprobación de la pertenencia del centro de esta esfera a algún elemento geométrico especificado en el enunciado (una recta, un plano).
  - c. Comprobación de la pertenencia de puntos a la esfera.
  - d. Comprobación de la tangencia entre rectas y la esfera.
  - e. Comprobación de la tangencia entre planos y la esfera.
- 8. Verificación de posibles situaciones especiales en las que pudiera no existir solución al problema
  - a. Crear nueva construcción o archivo
  - b. Repetir el paso 3. Los elementos geométricos de partida no se modelan en función de una esfera, sino de manera arbitraria en el espacio.
  - c. Repetir el paso 5.
  - d. Manipular los elementos geométricos de partida para determinar posibles situaciones en las que no sea posible el modelado de la esfera correspondiente.

## 5 Los nuevos casos plateados y la solución propuesta

Cada uno de los siguientes casos de construcción de esfera ha sido modelado en GeoGebra, siguiendo la metodología descrita y empleando las herramientas 3D del programa y la generación de superficies a partir de su ecuación. Cada uno de los algoritmos ha sido validado de acuerdo con la metodología empleada. La representación de todos ellos en el Sistema Diédrico resulta bastante engorrosa, dado que involucra la manipulación de lugares geométricos que en sí mismos ameritan de un laborioso procedimiento y producen dibujos de alta densidad; es por ello que solamente se incluyen imágenes ilustrativas del modelo 3D de algunos de los casos resueltos. Por otra parte, en aras de simplificar la presentación de los algoritmos correspondientes a cada uno de los veinte casos, se ha optado por incluirlos en un cuadro global (Cuadro 4) que a continuación se muestra.

