



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i1p092-107>

O software GeoGebra como aporte para o Ensino de Matemática e aplicação em sequências numéricas

The software GeoGebra as a contribution to mathematics teaching and application on numeric sequences

RANNYELLY RODRIGUES DE OLIVEIRA¹

JOÃO LUZEILTON DE OLIVEIRA²

RUI EDUARDO BRASILEIRO PAIVA³

ANTÔNIA EMANUELA OLIVEIRA DE LIMA⁴

RESUMO

Neste trabalho, discutimos o uso das tecnologias em sala de aula como um elemento facilitador, que permite redimensionar o cenário educacional, a fim de se realizar situações de ensino que possibilitem uma aprendizagem eficaz. Para tanto, foi utilizado como aporte teórico autores que discutem metodologias ativas, propostas metodológicas, pelas quais os professores buscam sugerir atividades que oportunizem aos alunos participarem ativamente do processo de ensino e aprendizagem. Apresentou-se o GeoGebra como um exemplo dessas metodologias. Tendo em vista que o software permite explorar conceitos matemáticos geométricos e algébricos, são discutidos dois problemas sobre sequências oriundas de relações de recorrência, oportunizando a verificação de conjecturas associadas às relações. A pesquisa se caracterizou como qualitativa, do tipo bibliográfica, e objetiva, um estudo exploratório. Conclui-se que o software GeoGebra, como uma ferramenta para o Ensino de Matemática, pode ser usado com a finalidade de proporcionar a mobilização do pensamento intuitivo do estudante em direção ao raciocínio inferencial/generalizador.

Palavras-chave: *GeoGebra; Ensino de Matemática; Relações de recorrência; Metodologias Ativas.*

ABSTRACT

In this work, we discuss the use of technologies in the classroom as a facilitating element, which allows resizing the educational scenario, in order to carry out teaching situations that enable effective learning. To this end, authors who discuss active methodologies, methodological proposals, were used as a theoretical contribution, by which teachers seek to suggest activities that enable students to actively participate in the teaching and learning process. GeoGebra was presented as an example of these methodologies. Bearing in mind that the software allows exploring geometric and algebraic mathematical concepts, two problems about sequences arising from recurrence relations are discussed, allowing the verification of conjectures associated with the relations. The research was characterized as qualitative, bibliographic, and

¹Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN - nanny-rockstar@hotmail.com

²Universidade Estadual do Ceará - UECE - joao.luzeilton@uece.br

³Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE - ruibrasileiro@ifce.edu.br

⁴Universidade Federal do Ceará - UFC - emanuela.lima@ufc.br

objective, an exploratory study. It is concluded that the GeoGebra software, as a tool for the Teaching of Mathematics, can be used with the purpose of providing the mobilization of the student's intuitive thinking towards inferential/generalizing reasoning.

Keywords: *GeoGebra; Mathematics Teaching; Recurrent relations; Active Methodologies.*

Introdução

No Ensino de Matemática, na Educação Básica, a Geometria é organizada em três seções: plana, espacial e analítica. No contexto da Geometria Analítica, os conceitos e as propriedades de ordens plana e espacial são explorados a fim de compreendê-los algebricamente. Todavia, para tentar ultrapassar alguns obstáculos, pensa-se em facilitar a visualização dessas estruturas, representando-as graficamente no *software* GeoGebra. Sales, Cunha, Gonçalves, Silva e Santos (2017) explicam que o maior obstáculo para se realizar uma aprendizagem eficaz, é o fato de que os alunos não se sentem estimulados a participar ativamente do seu processo de construção de conhecimento.

Há uma grande possibilidade de efetivar esse processo, pois, em consequência do crescente avanço tecnológico, pode-se observar que os alunos estão cada vez mais conectados a esses recursos, tais como celulares, *notebooks* e *tablets*. Fato para cogitar a possibilidade de usar as tecnologias como aparato para desenvolver situações de ensino. “Esta temática tem sido alvo de estudo de educadores, que buscam alternativas para tentar contornar esta situação e transformar os espaços de aprendizagem em locais mais agradáveis” (SALES; CUNHA; GONÇALVES; SILVA; SANTOS, 2017, p.46).

