http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i3p005-016

Una experiencia de geometría en el nivel superior para explorar, modelizar y validar [1]

A superior level geometry experience to explore, model, and validate

MARÍA CECILIA PAPINI [2]
https://orcid.org/0000-0002-0770-7151
MAURO NATALE [3]
https://orcid.org/0000-0002-3108-1187
ANA PAULA MADRID [4]
https://orcid.org/0009-0005-3540-9222
SILVANA SORIA [5]
https://orcid.org/0009-0006-2272-1708
MARIELA BALCARCE [6]
https://orcid.org/0009-0007-7834-6801

Resumo

Neste artigo propomos compartilhar uma sequência de problemas de geometria para trabalhar com o GeoGebra no ensino superior, algumas das reflexões que produzimos a partir do trabalho com ela em sala de aula e as análises anteriores e posteriores que fizemos como grupo de pesquisa. A equipe de trabalho é composta por um grupo de professores e pesquisadores, professores de matemática, que desenvolvem atividades no escolas secundárias, institutos terciários e nos primeiros anos da Faculdade de Ciências Exatas da Universidade Nacional do Centro da Província de Buenos Aires (sede Tandil, Buenos Aires, Argentina). Incluímos no texto a sequência de problemas, uma possível organização do trabalho com ela em sala de aula, justificativas e contribuições para a organização proposta, recursos e possíveis modelos em GeoGebra e exemplos para enriquecer as interpretações dos leitores. Este trabalho busca trazer contribuições teórico-metodológicas para o ensino-aprendizagem de conceitos geométricos e GeoGebra em salas de aula de nível superior.

Palavras chave: *Ensino de geometria; GeoGebra na resolução de problemas; Processos de validação.*

---

[1] Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
[2] ECienTec, UNICEN - mcpapini@gmail.com
[3] NUCOMPA, UNICEN - natale.doc@gmail.com
[4] NUCOMPA, UNICEN - apmadrid@gmail.com
[5] ECienTec, UNICEN - silvanasoria85@gmail.com
[6] ECienTec, UNICEN - maribalcarce2@gmail.com

Resumen

En este artículo nos proponemos compartir una secuencia de problemas de geometría para trabajar con GeoGebra en nivel superior, algunas de las reflexiones que produjimos a partir del trabajo con ella en el aula y los análisis previos y posteriores que hicimos como grupo de investigación. Conformamos el equipo de trabajo un grupo de docentes e investigadores, profesores de matemática, que desarrollamos actividades docentes en escuelas secundarias, nivel superior y en los primeros años de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (sede Tandil, Buenos Aires, Argentina). Incluimos en el texto la secuencia de problemas, una posible organización del trabajo con ella en el aula, justificaciones y aportes para la organización propuesta, los recursos y modelos posibles en GeoGebra y ejemplos para enriquecer las interpretaciones de los lectores. Este trabajo busca realizar aportes teórico-metodológico a la enseñanza-aprendizaje de conceptos geométricos y sobre GeoGebra en aulas de nivel superior.

Palabras clave: *Enseñanza de geometría; GeoGebra en la resolución de problemas; Procesos de validación.*

Abstract

In this article we propose to share a sequence of geometry problems to work with GeoGebra in higher education, some of the reflections we produced from the work with it in the classroom and the previous and subsequent analyses that we did as a research group. The work team is made up of a group of professors and researchers, mathematics teachers, who develop activities in secondary schools, tertiary institutes and in the first years of the Faculty of Exact Sciences of the National University of the Center of the Province of Buenos Aires (Tandil, Buenos Aires, Argentina). We include in the text the sequence of problems, a possible organization of the work with it in the classroom, justifications and contributions to the proposed organization, resources and possible models in GeoGebra and examples to enrich the readers' interpretations. This work seeks to bring theoretical-methodological contributions to the teaching-learning of geometric concepts and GeoGebra in higher education classrooms.

Keywords: *Geometry teaching; GeoGebra in problem solving; Validation processes*

Introducción

En este artículo nos proponemos compartir una secuencia de problemas de geometría para trabajar con GeoGebra, reflexiones que produjimos a partir del trabajo con ella en un aula de nivel superior y los análisis previos y posteriores que hicimos como grupo de investigación.