**CUADRO 4:** Los veinte casos inéditos y la solución propuesta

Lugar geométrico relevante	Condiciones dadas	Algoritmo de solución propuesto
Plano $\zeta$ que es perpendicular al plano tangente a la esfera $\tau$ y que contiene a la correspondiente recta de tangencia $t$	<p>Recta <math>t</math> tangente a la esfera con punto de tangencia <math>T</math> y plano <math>\tau</math> tangente a la esfera con recta de tangencia <math>t_1</math></p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/kdv5frhg">https://www.geogebra.org/m/kdv5frhg</a></p>	<p>Hallar <math>K=t\cap\pi</math></p> <p>Construir un plano <math>\pi</math> que contenga a <math>t_1</math> y sea perpendicular al plano <math>\tau</math>.</p> <p>Construir por <math>K</math> una recta <math>m</math> perpendicular a <math>\pi</math>.</p> <p>Hallar <math>T=m\cap t_1</math></p> <p>Hallar <math>D=KT</math></p> <p>Medir <math>D</math> sobre <math>t</math> a partir de <math>K</math>; se obtiene <math>T_1</math> (o <math>T_1'</math>).</p> <p>Construir por <math>T_1</math> (o <math>T_1'</math>) un plano <math>\lambda</math> (o <math>\lambda_1</math>) perpendicular a <math>t</math>.</p> <p>Construir por <math>T</math> recta <math>p</math> perpendicular a <math>\tau</math>.</p> <p>Hallar <math>O=p\cap\lambda</math> (u <math>O'=p\cap\lambda_1</math>)</p> <p>Hallar <math>OT=OT_1=Radio</math> (u <math>O'T=O'T_1'=Radio'</math>) (Dos soluciones para <math>O</math>)</p>
	<p>Recta <math>s</math> que contiene al centro de la esfera y plano <math>\tau</math> tangente a la esfera con recta de tangencia <math>t</math></p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/m3zqsqj">https://www.geogebra.org/m/m3zqsqj</a></p>	<p>Construir un plano <math>\pi</math> que contenga a <math>t</math> y sea perpendicular al plano <math>\tau</math>.</p> <p>Hallar <math>O=s\cap\pi</math></p>
	<p>Plano <math>\tau</math> tangente a la esfera con recta de tangencia <math>t</math>, plano <math>\delta</math> que contiene al centro de la esfera y Radio <math>R</math> de la esfera</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/ssbbuqyu">https://www.geogebra.org/m/ssbbuqyu</a></p>	<p>Construir un plano <math>\pi</math> que contenga a <math>t</math> y sea perpendicular al plano <math>\tau</math>.</p> <p>Hallar <math>i=\pi\cap\delta</math></p> <p>Construir una circunferencia <math>c</math>, contenida en el plano <math>\pi</math>, con centro en <math>i</math>, tangente a <math>t</math> y de radio <math>R</math>; se obtiene <math>O</math> (y <math>O'</math>) (Dos soluciones para <math>O</math>)</p>
	<p>Plano <math>\tau</math> tangente a la esfera con recta de tangencia <math>t</math>, plano <math>\delta</math> que contiene al centro de la esfera y plano <math>\tau_1</math> tangente a la esfera</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/wfdtvfvj">https://www.geogebra.org/m/wfdtvfvj</a></p>	<p>Construir un plano <math>\pi</math> que contenga a <math>t</math> y sea perpendicular al plano <math>\tau</math>.</p> <p>Hallar <math>i=\pi\cap\delta</math></p> <p>Construir plano <math>\beta</math>, bisector de los planos <math>\tau</math> y <math>\tau_1</math> (existen dos soluciones posibles: <math>\beta</math> y <math>\beta'</math>)</p> <p>Hallar <math>O=i\cap\beta</math> (u <math>O'=i\cap\beta'</math>)</p> <p>Construir por <math>O</math> una recta <math>p</math> perpendicular al plano <math>\tau</math> (o una recta <math>p'</math> que contenga a <math>O'</math> y sea perpendicular al plano <math>\tau</math>)</p> <p>Hallar <math>T=p\cap t</math> (o <math>T'=p'\cap t</math>)</p> <p>Hallar <math>OT=Radio</math> (u <math>O'T'=Radio'</math>)</p>
Cilindro recto de revolución $\Phi$ de generatrices perpendiculares al plano $\tau$ tangente a la esfera	<p>Recta <math>t</math> tangente a la esfera con punto de tangencia <math>T</math>, plano <math>\delta</math> que contiene al centro de la esfera y plano <math>\tau</math> tangente a la esfera (el plano <math>\delta</math> no es perpendicular a la recta <math>t</math>; la recta <math>t</math> no es paralela al plano <math>\tau</math>).</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/vjekwkhj">https://www.geogebra.org/m/vjekwkhj</a></p>	<p>Construir por <math>T</math> plano <math>\pi</math> perpendicular a <math>t</math>.</p> <p>Hallar <math>i=\pi\cap\delta</math></p> <p>Hallar <math>K=i\cap\tau</math></p> <p>Hallar <math>D=KT</math></p> <p>Construir circunferencia <math>c</math> contenida en <math>\tau</math>, de centro en <math>K</math> y radio <math>D</math>.</p> <p>Construir cilindro de revolución <math>\Gamma</math>, de directriz <math>c</math> y eje perpendicular al plano <math>\tau</math>.</p> <p>Hallar <math>O=i\cap\Gamma</math> (se obtienen dos soluciones para <math>O</math> (y <math>O'</math>)).</p> <p>Hallar <math>OT=Radio</math> (u <math>O'T=Radio'</math>)</p>
	<p>Plano <math>\delta</math> que contiene al centro de la esfera, dos puntos <math>A</math> y <math>B</math> sobre la superficie de la esfera y plano <math>\tau</math> tangente a la esfera. (AB no es paralela al plano <math>\tau</math>)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/htan9ubf">https://www.geogebra.org/m/htan9ubf</a></p>	<p>Definir recta <math>m\{A,B\}</math></p> <p>Hallar <math>K=m\cap\tau</math></p> <p>Construir una circunferencia <math>c</math> cualquiera que pase por <math>A</math> y <math>B</math>.</p> <p>Trazar tangente a la circunferencia construida por el punto <math>K</math>; se obtiene <math>T'</math>.</p> <p>Construir un cilindro recto de revolución <math>\Phi</math> de base en el plano <math>\tau</math> y radio igual a <math>KT'</math>.</p> <p>Construir el plano <math>\mu</math> mediador del segmento <math>AB</math>.</p> <p>Hallar <math>i=\delta\cap\mu</math>.</p> <p>Hallar <math>O=i\cap\Phi</math> (dos posibles soluciones: <math>O</math> y <math>O'</math>).</p> <p>Hallar <math>OA=OB=Radio</math> (u <math>O'A=O'B=Radio'</math>)</p>