Nesse contexto, é relevante discutir sobre as metodologias ativas que, segundo Valente, Almeida e Geraldini (2017), são definidas para representar propostas de ensino concebidas pelo docente e, quando aplicadas em sala de aula, oferecem situações de ensino que oportunizam aos alunos participarem ativamente do seu processo de aprendizagem. Os autores, Sales, Cunha, Gonçalves, Silva e Santos (2017) salientam que o uso das tecnologias digitais na sala de aula possibilita a transformação de saberes científicos em um conteúdo a ser ensinado por meio da transposição didática.

Destarte, este trabalho propõe a discussão de dois problemas que abordam conceitos matemáticos algébricos inerentes às sequências numéricas oriundas de relações de recorrência. O primeiro, é a sequência definida pela recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$, com $a_1 = 8$ e $a_2 = 18$; e $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, e o segundo, um problema de uma competição matemática (Putnam), ambos com amparo na tecnologia, especificamente, no *software* GeoGebra. Além disso, serão apresentadas algumas construções nesse *software* realizadas durante a resolução dos problemas.

A priori, essas construções dão suporte para que o aluno compreenda o raciocínio envolvido nas etapas de construção da planilha e elaboração de conjecturas.

Quanto à metodologia, o presente trabalho se caracterizou como uma pesquisa qualitativa, do tipo bibliográfica e exploratória. Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos. A análise qualitativa preocupa-se com aspectos da realidade que não podem ser quantificados (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). No caso deste trabalho, a explicação se volta para as metodologias ativas como promotoras de propostas inovadoras no Ensino da Matemática.

Quanto aos procedimentos técnicos, por fazer levantamento de informações em artigos e livros diversos, a pesquisa foi bibliográfica. Segundo Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa bibliográfica é realizada a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites, etc.

Já, quanto aos objetivos, tratou-se de uma pesquisa exploratória, que “têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores” (GIL, 2008, p. 27). Ainda, conforme Gil (2008), esse tipo de pesquisa, que apresenta menor rigidez no planejamento e busca uma visão geral sobre o fato, é especialmente aplicado quando o tema escolhido é pouco abordado. Considerou-se que este é o caso da pesquisa em questão, visto que, do ponto de vista do *software* como ferramenta de apoio nas aulas de Matemática, as planilhas apresentadas nesse trabalho são pouco utilizadas em relação às outras janelas: 2D e 3D. Quanto aos assuntos trabalhados pelos professores com o apoio do GeoGebra, os conteúdos algébricos, em especial recorrências, tema discutido no presente trabalho, são poucos explorados quando comparados com os conteúdos de Geometria.

1. O Uso das tecnologias em situações de ensino no contexto das metodologias ativas

Segundo Sales (2005), no início dos anos 70, o computador chega às universidades com a finalidade de auxiliar no processo educacional. Em 1979, a sociedade passa a adquirir o microcomputador PC (*Personal Computer*), de uso individual, dando início a sua difusão no ensino. Nesse sentido, Tarouco, Fabre, Grandó e Konrath (2004) destacam a expressão Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), usada para representar os recursos: *internet, softwares*

educacionais, vídeos, áudios, dentre outros. Tais recursos são usados como um aporte tecnológico utilizado em sala de aula, a fim de otimizar a aprendizagem e também expandir o ensino para a modalidade à distância e possibilitar o acesso ao ensino das pessoas que não tem como se deslocar a uma instituição de ensino. De fato, Webber e colaboradores (2016, p.3) acentuam que:

[...] as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) têm possibilitado que cada vez mais pessoas tenham acesso a conhecimentos que outrora eram essencialmente adquiridos na escola, provocando modificações na forma de se ver e se entender a educação. Elas têm modelado o comportamento intelectual, afetivo e social dos estudantes, dentro e fora da escola, devido aos variados recursos que a tecnologia oferece para desenvolver diferentes atividades.

Vale ressaltar que, o computador é uma ferramenta recursiva para as metodologias de ensino e, dessa forma, deve ser usado com enfoques pedagógicos. Com base no trabalho de Tarouco, Fabre, Grandó e Konrath (2004), Comportamentalismo, Cognitivismo, Construtivismo e Humanismo podem ser citados como pressupostos teóricos usados para se elaborar propostas de ensino numa abordagem tecnológica.