Conformamos el equipo de trabajo un grupo de docentes e investigadores, profesores de matemática, que desarrollamos actividades docentes en escuelas secundarias, institutos terciarios y en los primeros años de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (sede Tandil, Buenos Aires, Argentina).

Como grupo colaborativo, en cuya constitución seguimos trabajando, asumimos una doble preocupación. Por un lado, nuestra formación como docentes y la intención de modificar prácticas de enseñanza incluyendo las TICs en un aula de nivel universitario y, por el otro, el acercamiento entre el mundo de la investigación y el de la práctica docente, con el deseo de integrar el punto de vista de los docentes en la producción de conocimientos ajustados a la realidad de esa práctica y tomando en cuenta su complejidad.

Nos interesa problematizar la enseñanza de la geometría en relación con las dificultades que se presentan en las aulas de los diferentes niveles educativos y que se reportan en distintos trabajos de investigación. Por ejemplo, la escasez de conocimientos geométricos en los programas de enseñanza de matemática e incluso la escasez de materias de Geometría en los planes de estudio de las carreras de formación docente; también se analizan las dificultades para avanzar más allá de una perspectiva desde la cual se enseña geometría a partir de definiciones y descripciones de los objetos geométricos de una manera ostensiva. En este marco, adherimos a un planteo didáctico desde el que se busca una enseñanza de geometría que posibilite entradas al quehacer matemático revalorizando el potencial anticipatorio y la búsqueda de argumentaciones propias de la Geometría y más en general de la Matemática. La integración legítima del software GeoGebra en el aula, puede constituirse en un medio potente para lograr estos objetivos. En particular, en términos de Arias, Grimaldi, Itzcovich, Murúa y Segal (2022), la posibilidad de dotar de movimiento a las construcciones que se producen con el programa introduce una diferencia sustantiva con el trabajo en lápiz y papel.

Concebimos la clase como una comunidad que produce conocimientos matemáticos, a partir de la interacción de los alumnos con problemas que los enfrentan a rupturas respecto de los conocimientos que tienen en un cierto momento. Este trabajo matemático de los alumnos no sólo se realiza a nivel personal o individual, en la confrontación de cada alumno con una problemática que ofrece resistencias, sino también a nivel colectivo donde el grupo comparte preguntas, explica y discute procedimientos, argumenta en favor de su validez, acuerda y negocia significados con sus pares y con el docente (Brousseau, 2007; Sadovsky, 2005 en Papini, 2015).

En este caso, estudiamos situaciones de enseñanza de la geometría desde una perspectiva que se plantea generar condiciones para que los estudiantes produzcan conocimientos geométricos superando aspectos perceptivos de las representaciones de los objetos, realizando inferencias y explicitando relaciones que se apoyan en los datos y las propiedades (Itzcovich, 2005). Consideramos “problemas geométricos” que favorezcan la exploración y producción de conjeturas, la puesta en juego de propiedades geométricas en las resoluciones, la diferenciación entre la representación y el objeto representado, la construcción de argumentos que se ocupen de la validez de las respuestas.

Recuperamos las ideas de Artigue (2007) para pensar el rol de las tecnologías en los procesos de aprendizaje, nos resulta fructífero mirar estos procesos como génesis instrumentales, transformaciones de los objetos tecnológicos (para un individuo, colectivo o institución) de artefactos a instrumentos. La importancia que la autora da a las herramientas de la actividad matemática porque “...modelan los procesos de aprendizaje, sus formas, pero también los conocimientos y saberes que ellas producen…” (Artigue, 2007, p. 5) le permite reconocer una función pragmática y epistémica de las herramientas.

Desde este marco de referencia construimos una secuencia de problemas que tiene por objetivos poner en juego conocimientos geométricos sobre polígonos regulares, circunferencias inscrita y circunscrita, rotación, construir definiciones para un lugar geométrico, construir y validar un modelo en GeoGebra. Inicialmente estuvo diseñada para un grupo de estudiantes en el contexto de la materia “Geometría con regla y compás”[7] del segundo año de la carrera de Profesorado en Matemática.