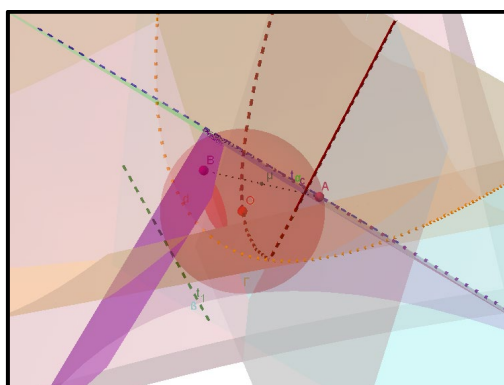
	<p>Dos puntos A y B sobre la superficie esférica y dos planos tangentes <math>\tau</math> y <math>\tau_1</math> (los planos no son paralelos entre sí y los puntos A y B se encuentran en la misma región del espacio limitada por dichos planos).</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/kffgnqqy">https://www.geogebra.org/m/kffgnqqy</a></p>	<p>Construir plano <math>\mu</math> mediador del segmento AB.  Construir plano <math>\beta</math> bisector del ángulo formado entre los planos tangentes a la esfera (tomar la solución que corresponde a la región del espacio limitada por los planos tangentes en la que se encuentran los puntos A y B).  Determinar <math>i = \mu \cap \beta</math>.  Construir una circunferencia <math>c</math> cualquiera que pase por A y B.  Definir recta <math>m\{A,B\}</math>  Hallar <math>K = m \cap \tau</math>  Trazar tangente a la circunferencia <math>c</math> por K; se obtiene <math>T'</math>.  Trazar circunferencia <math>g</math> contenida en el plano tangente tomado (<math>\tau</math>), de centro en K y radio igual a <math>KT'</math>.  Construir cilindro recto de revolución <math>\Phi</math> de directriz <math>g</math> y eje perpendicular al plano tangente tomado (<math>\tau</math>).  Determinar <math>O = i \cap \Phi</math> (dos posibles soluciones).  Hallar <math>OA = OB = \text{Radio}</math> (u <math>O'A = O'B = \text{Radio}'</math>).</p>
	<p>Dos planos <math>\tau</math> y <math>\tau_1</math> tangentes a la esfera, y una recta <math>t</math> tangente a la esfera con su punto de tangencia T (los planos no son paralelos; la recta no es paralela a ninguno de los planos)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/gney6jge">https://www.geogebra.org/m/gney6jge</a></p>	<p>Construir plano <math>\beta</math> bisector del ángulo formado entre los planos tangentes a la esfera (tomar la solución que corresponde a la región del espacio limitada por los planos tangentes en la que se encuentra T)  Construir por T plano <math>\pi</math> perpendicular a <math>t</math>  Hallar <math>i = \pi \cap \beta</math>  Hallar <math>K = t \cap \tau</math> (o <math>\tau_1</math>)  Trazar circunferencia <math>g</math> contenida en el plano tangente tomado (<math>\tau</math>), de centro en K y radio igual a <math>KT</math>.  Construir cilindro recto de revolución <math>\Phi</math> de directriz <math>g</math> y eje perpendicular al plano tangente tomado (<math>\tau</math>).  Determinar <math>O = i \cap \Phi</math> (dos posibles soluciones)  Hallar <math>OT = \text{Radio}</math> (u <math>O'T = \text{Radio}'</math>)</p>
Cilindro parabólico recto $\Gamma$ con generatrices perpendiculares al plano determinado por una recta tangente a la esfera y un punto en su superficie.	<p>Recta <math>t</math> tangente a la esfera con punto de tangencia T, plano <math>\delta</math> que contiene al centro de la esfera y recta <math>t_1</math> tangente a la esfera (<math>\delta</math> no es perpendicular a <math>t</math>)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/ybjd4cpu">https://www.geogebra.org/m/ybjd4cpu</a></p>	<p>Construir por T plano <math>\pi</math> perpendicular a <math>t</math>  Hallar <math>i = \pi \cap \delta</math>  Tomar plano <math>\alpha</math> definido por T y <math>t_1</math> y construir parábola <math>c</math> de foco en T y directriz en <math>t_1</math>.  Construir cilindro parabólico <math>\Gamma</math> de directriz <math>c</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.  Hallar <math>O = i \cap \Gamma</math> (dos soluciones).  Hallar <math>OT = \text{Radio}</math> (u <math>O'T = \text{Radio}'</math>).</p>
	<p>Recta tangente <math>t</math> con punto de tangencia T, recta tangente <math>t_1</math> y un punto A sobre la superficie esférica (las rectas no son coplanarias)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/ym6fjsa8">https://www.geogebra.org/m/ym6fjsa8</a></p>	<p>Construir plano <math>\pi</math> por T y perpendicular a <math>t</math>.  Construir plano <math>\mu</math> mediador del segmento AT.  Hallar <math>i = \pi \cap \mu</math>.  Construir en el plano <math>\alpha</math> (definido por A y t) una parábola <math>c</math> de foco en A y directriz en la recta <math>t_1</math>.  Construir un cilindro parabólico <math>\Gamma</math> de directriz en la parábola <math>c</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.  Hallar <math>O = i \cap \Gamma</math>  Hallar <math>OA = \text{Radio}</math></p>
	<p>Recta <math>s</math> que contiene al centro de la esfera, recta <math>t</math> tangente a la esfera y un punto A en la superficie esférica (<math>s</math> no es perpendicular al plano definido por A y t)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/vfapz78u">https://www.geogebra.org/m/vfapz78u</a></p>	<p>Construir en el plano <math>\alpha</math> (definido por A y t) una parábola <math>c</math> de foco en A y directriz en la recta <math>t</math>.  Construir un cilindro parabólico <math>\Gamma</math> de directriz en la parábola <math>c</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.  Hallar <math>O = i \cap \Gamma</math> (dos posibles soluciones).  Hallar <math>OA = \text{Radio}</math> (u <math>O'A = \text{Radio}'</math>).</p>
	<p>Recta <math>t</math> tangente a la esfera, dos puntos A y B en la superficie esférica y radio</p>	<p>Construir en el plano <math>\alpha</math> (definido por A y t) una parábola <math>c</math> de foco en A y directriz en la recta <math>t</math>.</p>