Os autores supracitados descrevem que o enfoque Comportamentalista (Behaviorista) tem como objetivo o desenvolvimento psicomotor, ao utilizar a tríade: estímulo-resposta-reforço, pois, baseando-se nas concepções de Skinner, a aprendizagem acontece a partir de um estímulo do meio sobre o sujeito, o qual reage. Quando essas respostas passam a ser mais frequentes, tem-se o que se chama de “reforço” e, como resultado, o hábito. Nesse aspecto, Skinner propõe a “Máquina de ensinar”, que trabalha com o *feedback* imediato, que é importante na aprendizagem mecânica, pois evita que aluno tenha ansiedade sobre se ele acertou ou errou determinada atividade, além de permitir ao estudante avançar na aprendizagem no seu próprio ritmo.

Por outro lado, o paradigma humanista busca desenvolver a inteligência e formar o caráter e a personalidade do educando, por meio da dialogicidade, e de uma relação horizontal entre professor e aluno, em atividades cooperativas, baseadas em experiências e necessidades individuais. Nesse sentido, Paulo Freire, que prega a pedagogia da libertação e critica a pedagogia tradicional, a chama de “educação bancária”, ou seja, um ensino em que o estudante participa de forma passiva (TAROUCO; FABRE; GRANDÓ; KONRATH, 2004).

Numa outra vertente, o Construtivismo de Piaget tem como escopo principal o desenvolvimento mental de natureza psicológica, com ênfase na cognição,

considerada como fator relevante na aquisição de conhecimento. Para isso, a aprendizagem acontece quando a assimilação sofre acomodação, com o estudante sendo o sujeito ativo do processo. No Construtivismo, a aprendizagem acontece a partir da interação entre o conhecimento novo e o existente na estrutura cognitiva (Nível de Desenvolvimento Real e Zona de Desenvolvimento Proximal). O Construtivismo, também, aborda a Teoria sociointeracionista de Vygotsky, no que diz respeito à interação do sujeito com o seu meio social e cultural, de modo ativo e investigador (TAROUCO; FABRE; GRANDO; KONRATH, 2004).

Em vista disso, pode-se compreender o Construtivismo como elemento de completude para o Cognitivismo, e que tal articulação designa o entendimento de que o estudante deve participar ativamente do seu processo de aprendizagem, a fim de mobilizar seus conhecimentos prévios e seu pensamento intuitivo em direção ao raciocínio inferencial. Assim, os enfoques cognitivista e construtivista são os pressupostos para a investigação dos problemas abordados neste artigo.

Nessa perspectiva, Valente e colaboradores (2017, p. 464) destacam as metodologias ativas, que são propostas de situações de ensino, as quais permitem o estudante participar ativamente do seu processo de ensino e aprendizagem, “envolvendo-os de modo que eles sejam mais engajados, realizando atividades que possam auxiliar o estabelecimento de relações com o contexto, o desenvolvimento de estratégias cognitivas e o processo de construção de conhecimento” (OLIVEIRA; PANIAGO; CORDEIRO; SILVA, 2018).

O uso das tecnologias em sala de aula exige que o professor resignifique sua prática docente, considerando os seguintes processos: tecnológico, pedagógico e formativo. O processo tecnológico estabelece relação com as expectativas eficazes que as tecnologias podem proporcionar no contexto educacional. O segundo processo aborda a definição de objetivos didáticos e qual percurso metodológico será aplicado para alcançá-los. Finalmente, o processo formativo refere-se ao “desenvolvimento da atividade e inclui a recriação e redefinição dos procedimentos de uso dos instrumentos utilizados” (CARNEIRO; PASSOS, 2014, p. 104).

Todavia, para que essa redimensão da prática pedagógica do professor tenha resultados significativos nas situações de ensino, é necessário que os três processos estejam intrinsecamente articulados, a fim de que a potencialidade dos recursos tecnológicos possibilite a realização de situações formativas relevantes (CARNEIRO; PASSOS, 2014). Ainda nesse contexto, acontece uma mudança de concepção de como o aluno é visto, ou seja, os estudantes são nominados de “nativos digitais”, terminologia dada por Prensky (2001). Com isso, de acordo com Webber

e colaboradores (2016, p. 4), pode-se compreender um processo de transposição informática, que:

[...] integra a dimensão didática e informática nos processos de ensino e aprendizagem, favorecendo repensar a estrutura educativa, o tipo de atividades e recursos didáticos utilizados em sala de aula, bem como os conteúdos ensinados, o papel do professor e da educação frente ao avanço tecnológico mundial. A partir da introdução dos recursos tecnológicos na educação, através de jogos e softwares educativos, tem-se a oportunidade de redimensionar as concepções sobre a aprendizagem, supondo-se alterações não só na organização habitual da sala de aula, como também, na maneira de se estruturar o processo educativo.