[7] Cabe aclarar que el nombre de esta materia se debe al tipo de Geometría que utiliza para las construcciones solo regla no graduada y compás.

En los apartados que siguen incluimos la secuencia, una posible organización del trabajo en el aula, justificaciones y aportes para la organización propuesta, los recursos y modelos posibles en GeoGebra y ejemplos para enriquecer las interpretaciones de los lectores.

1. La secuencia de problemas

1. Dado un cuadrado de lado 1 unidad, caracterizar el lugar geométrico que describe un lado del cuadrado cuando gira alrededor del centro del cuadrado.
2. Definir el lugar geométrico caracterizado en el Problema 1.
3. Si construimos polígonos regulares de 3, 5, 6 o más lados que miden 1 unidad. ¿Qué modificaciones sufre el lugar geométrico caracterizado en el Problema 1?

2. Una posible organización del trabajo con la secuencia en el aula

Compartimos una posible organización del trabajo para la puesta en el aula de esta secuencia que tiene en cuenta nuestras experiencias (en el contexto que detallamos antes) y los análisis que venimos realizando en el marco de la investigación (Natale y Papini, 2019; Papini, Natale, Vergara y Soria, 2020; Papini, Natale, Soria, Balcarce y Madrid, 2022).

Organizamos la propuesta en estos seis "momentos" que detallamos a continuación y fundamentamos debajo:

1. Resolución del Problema 1 en el aula en pequeños grupos de 2 o 3 estudiantes. Los estudiantes disponen de lápiz y papel y un dispositivo con el software GeoGebra para resolver el problema. Les pedimos que observen y luego registren de manera escrita el proceso de resolución que vivieron.
2. Reflexión colectiva a partir de la puesta en común de las producciones de los grupos. Construcción colectiva de la o las soluciones del Problema 1.
3. Producción de un texto escrito en el que cada estudiante reformule la escritura de uno de los procesos de resolución del Problema 1 consensuados en la reflexión colectiva, que incluya cada paso de la construcción o representación que utilizó como modelo.
4. Nuevamente trabajo en pequeños grupos con la consigna de explicitar las justificaciones matemáticas de los modelos de resolución.

5. Resolución del ítem 2 en pequeños grupos: construcción de una definición del lugar geométrico antes caracterizado y luego compartirlas en una puesta en común para reflexionar sobre las condiciones que deben cumplir para que puedan considerarse definiciones de un lugar geométrico.

6. Resolución del ítem 3 con los recursos de GeoGebra diseñados para tal fin.

3. Breve caracterización de cada momento

En este apartado caracterizamos y fundamentamos brevemente cada uno de los momentos propuestos para trabajar con los estudiantes.

1. ¿Qué dificultades se plantean en la resolución del Problema 1? ¿Qué resoluciones anticipamos?

Estudiamos el trabajo de un grupo de cinco estudiantes que cursaban el segundo año del Profesorado de Matemática. Anticipamos dos posibles formas de resolución que compartimos en estos links:

Protocolo 1: https://www.geogebra.org/m/qt3ryktw

Protocolo 2: https://www.geogebra.org/m/vhaxpb2g

Si bien reconocemos en ambos protocolos conocimientos de geometría y de GeoGebra que se articulan, podemos identificar que en cada construcción hay protagonismos diferentes de unos conocimientos respecto de los otros.

En la resolución de este primer problema se plantean para los estudiantes dos tareas que resultan problemáticas: por un lado "observar" el giro del lado de un cuadrado y por otro caracterizar el lugar geométrico que describe ese movimiento. Al enfrentarse con el problema, buscan maneras de representarlo o más precisamente buscan construir un modelo, necesitan construir un cuadrado de lado 1 que gire para "visualizar" (en el sentido de Arcavi, 2007) la región que describe uno de sus lados. Por ejemplo, un grupo de estudiantes empieza por representar un bosquejo de un cuadrado con lápiz y papel y dicen: "me imagino que cada vértice determina una misma circunferencia al rotar, pero ¿qué hace el lado?". Podemos identificar, en este primer paso, que disponen de algunos conocimientos geométricos y de una estrategia de representación en lápiz y papel para empezar a abordar el problema. La pregunta ¿qué hace el lado? motoriza una etapa de búsqueda, en la que utilizar GeoGebra tiene sentido, es una oportunidad para un uso "legítimo", el dinamismo de este programa permite nuevas exploraciones y nuevos conocimientos si asumimos el valor epistémico de los instrumentos (tomando estas ideas de Artigue, 2007).