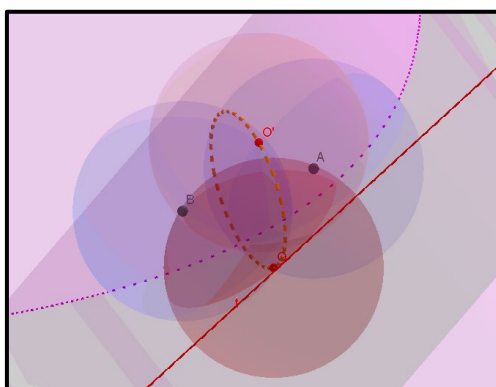
	<p>R de la esfera (R debe ser mayor o igual que AB)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/qrc8bgsp">https://www.geogebra.org/m/qrc8bgsp</a></p>	<p>Construir un cilindro parabólico <math>\Gamma</math> de directriz en la parábola <math>c</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.</p> <p>Construir esferas <math>\Sigma</math> y <math>\Lambda</math> de radio R y centros en A y B, respectivamente.</p> <p>Hallar la circunferencia <math>i = \Sigma \cap \Lambda</math></p> <p>Hallar <math>O = i \cap \Gamma</math> (dos soluciones).</p>
	<p>Dos puntos A y B sobre la superficie de la esfera, plano <math>\tau</math> tangente a la esfera y recta <math>t</math> tangente a la esfera. (AB no es paralela al plano <math>\tau</math>)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/f8hrpvhh">https://www.geogebra.org/m/f8hrpvhh</a></p>	<p>Definir recta <math>m\{A,B\}</math></p> <p>Hallar <math>K = m \cap \tau</math></p> <p>Construir una circunferencia <math>c</math> cualquiera que pase por A y B.</p> <p>Trazar por el punto K tangente(s) a la circunferencia construida; se obtiene <math>T'</math>.</p> <p>Construir un cilindro recto de revolución <math>\Gamma</math> de base en el plano <math>\tau</math> y radio igual a <math>KT'</math>.</p> <p>Construir el plano <math>\mu</math> mediador del segmento AB.</p> <p>Hallar cónica <math>i = \Gamma \cap \mu</math></p> <p>Construir en el plano <math>\alpha</math> (definido por A y t) una parábola <math>d</math> de foco en A y directriz en la recta t.</p> <p>Construir un cilindro parabólico H de directriz en la parábola <math>d</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.</p> <p>Hallar <math>O = i \cap H</math> (dos soluciones).</p> <p>Hallar <math>OA = OB = \text{Radio}</math> (u <math>O'A = O'B = \text{Radio}'</math>).</p>
	<p>Plano <math>\delta</math> que contiene al centro de la esfera, punto A sobre la superficie de la esfera, y dos rectas <math>t</math> y <math>t_1</math> tangentes a la esfera. (t y <math>t_1</math> no son coplanarias ni paralelas al plano <math>\tau</math>)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/cxqqutju">https://www.geogebra.org/m/cxqqutju</a></p>	<p>Construir en el plano <math>\alpha</math> (definido por A y t) una parábola <math>c</math> de foco en A y directriz en la recta t.</p> <p>Construir un cilindro parabólico <math>\Gamma</math> de directriz en la parábola <math>c</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.</p> <p>Construir en el plano <math>\beta</math> (definido por A y <math>t_1</math>) una parábola <math>d</math> de foco en A y directriz en la recta <math>t_1</math>.</p> <p>Construir un cilindro parabólico H de directriz en la parábola <math>d</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\beta</math>.</p> <p>Hallar la cónica <math>i = \Gamma \cap \delta</math></p> <p>Hallar <math>O = i \cap H</math> (dos soluciones).</p> <p>Hallar <math>OA = \text{Radio}</math> (u <math>O'A = \text{Radio}'</math>).</p>
	<p>Dos rectas tangentes <math>t</math> y <math>t_1</math> y dos puntos A y B de la superficie esférica (t y <math>t_1</math> no son coplanarias; AB y t no son coplanarias; AB y <math>t_1</math> no son coplanarias)</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/zaxvf6x">https://www.geogebra.org/m/zaxvf6x</a></p>	<p>Construir en el plano <math>\alpha</math> (definido por A y t) una parábola <math>c</math> de foco en A y directriz en la recta t.</p> <p>Construir un cilindro parabólico <math>\Gamma</math> de directriz en la parábola <math>c</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.</p> <p>Construir en el plano <math>\beta</math> (definido por B y <math>t_1</math>) una parábola <math>d</math> de foco en B y directriz en la recta <math>t_1</math>.</p> <p>Construir un cilindro parabólico H de directriz en la parábola <math>d</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\beta</math>.</p> <p>Construir el plano <math>\mu</math> mediador del segmento AB.</p> <p>Hallar la cónica <math>i = \mu \cap \Gamma</math>.</p> <p>Hallar <math>O = i \cap H</math> (dos soluciones).</p> <p>Hallar <math>OA = OB = \text{Radio}</math> (u <math>O'A = O'B = \text{Radio}'</math>).</p>
	<p>Tres rectas <math>t</math>, <math>t_1</math> y <math>t_2</math> tangentes a la esfera (no coplanarias entre sí dos a dos), conocido el punto de tangente T de la recta t</p> <p><a href="https://www.geogebra.org/m/j6re8xzs">https://www.geogebra.org/m/j6re8xzs</a></p>	<p>Construir en el plano <math>\alpha</math> (definido por T y <math>t_1</math>) una parábola <math>c</math> de foco en T y directriz en la recta <math>t_1</math>.</p> <p>Construir en el plano <math>\beta</math> (definido por T y <math>t_2</math>) una parábola <math>d</math> de foco en T y directriz en la recta <math>t_2</math>.</p> <p>Construir un cilindro parabólico <math>\Gamma</math> de directriz en la parábola <math>d</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\beta</math>.</p> <p>Construir un cilindro parabólico H de directriz en la parábola <math>c</math> y generatrices perpendiculares al plano <math>\alpha</math>.</p> <p>Construir el plano <math>\pi</math> que contiene a T y es perpendicular a la recta t.</p>