Por conseguinte, conforme Webber e colaboradores (2016, p.3), a inserção das tecnologias nos ambientes de ensino propõe uma reestruturação do modelo de ensino atual. Desse modo, possibilita a mobilização de elementos de ordem cognitiva, que dizem respeito à compreensão de novos mecanismos usados para relacionar espaço e tempo, monitorar a memória, desenvolver habilidade de modelar o real e expressar o conhecimento construído de maneiras diferentes. Portanto, a presença das tecnologias no ensino gera modificações nas situações inerentes à transposição didática, fazendo com que as exigências e preocupações com os processos de ensino e aprendizagem também vão exigir outros estímulos e respostas, tanto por parte do estudante, quanto parte do professor. A seguir, será discutida a abordagem do *software* GeoGebra no Ensino de Matemática.

2. O *software* GeoGebra e o percurso metodológico ativo

A concepção de *softwares* educativos apresenta duas fundamentações teóricas: uma de dimensão tecnológica e outra de natureza psicopedagógica. Dessa forma, no enfoque tecnológico, compreende-se que na informática, mais especificamente, os *softwares*, são recursos para auxiliar o processo de construção de conhecimento. Assim, as teorias de ensino são consideradas como paradigmas psicopedagógicos, e que são usados como pressupostos para o uso das tecnologias no âmbito educacional (SALES, 2005).

Segundo Sales (2005), ainda existe uma resistência por parte dos docentes, quanto ao uso das tecnologias na sala de aula, pois eles não compreendem que, “como tecnologia intelectual, os *softwares* educativos podem ampliar as nossas capacidades cognitivas”. Nesse sentido, conforme Sales (2005, p. 9), os *softwares* educacionais permitem a simulação e modelagem que:

Possibilitam ao interagente experienciar situações em nível conceitual das práticas de laboratório, que, por se revestirem de

complexidade ou riscos, tornam-se seguras nos ambientes de simulação. Para tanto, é necessário fornecer um modelo (modelagem) (...) usando a linguagem matemática, que devidamente implementado no *software* serve para criar simulações interativas. A fase da modelagem assemelha-se à atividade de programação.

À luz dessas situações, nesta seção, considerando as potencialidades que as tecnologias podem proporcionar ao processo de ensino e aprendizagem no contexto das metodologias ativas, será discutido o GeoGebra, que é um *software* educativo livre que funciona de modo *online* e *offline*, com três janelas de visualização: Álgebra, 2D e 3D (Figura 1), desenvolvido para o Ensino de Matemática, que permite construir representações gráficas interativas com a finalidade de explorar conceitos matemáticos algébricos e geométricos. É considerado ainda como um software de Matemática Dinâmica, gratuito, criado por Markus Hohenwarter, e desenvolvido para o ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática, do Ensino Fundamental ao Ensino Superior. O GeoGebra reúne, em um único ambiente, Geometria, Álgebra, Probabilidade, Estatística, tabelas, gráficos e cálculos simbólicos.

Segundo Alves (2012b, p. 493), o GeoGebra é usado com a finalidade de complementar as situações de ensino; além disso, proporciona momentos de resolução de atividades investigativas, irrealizáveis quando são aplicadas em um contexto de ensino que se usa somente lápis e papel, apoiado “apenas na reprodução automática de técnicas algorítmicas sofisticadas, embora, em várias circunstâncias, desprovidas de significado conceitual para o aprendiz”. Nesse sentido, o GeoGebra oportuniza explorar conceitos da Álgebra e da Geometria, e podem ser trabalhados conceitos e propriedades de figuras planas e de corpos sólidos. Vale ressaltar ainda que no contexto da Geometria Analítica, o *software* possibilita explorar a construção de duas representações: algébrica e geométrica, inerentes à Geometria Plana e Espacial. Isso contribui para que o aluno aprenda conceitos e propriedades, trabalhados em situações de ensino, e expresse os conhecimentos adquiridos “tanto de forma algébrica, quanto de forma geométrica e entendendo que se trata do mesmo objeto” (CARLOS, 2017, p. 13).