Si bien los alumnos conocían el software y lo habían utilizado en distintos contextos (por ejemplo para realizar construcciones geométricas simples, explorar algún applet, realizar una representación dinámica para verificar alguna propiedad), la construcción de recursos animados o que muestren movimientos de objetos resulta compleja: en este caso es necesario en primer lugar "comunicar al programa" que rote un lado del cuadrado (indicar al programa que haga no es lo mismo que hacerlo, "hacer hacer al programa" en términos de Laborde, 1998) y esta tarea resultó problemática y productiva para los estudiantes. Los conocimientos geométricos y sobre el programa se "entrelazan", en lo que podemos considerar un proceso de génesis instrumental, un camino posible en el que ciertas herramientas de GeoGebra se transforman de artefacto a instrumento (Artigue, 2007). En el protocolo 1 las herramientas que se utilizan son: Segmento de longitud dada, Polígono regular, Medio o Centro, Deslizador y Rotación; mientras que en el Protocolo 2 se utilizan: Circunferencia: centro y radio, Punto en objeto, Recta, Intersección, Perpendicular y Polígono. Ninguno de los grupos obtuvo su modelo final como resultado de una secuencia de pasos similares al Protocolo 1. Conjeturamos que puede deberse a que el grupo de estudiantes había utilizado los deslizadores con más frecuencia en el contexto de representaciones de funciones y el análisis de sus parámetros, y nunca para representar la variación de un ángulo. Por lo que una mejora a la secuencia, en el caso en que alguna de las dos anticipaciones no ocurra, podría ser la devolución del problema con alguna pista para que construyan otro modelo utilizando la estrategia faltante.

Con el pedido de "observación y registro del proceso" de resolución del problema nos proponemos que los estudiantes se ubiquen en una posición de hacer conscientes sus propios recorridos y poder analizarlos, que consideren estos procesos como objetos de análisis. Pretendemos favorecer la comunicación de estos recorridos en la puesta en común y valorizar estos procesos tanto desde un punto de vista matemático como didáctico, considerando que esta explicitación es un paso facilitador en la búsqueda de argumentos y la construcción de justificaciones matemáticas. Plasmar en palabras y por escrito todos los pasos que fueron haciendo (con las idas y vueltas, aquello que funcionó o no funcionó) empuja a reorganizar las ideas y a explicitar conceptos que generan mejores condiciones para la puesta en común.

2. Reflexión colectiva a partir de la puesta en común de las producciones de los grupos.

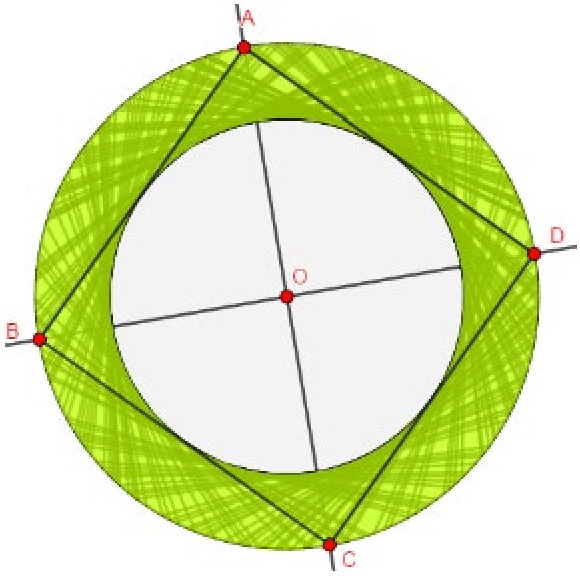
¿Qué esperamos de este momento de reflexión y construcción colectiva? ¿Qué elementos le podemos ofrecer al docente para coordinarlo? ¿A qué conclusiones aspiramos llegar?

