



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i3p099-106>

## A esfera e a pirâmide: uma proposta de construção dinâmica utilizando o Princípio de Cavalieri<sup>1</sup>

The sphere and the pyramid: a dynamic construction proposal using Cavalieri's Principle

EDSON AGUSTINI<sup>2</sup>

<https://orcid.org/0000-0001-8301-865X>

ÉRIKA MARIA CHIOCA LOPES<sup>3</sup>

<https://orcid.org/0000-0003-3817-5511>

GISELLE MORAES RESENDE PEREIRA<sup>4</sup>

<https://orcid.org/0000-0001-8154-0540>

### RESUMO

*Neste artigo apresentamos uma proposta de atividade envolvendo o GeoGebra e o Princípio de Cavalieri, que é um resultado matemático que permite comparar áreas de secções e deduzir volumes de sólidos. A partir da fórmula do volume de uma pirâmide, é possível deduzir a fórmula do volume da esfera. Trata-se de uma abordagem não usual, uma vez que a pirâmide é um sólido de superfície constituída por faces planas, enquanto que a esfera é um sólido de superfície não plana.*

**Palavras-chave:** Princípio de Cavalieri; GeoGebra; visualização.

### ABSTRACT

*In this article we present a proposed activity involving GeoGebra and the Cavalieri's Principle, which is a mathematical result that allows comparing cross-sectional areas and deducing volumes of solids. From the formula for the volume of a pyramid, it is possible to deduce the formula for the volume of the sphere. This is an unusual approach, since the pyramid is a solid with a surface consisting of flat faces, while the sphere is a solid with a non-flat surface.*

**Key-words:** Cavalieri's Principle; GeoGebra; visualization.

<sup>1</sup> Apoio: Projeto de extensão PEIC – PROEXC – UFU, registro SIEX nº 27148.

<sup>2</sup> Universidade Federal de Uberlândia – [agustini@ufu.br](mailto:agustini@ufu.br)

<sup>3</sup> Universidade Federal de Uberlândia – [erikalopes@ufu.br](mailto:erikalopes@ufu.br)

<sup>4</sup> Universidade Federal de Uberlândia – [gisellemoraes@ufu.br](mailto:gisellemoraes@ufu.br)

## Introdução

Uma das principais dificuldades nas aulas de Geometria Euclidiana Espacial, seja no ensino básico, ou mesmo no ensino superior, é a visualização<sup>5</sup> precisa dos objetos tridimensionais envolvidos no estudo (SETTIMY; BAIRRAL, 2020). Em particular, quando utilizamos o Princípio de Cavalieri, as figuras comparativas costumam ser difíceis de serem desenhadas, devido ao fato de envolverem secções que precisam ser minimamente bem feitas, para que a hipótese de comparação de áreas de secções no Princípio de Cavalieri possa ser verificada. Geralmente, um dos sólidos envolvidos possui volume conhecido, enquanto que o outro possui volume a ser determinado. Eis seu enunciado:

**Princípio de Cavalieri:** “Sejam  $F$  e  $G$  dois sólidos no espaço e  $\alpha$  um plano. Se todo plano paralelo a  $\alpha$  determina nos sólidos secções de mesma área, então  $F$  e  $G$  possuem o mesmo volume.”