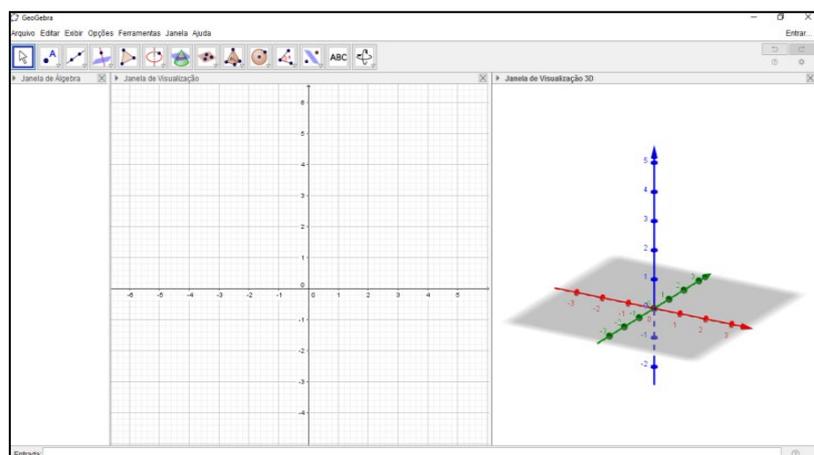


FIGURA 1: Tela inicial do *software* GeoGebra.

FONTE: Acervo dos autores.

Além do mais, considerando que as generalizações asseguram a validade das propriedades e teoremas oriundos das definições matemáticas, Carlos (2017) explica que o uso do GeoGebra, no Ensino de Matemática, é muito relevante no desenvolvimento do raciocínio generalizador do estudante. Tendo em vista que o GeoGebra tem um comando de sequência, isto favorece as generalizações, como por exemplo, por meio das representações de corpos geométricos partindo de uma equação dada, variando seus parâmetros com o controle deslizante.

Esse *software* oportuniza ainda explorar e discutir, concomitantemente, as representações gráficas de formas algébricas, ampliando o campo de compreensão dos alunos sobre o conteúdo estudado. Vale salientar que, um aspecto relevante para o uso desse comando, é que se faz necessário entender os “significados matemáticos por meio do conjunto de relações entre signos e seus significados que serão utilizados” (CARLOS; NOTARE, 2016, p.3). Destarte, Alves (2012a, p.49) acentua:

[...] a importância do domínio e entendimento das argumentações formais atinentes aos teoremas e propriedades [...] discutidos, entretanto, a mera inspeção e reprodução de cadeias dedutivas de inferências lógicas, exigidas em cada demonstração, não asseguram um entendimento conceitual e intuitivo dos mesmos. Sendo assim, neste cenário, o GeoGebra adquire um papel diferenciado, no sentido de potencializar determinadas abordagens e viabilizar a evolução de um raciocínio heurístico distinguido.

Em vista disso, além das janelas de visualização para Álgebra e Geometria, o *software* possui uma planilha de cálculos que permite explorar o comportamento de termos gerados a partir de relações de recorrências. A seguir, com aporte no

GeoGebra, serão discutidos dois problemas que envolvem relações de recorrências para determinação de sequências.

3. Problemas propostos

A visualização no *software* GeoGebra proporciona uma situação que mobiliza o pensamento intuitivo do aluno, a fim de instigar seu pensamento ativo que é observado quando ele começa a interagir com o *software*, assim, permitindo-o desenvolver um raciocínio inferencial. Tendo em vista isso, nesta seção, serão discutidos dois problemas (Quadros 1 e 2) que abrangem relações de recorrência e a determinação de sequências.

No Problema 1, que segue, o *software* é utilizado com a finalidade de avaliar o comportamento da relação de recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, e $a_1 = 8$, $a_2 = 18$, e auxiliar na formulação e verificação de conjecturas.

PROBLEMA 1: Uma sequência é definida por $a_1 = 8$, $a_2 = 18$ e $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$, para todo inteiro $n \geq 1$. Determine todos os valores de n para os quais a_n é um quadrado perfeito.