		Hallar la cónica $i=\pi\cap\Gamma$ . Hallar $O=i\cap H$ (dos soluciones). Hallar $OT=\text{Radio}$ (u $O'T=\text{Radio}'$ ).
Paraboloide de revolución $\Omega$ de foco en el punto A y plano director en el plano $\tau$ .	Recta $s$ que contiene al centro de la esfera, un punto A sobre la superficie esférica y un plano $\tau$ tangente a la esfera. <a href="https://www.geogebra.org/m/eqnwuqtv">https://www.geogebra.org/m/eqnwuqtv</a>	Construir un paraboloide de revolución $\Omega$ de foco en A y plano director en $\tau$ . Hallar $O=s\cap\Omega$ (dos soluciones). Hallar $OA=\text{Radio}$ (u $O'A=\text{Radio}'$ ).
	Plano $\tau$ tangente con recta de tangencia $t$ , un punto A en la superficie esférica y otro plano tangente $\tau_1$ . <a href="https://www.geogebra.org/m/dsbfbrbj">https://www.geogebra.org/m/dsbfbrbj</a>	Construir el plano $\beta$ bisector de los planos $\tau$ y $\tau_1$ (tomar solución correspondiente al cuadrante o región del espacio limitada por los planos tangentes en la cual se encuentra A). Construir plano $\zeta$ que contenga a $t$ y sea perpendicular al plano $\tau$ . Determinar $i=\zeta\cap\tau$ Construir un paraboloide de revolución $\Omega$ de foco en A y plano director en $\tau_1$ . Hallar $O=i\cap\Omega$ (dos soluciones). Hallar $OA=\text{Radio}$ (u $O'A=\text{Radio}'$ ).
	Plano $\tau$ tangente a la esfera, un punto A en la superficie esférica y una recta tangente $t$ con punto de tangencia T. <a href="https://www.geogebra.org/m/r32833ut">https://www.geogebra.org/m/r32833ut</a>	Construir un paraboloide de revolución $\Omega$ de foco en A y plano director en $\tau$ . Construir plano $\pi$ que contenga a T y sea perpendicular a $t$ . Construir el plano $\mu$ mediador de AT. Hallar $i=\pi\cap\mu$ Hallar $O=i\cap\Omega$ (dos soluciones) Hallar $OT=OA=\text{Radio}$ (u $O'T=O'A=\text{Radio}'$ )
	Plano $\delta$ que contiene al centro de la esfera, punto A sobre la superficie de la esfera, recta $t$ tangente a la esfera y plano $\tau$ tangente a la esfera. ( $t$ no es paralela al plano $\tau$ ) <a href="https://www.geogebra.org/m/rz44x6zp">https://www.geogebra.org/m/rz44x6zp</a>	Construir en el plano $\alpha$ (definido por A y t) una parábola $d$ de foco en A y directriz en la recta $t$ . Crear un cilindro parabólico $\Gamma$ de directriz en la parábola $d$ y generatrices perpendiculares al plano $\alpha$ . Hallar cónica $i=\delta\cap\Gamma$ Construir un paraboloide de revolución $\Omega$ de foco en A y plano director en $\tau$ . Hallar $O=i\cap\Omega$ (dos soluciones). Hallar $OA=\text{Radio}$ (u $O'A=\text{Radio}'$ ).