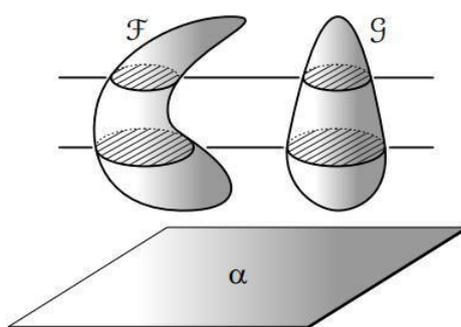
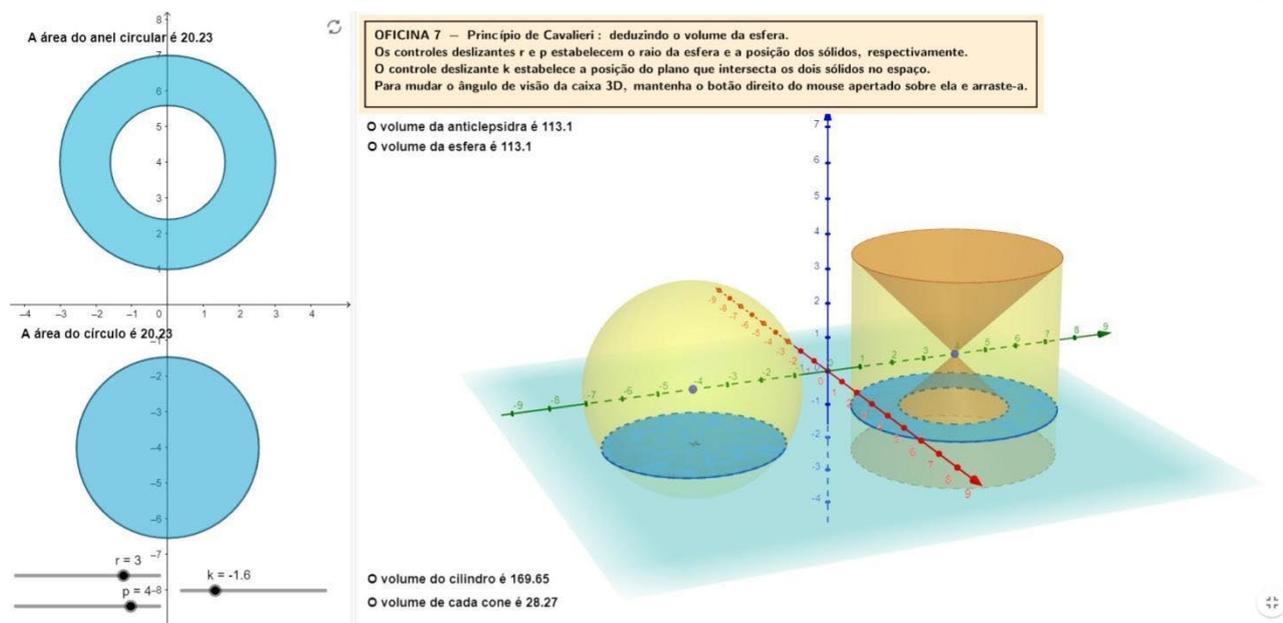


FIGURA 1: Ilustrando o Princípio de Cavalieri

No caso particular da dedução do volume da esfera, é comum utilizar um sólido chamado “anticlepsidra”, que é composto por um cilindro circular reto menos dois cones circulares retos congruentes opostos pelo vértice, inseridos no interior do cilindro (veja na Figura 2 o sólido amarelo e laranja). Neste caso, os raios das bases, tanto do cilindro, quanto dos cones são iguais ao raio da esfera; aliás, as bases dos cones e dos cilindros são dispostas de tal modo a coincidirem; já a altura do cilindro é igual ao diâmetro da esfera, enquanto que as alturas dos dois cones são iguais ao raio da mesma. Apoiando-se tanto a esfera, quanto a anticlepsidra, sobre um mesmo plano  $\alpha$ , as secções por planos paralelos a  $\alpha$  nos dois sólidos são discos e anéis circulares de mesma área. Conhecendo-se a fórmula do volume do cilindro e, também do cone, é possível, pelo Princípio de Cavalieri, deduzir a fórmula do volume da esfera (LIMA *et al*, 2006). Na legenda da Figura 2 há dois *links*, sendo um para uma construção geométrica dinâmica, feita no GeoGebra, para esta dedução do volume da esfera, e o outro para um roteiro desta mesma construção.

<sup>5</sup> Assim como Settimy e Bairral (2020, p. 192), entendemos que “a visualização se caracteriza como um processo de formação de imagens que transita entre as representações 2D e 3D, sem haver prioridade entre uma delas. A formação de imagens mentais contribui para a compreensão matemática e não requer necessariamente a presença física do objeto em questão.”



**FIGURA 2:** Tela de uma construção geométrica dinâmica feita no GeoGebra para deduzir o volume da esfera a partir do volume da anticilindro. À esquerda temos a comparação das áreas das seções. À direita temos as figuras tridimensionais. Esta construção geométrica dinâmica pode ser acessada a partir do [link](https://www.geogebra.org/m/ntrw7xph) <https://www.geogebra.org/m/ntrw7xph> e seu roteiro no [link](https://drive.google.com/file/d/1UK8oxDB7QVxL-42-GkNIJrN4_148ig1D/view?usp=sharing) [https://drive.google.com/file/d/1UK8oxDB7QVxL-42-GkNIJrN4\\_148ig1D/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1UK8oxDB7QVxL-42-GkNIJrN4_148ig1D/view?usp=sharing).