Quadro 1. Problema sobre relações recorrentes e sequências.

Para investigar o problema proposto, foi utilizado a planilha do GeoGebra (mas não somente ela). Assim, usando a fórmula “**Fatores** [<número>]”, foi conjecturado que

$$3|n \Rightarrow a_n \text{ é um quadrado perfeito (Figura 2),}$$

ou seja, os termos que estão numa posição divisível por 3 são quadrados perfeitos. Contudo, nas Figuras 2 e 3, pode-se observar que os valores que a planilha fornece a partir de a_8 não estão corretos. Basta olhar para os algarismos das unidades dos números das células B7 e B8 que são, respectivamente, 6 e 8, que o produto entre eles jamais resultará em número que tem 0 como algarismo das unidades.

apenas números pares, pois o expoente do fator 3 é a soma de dois números pares, e a sequência $(3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, \dots, 60, \dots, i_n, \dots)$ possui uma subsequência $(i_3 = 4, i_6 = 14, i_9 = 60, i_{12} = 254, \dots)$ constituída apenas de números pares, o que valida a conjectura.

	A	B	C	D
1	a_0	Valor	Fatoração	
2	a_1	8	$(2 \ 3)$	
3	a_2	18	$(2 \ 1)$ $(3 \ 2)$	
4	a_3	144	$(2 \ 4)$ $(3 \ 2)$	
5	a_4	2592	$(2 \ 5)$ $(3 \ 4)$	
6	a_5	373248	$(2 \ 9)$ $(3 \ 6)$	
7	a_6	967458816	$(2 \ 14)$ $(3 \ 10)$	
8	a_7	361102068154368	$(2 \ 23)$ $(3 \ 16)$	
9	a_8	349351379311776200000000	?	
10				
11				

FIGURA 3: Planilha do GeoGebra: fatoração.
FONTE: Elaboração dos autores.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Termos	Expoente do fator 2	Termos	Expoente do fator 3						
2	i_1	3	j_1	0						
3	i_2	1	j_2	2						
4	i_3	4	j_3	2						
5	i_4	5	j_4	4						
6	i_5	9	j_5	6						
7	i_6	14	j_6	10						
8	i_7	23	j_7	16						
9	i_8	37	j_8	26						
10	i_9	60	j_9	42						
11	i_{10}	97	j_{10}	68						
12	i_{11}	157	j_{11}	110						
13	i_{12}	254	j_{12}	178						
14	i_{13}	411	j_{13}	288						
15	i_{14}	665	j_{14}	466						
16	i_{15}	1076	j_{15}	754						
17	i_{16}	1741	j_{16}	1220						
18	i_{17}	2817	j_{17}	1974						
19	i_{18}	4558	j_{18}	3194						

FIGURA 4: Planilha do GeoGebra com alguns valores das sequências i_n e j_n .
FONTE: Elaboração dos autores.

O Problema 2, a seguir, trata de uma questão proposta na Putnam – 1990. A Putnam é uma competição sobre problemas matemáticos promovida pela *Mathematical Association of America – MAA*.

PROBLEMA 2 (Putnam - 1990): Sejam $T_0 = 2, T_1 = 3, T_2 = 6$ e, para $n \geq 3$,

$$T_n = (n + 4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n - 8)T_{n-3}$$

os primeiros termos são: 2, 3, 6, 14, 40, 152, 784, 5168, 40576. Determine, com uma prova, uma fórmula para T_n da forma $T_n = A_n + B_n$, onde (A_n) e (B_n) são seqüências bem conhecidas.

Quadro 2. Questão 1 – Putnam (1990).

Nas Figuras 5 e 6 têm-se a validade da fórmula para alguns valores de n .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	T_n	T_{n-1}	T_{n-2}	T_{n-3}		A_n	B_n
2	0	2	-	-	-			
3	1	3	2	-	-			
4	2	6	3	2	-			
5	3		6	3	2		6	
6	4			6	3			
7	5				6			
8	6							
9	7							
10	8							
11	9							
12	10							

FIGURA 5: Visualizando a fórmula de A_n , para o caso $n = 3$, na barra de fórmulas.