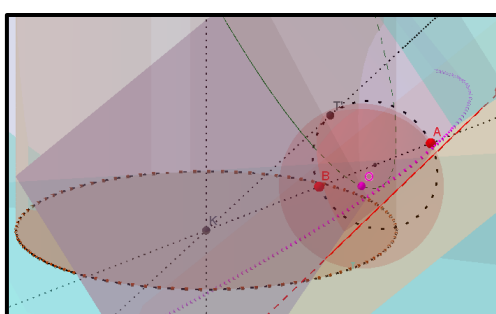
Observe-se que en el Cuadro 4 se encuentran los enlaces que permiten manipular las construcciones hechas en GeoGebra y, a continuación, se presenta algunas imágenes que ilustran las construcciones relacionadas en el Cuadro 4, todas ellas elaboradas empleando la Ventana Gráfica 3D.



**FIGURA 6.** Dos rectas tangentes  $t$  y  $t_1$  (no coplanarias) y dos puntos A y B de la superficie esférica.



**FIGURA 7.** Recta  $t$  tangente a la esfera, dos puntos A y B en la superficie esférica y radio R de la esfera.



**FIGURA 8.** Dos puntos A y B sobre la superficie de la esfera, plano  $\tau$  tangente a la esfera y recta  $t$  tangente a la esfera (AB no es paralela al plano  $\tau$ ).