En la puesta en común se comparten las resoluciones de cada grupo permitiendo conocer, interpretar y analizar los modelos usados por los demás y profundizar en el conocimiento de los propios. En particular, en el caso de las resoluciones con GeoGebra, se pueden poner en cuestión las construcciones, reconociendo y consensuando las correctas y las incorrectas a partir de argumentos matemáticos y también se puede analizar las complejidades de cada una y los conocimientos que utilizan.

Los siguientes son ejemplos de preguntas que surgieron a partir de las producciones de los estudiantes y que podemos hacer para orientarlos en el proceso de argumentación (incluimos debajo una imagen que permite contextualizar mejor las preguntas):

¿Por qué los cuatro vértices del cuadrado se mueven en una circunferencia de radio $\sqrt{2}/2$? ¿Por qué la corona queda limitada en el interior por una circunferencia que es tangente a los cuatro lados y tiene radio 1/2? ¿por qué el punto de tangencia es el punto medio y no es otro?

¿Se cubre completamente la corona? o, dicho de otro modo, si se toma un punto arbitrario de la corona ¿este se corresponde con un punto del lado que rota? Si la respuesta es afirmativa, ¿por qué vemos que no se cubre toda la región al completar un giro del lado? Esta última pregunta también



posibilita discutir ideas sobre el programa GeoGebra.

FIGURA I: Lugar geométrico generado por un lado del cuadrado cuando éste rota.

3. ¿Por qué pedimos reformular la escritura de una de las resoluciones consensuadas?

Agregamos esta tarea de poner por escrito un proceso de resolución del problema, que no estuvo en la versión primera que llevamos al aula, pensando en diferentes motivos.

Por un lado, consideramos importante ubicar a los estudiantes en la posición de dar valor a mirar y analizar su propio proceso de resolución del problema. Más aun teniendo en cuenta que se trata de una materia en el contexto de la formación de profesores de matemática y que esperamos de ellos esta misma valorización cuando ejerzan su profesión docente. Esta "vuelta a mirar el proceso" permite reconocer que se encuentran dificultades al resolver una situación problemática que busca ser motor en la producción de conocimientos nuevos. Reconocer también, que el camino no siempre es directo ni único, por el contrario, tiene idas y vueltas, bifurcaciones y que, generalmente, existen varios caminos de resolución que movilizan conocimientos diferentes.

Por otro lado, la tarea de expresar esos procesos en palabras y construir un texto escrito puede funcionar como una "tecnología del intelecto" que interviene en la construcción de conocimientos (tomamos esta idea del texto de Lerner, Aisenberg, Espinoza, 2011). Es decir, buscamos explorar y favorecer una función epistémica de la escritura, una invitación a "ir y venir entre pensar, escribir, leer, repensar, corregir, buscar más información, ampliar, releer…" tomando palabras de Espinoza, Pitton, Casamajor, Aziz (2012).

También asumimos que esta búsqueda de avanzar en el conocimiento del proceso de resolución, propio y colectivo a la vez, permite ubicar al estudiante en una mejor posición para producir argumentos que fundamenten o validen dicho proceso.

4. ¿Qué objetivos perseguimos con este pedido de "explicitar las justificaciones matemáticas de los modelos de resolución"?

En el proceso de exploración y análisis de la puesta en el aula, encontramos que la tarea de argumentar en relación con la validez de una resolución no era habitual en estos estudiantes. Por esta razón proponemos detenernos en un momento en el que la tarea es validar el modelo en GeoGebra que se construyó: ¿Cómo justifican que efectivamente el modelo construido en GeoGebra representa las condiciones del problema, proporciona la respuesta correcta y nuevos conocimientos acerca del lugar geométrico que se obtiene?

En este momento esperamos que los estudiantes retomen las preguntas que se compartieron en la puesta en común para validar el modelo y la resolución. El docente puede observar el trabajo de los grupos e intervenir recordándoles si hace falta.

5. En pequeños grupos realizar la resolución del ítem 2: Construcción de una definición del lugar geométrico antes caracterizado y luego compartirlas en una puesta en común para reflexionar sobre las condiciones que deben cumplir para que puedan considerarse definiciones de un lugar geométrico.