FONTE: Elaboração dos autores.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	T_n	T_{n-1}	T_{n-2}	T_{n-3}		A_n	B_n
2	0	2	-	-	-			
3	1	3	2	-	-			
4	2	6	3	2	-			
5	3	14	6	3	2		6	8
6	4			6	3			
7	5				6			
8	6							
9	7							
10	8							
11	9							
12	10							

FIGURA 6: Visualizando a fórmula de B_n , para o caso $n = 3$, na barra de fórmulas, e $T_3 = A_3 + B_3 = 14$.

FONTE: Elaboração dos autores.

Neste problema, por meio de simples investigações na planilha do GeoGebra, conjectura-se que $A_n = n!$ e $B_n = 2^n$, isto é, $T_n = n! + 2^n$. A partir de simulações (Figuras 5 e 6), podemos testar a fórmula para alguns valores de n , a partir de 0, explorando várias instâncias do problema (tantas quantas forem necessárias para compreender o processo solucionador do problema) e, dessa forma validar tal conjectura. A demonstração é feita através de métodos (argumentos) matemáticos, e pode ser feita por indução matemática. Para isto, suponha que $T_n = n! + 2^n$ é válida para todo inteiro não negativo menor do que n , mostrando assim, que $T_n - n! = 2^n$, ou seja, que $T_n = n! + 2^n$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 0$ e, em seguida, mostra-se que $T_{n+1} = (n + 1)! + 2^{n+1}$.

Finalmente, podemos categorizar as etapas da solução discutida nos parágrafos anteriores em momentos de ação, formulação e validação. Nesse viés, podemos observar que a etapa de ação se inicia com a sugestão de usar o GeoGebra para auxiliar na solução da questão. As conjecturas e hipóteses assumidas durante a construção no *software* marcam a mobilização do raciocínio inferencial, assim sendo, caracterizam a etapa de formulação.

Vale destacar a relevância de se inserir uma tecnologia como o GeoGebra na resolução de um problema que envolve sequências, pois, esse *software* possibilita a visualização de tabelas semelhantes as que são construídas no *Microsoft Excel*. Outro fator importante, é quanto ao caráter dinâmico do *software*; de fato, quando um elemento é alterado na janela de álgebra, também é alterado nas janelas de visualização em duas ou três dimensões, bem como na planilha de cálculo, e vice-versa. Ver trabalhos de Bruginsky (2014), Pereira (2017) e Vieira Filho (2019).

No caso da planilha, o valor resultante de uma fórmula ou operação pode ser alterado quando outros valores da planilha forem alterados. Além disso, os cálculos são realizados automaticamente, sempre que os valores forem inseridos. Assim, no problema proposto, tem-se a construção de termos que formam uma sequência numérica que segue um padrão e, cada termo admite uma tipologia de fórmula de determinação, chamada de relação de recorrência. Além do mais, a relação de recorrência é obtida a partir da observação do comportamento dos termos da sequência. Contudo, essa recursividade é generalizada por um processo formal denominado de demonstração por indução matemática. Dessa forma, esse tipo de situação didática oportuniza o desenvolvimento de um raciocínio inferencial partindo de um pensamento intuitivo.

Considerações finais

Este trabalho apresentou uma discussão sobre metodologias ativas utilizando as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), tais como *internet*, *softwares* educacionais, vídeos, áudios, dentre outros, que são usadas em sala de aula com a finalidade de resignificar o contexto educacional, de modo que haja uma aprendizagem eficaz e ativa. As construções apresentadas na seção anterior, compreenderam uma proposta didática que, quando realizada juntamente com os alunos, permite instigar o comportamento ativo do estudante, mesmo por meio da interação com o *software* GeoGebra a fim de internalizar os conceitos, formular conjecturas e verificar as relações de recorrência e sequências inerentes ao objeto investigado.

No âmbito tecnológico, foi dado ênfase ao uso do *software* GeoGebra e, dessa forma, compreendeu-se a relevância desse *software* no Ensino de Matemática, pois atua como uma ferramenta tecnológica no ensino das representações algébricas e geométricas. Além do mais, a interação com o *software*, possibilita que o aluno/usuário desenvolva um raciocínio inferencial e/ou generalizador quantos aos conceitos matemáticos explorados, partindo da mobilização do pensamento intuitivo e de conhecimentos prévios, o que permite desenvolver um percurso metodológico ativo nas situações de ensino e aprendizagem.