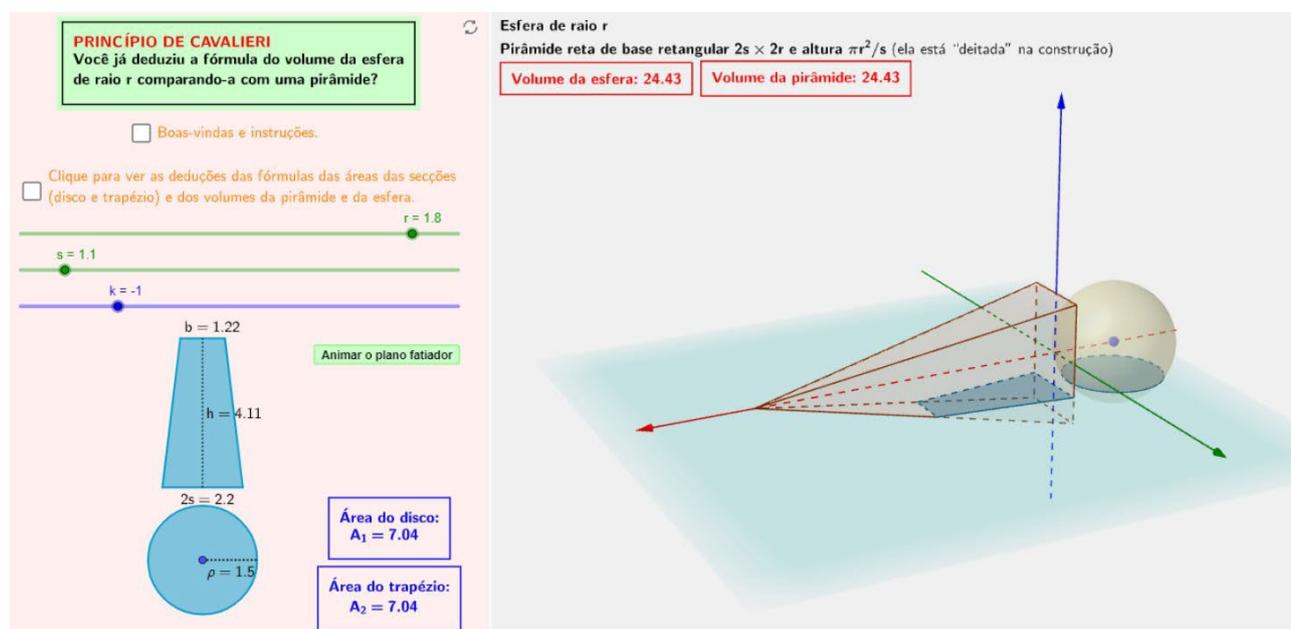
Na descrição feita no parágrafo anterior, a esfera foi comparada com uma anticilindro, que é um sólido de “superfícies curvadas” – o que, aliás, é natural de se fazer, pois a esfera também é um sólido de “superfície curvada”. Entretanto, algo que é interessante de saber e verificar, além de ser surpreendente, é que a fórmula do volume da esfera pode ser deduzida, também, por meio de comparações com poliedros, que são sólidos de superfícies planas. Neste caso, iremos utilizar o Princípio de Cavalieri com uma pirâmide reta, que é um caso particular de poliedro e cujo volume vamos admitir conhecido.

Segundo Chang Wenwu (2017), em seu artigo "*A New Model for Calculating Sphere Volume*", a comparação da esfera com um sólido de faces planas não é uma ideia moderna, tendo surgido há pelo menos 1500 anos, com o Princípio de Zu Geng (como é conhecido o Princípio de Cavalieri na China). No artigo de Chang, o volume da esfera é deduzido por comparação com um tetraedro cujas faces são quatro triângulos retângulos. Além do tetraedro, este autor sugere comparação da esfera com outros sólidos como, por exemplo, um bloco retangular menos duas pirâmides (que, assim como a anticilindro, é um sólido não convexo) e, também, uma pirâmide de base quadrada. Entretanto, Chang não apresenta uma proposta de utilização e exploração dessas comparações por meio de um aplicativo de geometria dinâmica, como o GeoGebra, que é justamente nossa proposta no presente artigo, ou seja, nosso principal objetivo neste artigo é apresentar uma construção geométrica dinâmica, que possa ser utilizada por professores e estudantes em aulas de Geometria Euclidiana Espacial, que ilustre a dedução do volume da esfera a partir de pirâmides retas cujas bases são retângulos.