Luego de obtener un modelo del problema, los alumnos encuentran que el giro del segmento determina un "anillo" (o en principio observan gracias a la animación que los rastros del segmento que rota quedan dentro de un anillo, ver Figura I) y se plantea la tarea de caracterizar esa región como "lugar geométrico". En un primer momento observamos a los estudiantes dubitativos, se preguntaban en voz alta: "… ¿Caracterizar el lugar geométrico qué sería? ¿Caracterizar lo que queda pintado? ¿O con decir que queda una corona ya está? ..." Interpretamos que esta dificultad puede estar relacionada con el hecho de que en las experiencias de trabajo previas no habían tenido que discutir sobre las características que los lugares geométricos cumplen, tampoco construir una definición de un objeto geométrico que no es utilizado habitualmente.

Entre las primeras caracterizaciones del lugar geométrico que los estudiantes obtuvieron encontramos, por ejemplo:

"queda **este** anillo" (haciendo referencia a lo que se veía en la pantalla)

"un círculo al que **le sacás** otro círculo que tiene el mismo centro y radio menor"

"me queda un anillo **formado por dos circunferencias**, una inscrita y otra circunscrita al cuadrado"

Estas primeras versiones se enriquecieron y complejizaron con los posteriores intercambios de ideas entre los pequeños grupos de trabajo. Por ejemplo, los alumnos avanzaron hacia una caracterización del lugar geométrico como "…un anillo que se forma cuando a un círculo más grande con centro en las intersecciones de las diagonales del cuadrado, le sacamos un círculo con el mismo centro y radio más chico. El círculo de radio mayor es el que circunscribe al cuadrado y el de radio menor es el círculo inscrito en el cuadrado.” También determinaron el valor de cada uno de los radios y el área de la corona. Las intervenciones del docente en este momento son claves para lograr avances en la búsqueda de incluir condiciones, que deben ser mínimas en el sentido de ser las necesarias y suficientes para poder determinar si un punto pertenece o no al lugar geométrico que se define.

Revisando el recorrido que estudiamos interpretamos que las primeras “definiciones” están muy asociadas a la acción y a la ostensión (nos recuerda la idea de pruebas pragmáticas de Balacheff, 2000). Por ejemplo, algunos términos que nos remiten a aspectos observables o relacionados con el hacer son: “este” anillo, “le sacás” otro círculo, está “formado por dos circunferencias”. Consideramos que es, probablemente, la primera vez que se les pide una tarea de este tipo que resulta interesante porque implica explicitar condiciones que involucran propiedades geométricas, argumentos o pruebas intelectuales que validan las afirmaciones (también en términos de Balacheff, 2000). Estas tareas implican promover un proceso de descontextualización y generalización que incluye conocimientos sobre cómo la Matemática comunica y define sus objetos. Y también recurriendo al mismo autor podemos pensar que el pasaje de pruebas pragmáticas a intelectuales es un proceso que involucra conocimientos matemáticos, su formulación y la racionalidad propia de la validación matemática. Este no es un proceso espontáneo, la intervención del docente es imprescindible por ejemplo para poner en el centro de la reflexión si estas caracterizaciones son suficientes o si el anillo está “correctamente” definido, qué implica estar “correctamente definido”, si hay más de una manera de definirlo. Los conocimientos matemáticos alrededor de “definir” son inherentes a la propia ciencia y esta puede ser una buena oportunidad para abordarlos o al menos hacer un acercamiento a ellos. Posiblemente nos encontremos con estudiantes que se enfrentan por primera vez a este tipo de tareas, entonces el docente puede aceptar definiciones provisorias y no tan formales e ir trabajando en la búsqueda de definiciones con un mayor nivel de formalidad.

6. Resolución del ítem 3 del problema con un recurso de GeoGebra.

¿Por qué ofrecemos un recurso? ¿Cuál es el objetivo?