Referências

ALVES, F. R. V. Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do software GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA. 2012a, p. 48 - 55. Montevideú. **Anais do Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra** Disponível em: <http://www.GeoGebra.org/2012/actas/73.pdf>. Acessado em: 12 jun. 2017.

ALVES, F. R. V. Transição interna do cálculo: uma discussão do uso do GeoGebra no contexto do cálculo a várias variáveis. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA. 2012b, p. 492 - 499. Montevideú. **Anais do Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**.

BRUGINSKI, W. J. **Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software GeoGebra para o estudo de funções trigonométricas**. 54 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Matemática) – Universidade Federal Tecnológica do Paraná. Curitiba, 2014.

CARLOS, M. L. **Parâmetros no GeoGebra na construção de circunferências: Um Estudo Sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3º Ano do Ensino Médio**. 145 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante

em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2017.

CARLOS, M. L.; NOTARE, M. R. Parâmetros no GeoGebra: Um Estudo sobre a Circunferência. **RENOTE**, v. 14, n. 2, p. 1 - 10, 2016.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades. **Revista Eletrônica de Educação**, v.8, n. 2, 2014, p. 101 - 119.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo, Atlas. 6ª ed. 2008.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T (Orgs). **Métodos de pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. (Série Educação a Distância). Porto Alegre, Editora da UFRGS. 2009.

GERRITY, G. Computer Representation of Real Numbers. **IEEE Transactions on Computers**, v. 31, n. 08, p. 709 - 714, 1982.

OLIVEIRA, P. F.; PANIAGO, R.; CORDEIRO, M. G. M.; SILVA, N. V. **Práticas de Ensino de Ciências no Ensino Fundamental ancoradas na Pedagogia**. Rio Verde: 4º ELICPIBID – Encontro de Licenciaturas e PIBID do Sudoeste Goiano, 2018. Disponível em <http://www.https://www.ifgoiano.edu.br/home/index.php/eventos-institucional/7101-3-elped-e-4-encontro-de-licenciaturas-e-do-pibid-do-sudoeste-goiano-elicpibid.html>. Acesso em: 16 jan. 2021.

PEREIRA, G. G. **Uma Proposta Didática para o Ensino de Funções de Variável Complexa no Ensino Médio Usando Planilha Eletrônica**. 95 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande, 2017.

PRENSKY, M. Digital natives, digital immigrants part 1. **On the horizon**, v. 9, n. 5, p. 1 - 6, 2001. Disponível em: <http://www.marcprensky.com/writing/prensky%20-%20digital%20natives,%20digital%20immigrants%20-%20part1.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2016.

SALES, G.L.; CUNHA, J. L. L.; GONÇALVES, A. J.; SILVA, J. B.; SANTOS, R. L. Gamificação e ensinagem híbrida na sala de aula de física: metodologias ativas aplicadas aos espaços de aprendizagem e na prática docente. **Conexões: ciência e tecnologia**, v. 11, n. 2, p. 45 - 52, 2017.

SALES, G. L. **Quantum: um software para aprendizagem dos conceitos da física moderna e contemporânea**. 92 f. Dissertação (Mestrado Integrado Profissional em Computação) – Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2005.

TAROUCO, L. M. R.; FABRE, M. C. J. M.; GRANDO, A. R. S.; KONRATH, M. L.P. **Objeto de Aprendizagem para M – Learning**. Florianópolis: SUCESU – Congresso Nacional de Tecnologia da Informação e Comunicação, 2004. Disponível em: <<http://www.cinted.ufrgs.br/CESTA/cestapublic.html>> Acesso em: 20 jun. 2017.

VALENTE, J.A.; ALMEIDA, M. E. B de; GERALDINI, A. F. S. Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 17, n. 52, p. 455 - 478, 2017.

VIEIRA FILHO, W. T. **MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA PROPOSTA PARA A RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA DO MATERIAL DA ENEF TENDO COMO FERRAMENTA O GEOGEBRA**. 89 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas, 2019.

WEBBER, C. G. et al. Reflexões sobre o software scratch no ensino de ciências e matemática. **RENOTE**, v. 14, n. 2, 2016.

Recebido em 18/01/2021