## CONCLUSIONES

Se ha propuesto las correspondientes secuencias de pasos (algoritmos) para la resolución de veinte casos de determinación del centro y el radio de una esfera, bajo las condiciones y parámetros prescritos por Osers (2006), los cuales, de acuerdo con la revisión preliminar, no han sido informados por autor alguno hasta la fecha. El uso del programa GeoGebra ha representado un valioso recurso de apoyo, como herramienta fundamental en la visualización y validación de las secuencias propuestas, lo cual se puede observar en la descripción de la metodología de trabajo expuesta. Si bien muchos de los casos descritos y resueltos son de difícil representación en el Sistema Diédrico (o cualquier otro) contando con los medios tradicionales de dibujo, la manipulación continua de los lugares geométricos en el proceso de solución de problemas geométricos como los mostrados, no deja de ser un aspecto de especial importancia en el desarrollo y fomento de las capacidades exigidas por el estudio y ejercicio de la ingeniería y la arquitectura.

En general, los casos planteados en el presente trabajo admiten variantes en función de las posiciones relativas de los elementos geométricos dados, también es

de notar que hay casos en que la solución no es única. Los algoritmos propuestos han sido concebidos de la forma más general, de tal suerte que queda abierta la puerta al estudio de variantes particulares o especiales de cada uno de estos casos, así como la construcción de las pruebas matemáticas usando métodos de geometría sintética o analítica.

Asimismo, la solución de los problemas presentados en esta artículo es un interesante material de trabajo para el estudio de la Geometría Descriptiva, con interés para desenvolver conjeturas e exploraciones que se profunden en trabajos de Geometría Analítica, especialmente en los cursos dirigidos a estudiantes de las diversas especialidades de la ingeniería, dado que involucran el tratamiento de superficies cuádricas, así como de intersecciones y relaciones geométricas en el espacio, aspectos de tan especial relevancia como conocimientos previos al estudio de ciencias de los materiales; mecánica de los materiales; diseño estructural; hidráulica; electromagnetismo; entre otros temas de carácter profesional abordados en las escuelas de ingeniería de todo el mundo.

## Referencias

CASTILLA, A. et al. **Foro de Trazoide. Dibujo Técnico, Geometría y CAD.** Disponible en: <<https://trazoide.com/foro/index.php>> Acceso en: 20 de enero de 2020.

DI PIETRO, D. **Geometría Descriptiva.** Buenos Aires: Librería y Editorial Alsina, 1962. Disponible en: <<https://archive.org/details/GeometraDescriptivaDonatoDiPietro>> Acceso en: 21 de febrero de 2021

FONT ANDREU, J. et al. *Aplicación práctica de métodos 2D para el modelado geométrico 3D. XVIII Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica: diseño e innovación: actas del congreso: Sitges 31 de Mayo, 1 y 2 de Junio de 2006.* Sitges, Barcelona. Disponible en: <<https://www.semanticscholar.org/paper/Aplicaci%C3%B3n-pr%C3%A1ctica-de-m%C3%A9todos-2D-para-el-modelado-Andreu-Abad/51785eef270b3343258405bb8d61b3e7e463042d>> Acceso en: 12 de febrero de 2020.

GORDON, V.O.; IVANOV, Y. E. e SOLNTSEVA, T. E. **Problemas de Geometría Descriptiva.** Moscú: Editorial Mir, 1974.

GORDON, V. O.; SEMENTSOV, M. A. e OGUIYEVSKI, O; **Curso de geometría descriptiva.** Mir, 1973.

LEHMANN, C. **Geometría Analítica.** México: Editorial Limusa. México, 2006.

MONGE, G. (1827). **Géométrie Descriptive. Augmentée d'une Théorie des Ombres et de la Perspective.** (5° Ed.). París: Bachelier, 1827.

OSERS, H. **Estudio de Geometría Descriptiva** (13° Ed.). Caracas: Editorial Torino, 2006.

PUIG ADAM, P. **Curso de Geometría Métrica.** Tomos I y II (14° Ed.). Madrid: Gómez Puig Ediciones, 1979.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. **Geometría Descriptiva. Sistema Diédrico.** Barcelona, España: Casa Editorial Bosch, 1958.

RONDÓN, A. y TÉLLEZ, M. **Sistemas de Representación.** Mérida, Venezuela: Consejo de Publicaciones de la Universidad de Los Andes, 1985.

SCHUMANN, H. *Introduction to Conics with Cabri 3D.* **Revista EduMath 20**, 2005. Disponible en: <[http://hkame.vela.hk/uploaded\\_files/magazine/20/354.pdf](http://hkame.vela.hk/uploaded_files/magazine/20/354.pdf)>. Acceso en: 10 de enero de 2020.