É importante ressaltar que embora na matemática básica o Princípio de Cavalieri seja considerado um “postulado”, na verdade, ele não faz parte dos axiomas da Geometria Euclidiana Espacial. Em estudos mais avançados, o Princípio de Cavalieri é demonstrado como um resultado matemático vinculado à área de Análise, mais precisamente, à Teoria de Integrais. Geralmente, quando estudamos integrais no ensino superior, problemas envolvendo áreas e volumes de figuras não elementares são comuns. O Princípio de Cavalieri pode ser enxergado como uma particularidade do chamado Teorema de Fubini para funções de duas variáveis, que permite calcular uma integral dupla de forma iterada, ou seja, como duas integrais simples. Para uma demonstração do caso particular do Teorema de Fubini para funções de duas variáveis, recomendamos o texto de Guidorizzi (2002, p. 266).

## Desenvolvimento

A construção geométrica dinâmica no GeoGebra para deduzir a fórmula do volume da esfera a partir da fórmula do volume de uma pirâmide, utilizando o Princípio de Cavalieri, foi feita considerando uma esfera de raio  $r$ , posicionada com centro sobre o plano  $xy$  do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, na Janela de Visualização 3D, e considerando uma pirâmide reta de base retangular medindo  $2s \times 2r$  e altura  $\frac{\pi r^2}{s}$ . Esta pirâmide pode ser construída “deitada” no GeoGebra, ou seja, com o segmento que representa sua altura sobre o plano  $xy$  e as duas arestas da base retangular perpendiculares a este plano. A Figura 3 ilustra a posição da pirâmide na construção.



**FIGURA 3:** Tela de uma construção geométrica dinâmica feita no GeoGebra para deduzir o volume da esfera a partir do volume da pirâmide. À esquerda temos a comparação das áreas das secções. À direita temos as figuras tridimensionais. Esta construção geométrica dinâmica pode ser acessada a partir do *link*

<https://www.geogebra.org/m/e5npdram> e seu roteiro no *link* <https://drive.google.com/file/d/19Vm-sJnu87hb3y0GLFQuTMKqFQhcJEmi/view?usp=sharing>.

Para ilustrar o fatiamento dos dois sólidos por meio de um plano fatiador, podemos considerá-lo com equação cartesiana da forma  $z = k$ , sendo  $-r \leq k \leq r$ . Aliás, podemos fazer  $k$  variar em um controle deslizante para tornar a construção dinâmica. Podemos, também, considerar outros dois controles deslizantes, um para o raio  $r$  da esfera e outro para  $s$  (lembrando que  $2s$  e  $2r$  são as dimensões da base da pirâmide). Na construção representada na Figura 3, é possível ver as secções pelo plano fatiador, tanto na Janela de Visualização 2D, quanto na 3D, além de textos dinâmicos que apresentam as áreas das secções e os volumes dos dois sólidos. Na legenda da Figura 3 há o *link* para essa construção geométrica dinâmica bem como o seu roteiro.

Nesta construção, é interessante destacar visualmente as intersecções do plano fatiador com a esfera e a pirâmide. Clicando no botão “Animar o plano fatiador”, para fazer  $k$  percorrer os valores possíveis, observamos que essas intersecções são discos e trapézios isósceles, respectivamente; exceto quando  $z = \pm r$ , cujas intersecções se degeneram em ponto e segmento, ou quando  $z = 0$ , cuja intersecção do plano com a pirâmide é um triângulo isósceles. Em qualquer situação, ao parar a animação é possível analisar as figuras na visualização 2D e verificar numericamente que a área do disco, de raio  $\rho$ , e a área do trapézio, de bases  $2s$  e  $b$  e altura  $h$ , são iguais.

Isto é possível de se demonstrar utilizando o Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos (duas vezes). De fato, girando a visualização para frente do eixo  $y$ , veremos cortes transversais da esfera e da pirâmide, como nas duas primeiras imagens da Figura 4 e, girando para frente do eixo  $z$ , veremos cortes transversais “de cima”, como na terceira imagem da Figura 4. Na primeira imagem, o raio  $\rho$  do disco é um dos catetos que compõem o triângulo retângulo em destaque, juntamente com a hipotenusa  $r$  e o outro cateto  $|k|$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos  $r^2 = \rho^2 + k^2$  e daí segue que a área do disco, dada por  $A_1 = \pi\rho^2$ , resulta em  $A_1 = \pi(r^2 - k^2)$ .

