



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i3p066-079>

## Um Livro Dinâmico desenvolvido na plataforma GeoGebra para o ensino de Prismas e Pirâmides

Dynamic spatial geometry book on the GeoGebra platform for teaching pyramid and prisms

RENATO GAMBA TORRES <sup>1</sup>

<https://orcid.org/0000-0003-2383-3657>

JORGE CÁSSIO COSTA NÓBRIGA <sup>2</sup>

<https://orcid.org/0000-0002-5745-6610>

### RESUMO

*Neste artigo, apresentamos parte de uma pesquisa que teve como objetivo analisar o potencial didático de um livro dinâmico de Geometria desenvolvido na plataforma GeoGebra para o processo de aprendizagem e ensino de prismas e pirâmides. A pesquisa se baseou, sobretudo, na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. Para a produção do Livro Dinâmico buscamos apoio de aportes teóricos e exemplos de materiais disponíveis na plataforma GeoGebra. O livro dinâmico foi utilizado de forma presencial com estudantes do 3º ano do Ensino Médio e a análise dos resultados mostrou que ele pode contribuir para o desenvolvimento das apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória por parte dos estudantes.*

**Palavras-chave:** Livro Dinâmico, GeoGebra, Geometria Espacial

### ABSTRACT

*In this paper, we present part of a research that aimed to analyze the didactic potential of a dynamic Geometry book developed on the GeoGebra platform for the process of learning and teaching prisms and pyramids. The research was based, above all, on Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations. For the production of the Dynamic Book, we sought support from theoretical contributions and examples of materials available on the GeoGebra platform. The dynamic book was used in person with students in the 3rd year of high school and the analysis of the results showed that it can contribute to the development of perceptive, discursive, sequential and operative apprehensions on the part of students.*

**Keywords:** Dynamic Book, GeoGebra, Space Geometry

<sup>1</sup> Fundação Universidade Regional de Blumenau- FURB – [renato.gambatorres@gmail.com](mailto:renato.gambatorres@gmail.com)

<sup>2</sup> Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC – [j.cassio@ufsc.br](mailto:j.cassio@ufsc.br)

## Introdução

Vários pesquisadores abordam a importância da Geometria em diversos aspectos. Lorenzato (1995) aborda a necessidade do uso da geometria para resolver situações cotidianas. Ele alerta que “sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.” (p. 5). Já para Pavanelo (2002), a Geometria atua no desenvolvimento do raciocínio lógico, na capacidade de abstração, permitindo: “o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível” (p. 78).

A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a geometria teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e, em especial, matemáticos. Não é necessário citar muitas pesquisas para comprovar a importância da Geometria. Todavia, apesar de sua grande importância, boa parte das pessoas não consegue compreendê-la bem. Diversas pesquisas mostram dificuldades no ensino de Geometria. Especificamente em relação à Geometria Espacial e uma das dificuldades está relacionada com a visualização das representações planas dos sólidos geométricos<sup>3</sup>. Rogenski e Pedroso (2009) mencionam que nas aulas de geometria espacial e geometria analítica, é possível verificar que os alunos possuem muitas dificuldades relacionadas com a visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte da geometria espacial. Os autores alertam ainda que os estudantes também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos e identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos. Sobre a visualização das figuras tridimensionais, concordamos com Settimy (2019) quando ela relata que “Por se tratar de um processo individual e que não é inato, a visualização precisa ser ensinada.” (p. 1). Como auxiliar professores e estudantes nesse processo?

Pesquisas vêm demonstrando que o uso de *softwares* educativos tem-se mostrado como ferramentas eficazes dentro de sala de aula para auxiliar e minimizar as dificuldades de visualização e representações apresentadas pelos alunos. Santos (2006) relata que o uso das tecnologias pode acarretar contribuições em relação à aprendizagem, como a capacidade de visualização das relações geométricas. Por outro lado, acreditamos que os *softwares* educativos sozinhos não ensinam. Assim, é preciso preparar o professor e criar materiais de apoio para a utilização desses recursos. Concordamos com Nóbriga e Siple (2020) quando eles afirmam que boa parte dos materiais disponíveis são *applets* sem nenhuma orientação pedagógica de utilização pelo professor e/ou pelo aluno. A manipulação do *applet* por si só pode não promover a aprendizagem. Os mesmos autores têm defendido a produção de atividades que contenham *applets* com orientações pedagógicas de utilização, possuindo ainda organização e coordenação entre os registros de representação dos objetos matemáticos que serão trabalhados. Isso pode ser feito por meio de livros que eles chamaram de Livros Dinâmicos de Matemática. Trata-se de um recurso que pode na plataforma GeoGebra e que pode conter atividades com textos, figuras, questões abertas e fechadas, *applets*, vídeos, arquivos pdf e páginas da web. Alguns exemplos e discussões sobre o potencial dos Livros Dinâmicos podem ser encontrados em Nóbriga e Siple (2020).