Este ítem 3 se propone invitar a los alumnos a reflexionar sobre una de las posibles formas de generalizar el problema: modificar la variable cantidad de lados del polígono dado. Es posible que durante la resolución los estudiantes quieran modificar la variable longitud del lado al mismo tiempo que la cantidad de lados y esto representa una buena oportunidad para discutir sobre las formas en las que se trabaja en matemática con las generalizaciones de un problema. Es importante reflexionar sobre la necesidad de tener control sobre las variables por lo que no es recomendable variar más de una a la vez.

Decidimos ofrecer recursos construidos para este caso en GeoGebra para que los estudiantes se focalicen en analizar el problema (realizar exploraciones, elaborar conjeturas y validarlas) y no en realizar las construcciones, tarea que se centra en otros conocimientos.

Pusimos a disposición de los alumnos dos recursos:

Recurso 1: https://ggbm.at/e49ajcep

Recurso 2: https://www.geogebra.org/m/cm5tds7b)

El primero presenta tres polígonos regulares de lado 1 (cuadrado, hexágono, octógono) con botones que permiten iniciar-detener-reiniciar la animación, activar-desactivar-borrar el rastro y también tiene una casilla de entrada que permite modificar la medida del lado. El segundo recurso presenta un polígono regular de lado 1 (inicialmente un cuadrado) con dos casillas de entrada, una que permite modificar la cantidad de lados del polígono y otra que permite modificar la medida del lado, al igual que el recurso 1 tiene botones con las distintas opciones de animación.

El docente puede proponer al grupo de alumnos una instancia de puesta en común previa a la exploración de los recursos para que tengan oportunidad de formular conjeturas sobre los cambios que sufrirá el lugar geométrico y registrarlas en el pizarrón. Es probable que surjan conjeturas que se complementen o incluso se contraponen, consideramos interesante que los estudiantes las analicen, validen o refuten luego de las exploraciones con los recursos. Esta es una buena oportunidad para reflexionar sobre las estrategias que se pueden utilizar para validar-refutar una conjetura en matemática, así como también cuál es el alcance del trabajo realizado con el software.

Algunas de las conjeturas elaboradas por los estudiantes en nuestra experiencia fueron:

- El lugar geométrico generado por un lado de un polígono regular cuando éste rota con respecto a su centro es siempre una corona.
- Al aumentar la cantidad de lados disminuye el área de la corona.
- El área de la corona para el caso del polígono regular de n lados es π/n unidades cuadradas.
- El área de la corona es igual al área del círculo de radio menor.
- El área de la corona no cambia y vale $\pi/4$ unidades cuadradas.
- La proporción entre el área del círculo de radio mayor y de radio menor es constante cuando n cambia.

Respecto del cálculo analítico del área de la corona, es importante notar que la información necesaria es la medida de los radios de las circunferencias que la limitan. Anticipamos dos caminos de resolución que utilizan, respectivamente, el teorema de Pitágoras y relaciones trigonométricas. Al usar el teorema de Pitágoras la variable cantidad de lados no aparece, esta solución permite concluir que el área de la corona no depende de la cantidad de lados del polígono regular y será constante para cualquier valor de n, al mismo tiempo puede generar dificultades para comprender que el cálculo realizado corresponde al área de la corona generada por el lado de cualquier polígono inicial (se puede encontrar un ejemplo detallado del proceso de validación de una de estas conjeturas en Natale y Papini, 2019).

Reflexiones finales

En este último apartado queremos resaltar las razones por las cuales nos parece interesante trabajar con esta secuencia de problemas y también nos impulsa a compartir nuestra experiencia de trabajo con ella.

La tarea de “caracterizar el lugar geométrico” representado por el anillo resulta muy productiva e invita a los estudiantes a tomar distancia de aspectos perceptivos de las representaciones para profundizar en las propiedades geométricas.

A partir del trabajo realizado, la idea de “lugar geométrico” dejó de ser “transparente” (tanto para los estudiantes como para los docentes) y se constituyó en un objeto de enseñanza y de aprendizaje. La construcción de una definición con estas características (las de lugar geométrico) resultó un aprendizaje y este proceso implicó identificar, explicitar y validar condiciones necesarias y suficientes.