Por outro lado, a segunda imagem mostra dois triângulos retângulos semelhantes, sendo a altura  $h$  do trapézio um dos catetos do triângulo menor e  $r - |k|$ , o outro cateto. A semelhança dos triângulos resulta na proporção  $\frac{\frac{\pi r^2}{s}}{r} = \frac{h}{r - |k|}$ , de onde tiramos que  $h = \frac{\pi r}{s}(r - |k|)$ . Já na terceira imagem, notamos que a base menor  $b$  do trapézio representa a base de um triângulo isósceles de altura  $\frac{\pi r^2}{s} - h$  e que este triângulo é semelhante a outro isósceles, de base  $2s$  e altura  $h$ . A proporcionalidade dessas medidas leva a  $\frac{\frac{\pi r^2}{s}}{2s} = \frac{\frac{\pi r^2}{s} - h}{b}$ , e daí chegamos em  $b = \frac{2sk}{r}$ . Dessa forma, a área do trapézio, dada por  $A_2 = \frac{(2s+b)h}{2}$ , resulta em  $A_2 = \frac{(2s + \frac{2sk}{r})\frac{\pi r}{s}(r - |k|)}{2}$ , ou seja,  $A_2 = \pi(r^2 - k^2)$ . Portanto, para  $k \neq 0$  e  $k \neq \pm r$ , provamos que  $A_1 = A_2$ .

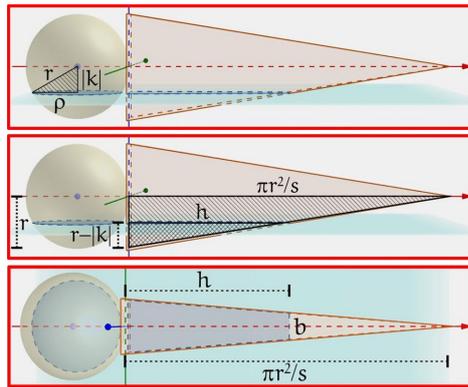


FIGURA 4: Cortes transversais da esfera e da pirâmide. As duas primeiras imagens são vistas pela frente do eixo y. A última imagem é uma vista pela frente do eixo z.

Para  $k = 0$ , as intersecções do plano fatiador com a esfera e a pirâmide são, respectivamente, um disco de raio  $\rho = r$  e um triângulo isósceles de base  $2s$  e altura  $\frac{\pi r^2}{s}$ , de forma que suas áreas resultam em

$$A_1 = \pi r^2 \text{ e } A_2 = \frac{2s \left( \frac{\pi r^2}{s} \right)}{2} = \pi r^2. \text{ Logo, neste caso também concluímos a igualdade das áreas.}$$

A partir disso, supondo-se conhecida a fórmula de cálculo do volume da pirâmide, dada por um terço do produto da área da base pela sua altura, concluímos que a pirâmide desta proposta tem volume  $V = \frac{(2s \cdot 2r) \left( \frac{\pi r^2}{s} \right)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$ . Pelo Princípio de Cavalieri, deduzimos que esta será a fórmula de cálculo do volume da esfera. Na construção do GeoGebra, ao habilitar a caixa das deduções, é possível vê-las nos textos apresentados (Figura 5).

**PRINCÍPIO DE CAVALIERI**  
 Você já deduziu a fórmula do volume da esfera de raio r comparando-a com uma pirâmide?

Boas-vindas e instruções.

Clique para ver as deduções das fórmulas das áreas das secções (disco e trapézio) e dos volumes da pirâmide e da esfera.

**Enunciado do Princípio de Cavalieri**  
 Sejam F e G dois sólidos no espaço e  $\alpha$  um plano. Se todo plano paralelo a  $\alpha$  determina nos sólidos secções de mesma área, então F e G possuem o mesmo volume.

**Verificando a hipótese (igualdade das áreas do disco e do trapézio):**

(1) O raio  $\rho$  do disco pode ser calculado por meio do Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo de catetos  $\rho$  e  $|k|$  e hipotenusa r (primeira figura ao lado):

$$r^2 = \rho^2 + k^2$$

A área do disco é dada por:

$$A_1 = \pi \rho^2 \Rightarrow A_1 = \pi(r^2 - k^2)$$

(2) A altura h do trapézio pode ser calculada por meio da razão de semelhança entre catetos de triângulos retângulos (segunda figura ao lado):

$$\frac{\pi r^2 / s}{r} = \frac{h}{r - |k|} \Rightarrow h = \frac{\pi r}{s} (r - |k|)$$

A base menor b do trapézio pode ser calculada por meio da razão de semelhança entre alturas e bases de triângulos isósceles (terceira figura ao lado):

$$\frac{\pi r^2 / s}{2s} = \frac{\pi r^2 / s - h}{b} = \frac{\pi r^2 / s - \frac{\pi r}{s} (r - |k|)}{b} \Rightarrow \frac{r}{2s} = \frac{r - (r - |k|)}{b} \Rightarrow b = \frac{2s|k|}{r}$$

A área do trapézio é dada por:

$$A_2 = \frac{(2s + b)h}{2} = \frac{\left(2s + \frac{2s|k|}{r}\right) \frac{\pi r}{s} (r - |k|)}{2} = \pi \left(1 + \frac{|k|}{r}\right) (r^2 - r|k|) \Rightarrow A_2 = \pi(r^2 - k^2)$$

**Concluindo:**  
 O volume da pirâmide é dado por um terço do produto da área da base pela altura, ou seja:

$$V = \frac{(2r \cdot 2s) \frac{\pi r^2}{s}}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Pelo Princípio de Cavalieri, este é, também, o volume da esfera de raio r.

**FIGURA 5:** Tela com as justificativas para a dedução do volume da esfera. À direita temos textos justificando a igualdade entre as áreas das secções e a dedução da fórmula do volume da esfera. À esquerda temos figuras ilustrativas para apoio aos textos.

É importante observar que há uma certa liberdade para a escolha da pirâmide. Além da escolha das dimensões da base retangular da pirâmide, ela não precisa ser reta; pode ser oblíqua (basta que o vértice da pirâmide seja mantido no plano  $xy$  sobre uma reta paralela ao eixo  $y$ ). Outra observação, talvez menos interessante, é que devido à fórmula do volume da pirâmide ser a mesma do volume de um cone, podemos considerar um cone de base circular no lugar da pirâmide. Neste caso, sua base pode ter raio  $r$  e, portanto, sua área  $\pi r^2$ ; enquanto que sua altura deve ser de  $4r$ . Além disso, assim como a pirâmide, o cone não precisa ser reto. Enfim, há uma grande variedade de formatos para a pirâmide, tanto quanto para o cone, que podem ser explorados e construídos no GeoGebra para estimular o ensino e a aprendizagem. Em geral, os estudantes gostam desse conteúdo.

Outro aspecto importante, que podemos considerar neste artigo, diz respeito às habilidades que podem ser desenvolvidas junto ao GeoGebra, quando resolvemos fazer nossa própria construção geométrica dinâmica. Além de trabalhar simultaneamente com os ambientes 2D e 3D do aplicativo, podemos trabalhar com comandos envolvendo superfícies parametrizadas (para as secções), controles deslizantes, textos dinâmicos, botões e caixas para mostrar/ocultar objetos, além de explorar vários recursos que melhoram a visualização dos diversos objetos na tela. Este é um capítulo à parte, quando o objetivo não é apenas “entregar” uma construção pronta, mas sim criar habilidades com o GeoGebra que servirão não apenas para a dedução do volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri, mas, também, para diversos outros conteúdos que o professor gostaria de trabalhar de forma dinâmica junto aos estudantes na sala de aula.

## Considerações finais

As propostas aqui apresentadas, que exigem a exploração de conceitos e relações métricas relativas à pirâmide reta (ou ao cilindro e aos cones) e à esfera, enfatizam a importância da visualização para a aprendizagem. As construções dinâmicas no GeoGebra possibilitam um trabalho de exploração visual, análise e levantamento de conjecturas, para posterior obtenção/demonstração da fórmula do volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri. Nesse sentido, contemplam a quarta habilidade da quinta competência específica de Matemática e suas Tecnologias, estabelecida pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, que propõe: “Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras” (BRASIL, 2018, p. 541). Esse tipo de abordagem, com uma dedução visual utilizando algum recurso computacional, é algo raro de ser visto nesse nível de ensino e por isso carece de propostas como esta.

## Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CHANG, W. A New Model for Calculating Sphere Volume. In: **ATCM**, 2017, Chungli, Taiwan. Disponível em: <[https://atcm.mathandtech.org/EP2017/invited/4202017\\_21516.pdf](https://atcm.mathandtech.org/EP2017/invited/4202017_21516.pdf)>. Acesso em: 05/08/2023.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora. 5ª ed., v. 3. 2002.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). 6ª ed., v. 2 e v. 4. 2006.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **Vidya**, v. 40, n. 1, jan./jun. 2020. p. 177-195.