Durante la producción de esta definición estos estudiantes trabajaron cuestiones propias y centrales del quehacer matemático: modelizaron el problema para producir conocimientos geométricos nuevos para ellos, hicieron conscientes propiedades geométricas presentes en el modelo para definir matemáticamente un objeto geométrico, argumentaron sobre la validez del modelo y de la propia definición, analizaron una generalización del problema.

Como sabemos que los procesos de validación propios de la matemática no se dan de manera espontánea. La puesta en común y el debate colectivo, con la necesaria mediación del docente, resultan claves para que la clase pueda avanzar hacia la producción de pruebas intelectuales.

También consideramos importante ubicar a los estudiantes en la posición de dar valor a mirar y analizar su propio proceso de resolución del problema. Volver a mirar el proceso permite reconocer que se encuentran dificultades que pueden ser motor en la producción de conocimientos nuevos.

Finalmente queremos alentar a los colegas docentes que quieran trabajar estas temáticas a implementar esta secuencia en sus aulas con las adaptaciones que crean necesarias e invitarlos a compartirnos sus experiencias.

Referencias bibliográficas

Arias, D., Grimaldi, V., Itzcovich, H., Murúa, R., & Segal, S. *El arrastre en un programa de geometría dinámica. Su dominio de validez como asunto de interacción entre estudiantes y docentes*. Revista De Educación Matemática, 37(1), 7–30. https://doi.org/10.33044/revem.37472. (2022).

Artigue, M. *Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental*. México. Edebé Ediciones Internacionales. Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, pp. 9-21. (2007).

Balacheff, N. *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Bogotá, Colombia. Universidad de los Andes. (2000).

Brousseau, G. *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Traducido por Dilma Fregona. Buenos Aires, Argentina. Libros del Zorzal. (2007).

Espinoza, A.M.; Pitton, E.; Casamajor, A.; Aziz, C. *Escribir para aprender ciencias naturales. Cuando los alumnos le dictan al docente*. La Plata, Argentina. ACTAS III Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata. (2012).

Lerner D., Aisenberg B. y Espinoza A. *La lectura y la escritura en la enseñanza de Ciencias Naturales y de Ciencias Sociales. Una investigación en didácticas específicas.* Buenos Aires, Argentina. Anuario del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IICE) de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires. ISSN ISBN 978-987-1785-85-8. (2011). http://repositoriouba.sisbi.uba.ar/gsdl/cgi-bin/library.cgi?a=d&c=histoeduan&d=2011-39_html

Itzcovich, H. *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires, Argentina. Libros del Zorzal. (2005).

Natale M. y Papini C. *Producir geometría con GeoGebra. Una experiencia colaborativa en el nivel universitario*. Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. La Plata, Argentina. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata. http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11945/ev.11945.pdf. (2019).

Papini, C. *El papel del análisis de problemas aritméticos en la formación continua del docente*. México. Revista Educación Matemática, vol. 27, nro. 2, ISSN 2448-8089. http://somidem.com.mx/revista/2016/05/12/vol27-2-3/. (2015)

Papini C., Natale M., Vergara A. y Soria S. *Procesos de modelización y argumentación en la resolución de un problema geométrico con GeoGebra*. Brasil. Actas II Simposio Internacional de Tecnologías en Educación Matemática - II SITEM. Grupo de Pesquisa em Informática outras mídias e Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (2020). https://c8fab03a-2887-4581-bec5-89e8ad73758b.filesusr.com/ugd/e326c4_1b652db1c0a64baf8d8ed2335ac0d540.pdf

Papini C., Natale M., Soria S., Balcarce M. y Madrid A.P. *Producción de conocimientos matemáticos utilizando GeoGebra en aulas de nivel superior. Un estudio didáctico de procesos de exploración, conjetura y prueba en la resolución de problemas geométricos*. Argentina. Libro VII Encuentro de Investigadores de la Patagonia Austral. Universidad Nacional de la Patagonia Austral, (2022). https://www.unpa.edu.ar/sites/default/files/anuncio_adjuntos/7EIPA%20-%20Libro%20de%20Articulos%20Cortos.pdf

Sadovsky, P. *Enseñar matemática hoy*. Buenos Aires, Argentina. Libros del Zorzal. (2005).