<sup>3</sup> Representações em perspectiva de objetos tridimensionais no plano.

Acreditando no potencial didático desse recurso fizemos uma pesquisa que desenvolveu e utilizou partes de um Livro Dinâmico para o ensino de prismas e pirâmides. Apresentaremos partes dessa pesquisa neste artigo.

## 1. Teoria dos registros de representações semióticas de Duval

Para Schulz (2017) a teoria dos Registros de Representação Semiótica refere-se ao estudo dos signos, no qual diferentes sistemas semióticos são utilizados para representar o objeto matemático. Para Duval (2009) as Representações Semióticas estão relacionadas a um sistema particular de signos os quais podem ser convertidas em representações “equivalentes”.

Duval (2012b) afirma que um sistema semiótico somente será um registro de representação se permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. De acordo com Duval (2008) a formação é uma forma de exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real. Essa formação implica a seleção do conjunto de caracteres e determinações de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função de possibilidades de representação próprias ao registro escolhido. O tratamento de uma representação é a transformação da representação no mesmo registro em que ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna a um registro. Já a conversão é, ao contrário, uma transformação que se efetua ao se passar de um registro a outro. A conversão é uma transformação externa ao registro de início.

Duval (1994) aborda a importância do uso das figuras em Geometria, dizendo que uma figura fornece uma representação de uma situação geométrica mais fácil de apreender do que se sua apresentação fosse feita de forma verbal. Com efeito, diferentemente de um discurso, as figuras revelam para cada objeto todas as suas relações com os demais objetos da situação representada, permitindo assim, apreender uma situação como um todo. As figuras são o meio mais direto de explorar os diferentes aspectos, de antecipar os resultados, de estabelecer uma estratégia de resolução.

Percebe-se assim, que o uso de figuras no ensino de Geometria é primordial. Nesse sentido, é essencial compreender como se pode aprender com o auxílio das figuras. Duval (2012c) destaca a importância das diferentes formas de apreensão das figuras em Geometria dizendo que “[...] a resolução de problemas em geometria e a entrada nesta forma de desenvolvimento do raciocínio que esta resolução exige, depende da conscientização da distinção, quer dizer, da conscientização da oposição entre as três primeiras formas de apreensão das figuras (DUVAL, 2012c, p. 120).

Segundo Duval (1994) existem quatro tipos de apreensões de uma figura: a perceptiva, a discursiva, a sequencial e a operatória. A apreensão perceptiva é a mais imediata, aquela que permite reconhecer imediatamente uma forma, ou um objeto, no plano ou no espaço.

A apreensão perceptiva tem, portanto, uma função epistemológica de identificar objetos em duas ou três dimensões. Isso é feito pelo processamento cognitivo realizado automaticamente e, portanto, inconscientemente. É por isso que reconhecemos, à primeira vista, a forma de uma figura [...] (DUVAL, 1994, p. 124, tradução nossa)

Já a apreensão discursiva “[...] corresponde a uma explicação das propriedades matemáticas de uma figura, além daquelas indicadas por uma legenda ou pelas hipóteses. Essa explicação é de natureza dedutiva” (DUVAL, 1994, p. 124, tradução nossa). Continuando Duval (2012a, p. 135) diz que “A apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável”.

Sobre a apreensão perceptiva e discursiva de uma figura, Duval (2012a, p. 120, 121) afirma que:

Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e outra controlada que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente. O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses

Duval também afirma que há uma subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva, pois a figura geométrica se mostra a partir do que é dito e não somente a partir de seu traçado e de suas formas:

De fato, as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez do que é dito no enunciado como hipótese. Isto implica subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva e, como consequência, uma restrição da apreensão perceptiva: uma figura geométrica não mostra à primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito. Esta subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva pode ser considerada como uma teorização da representação figurar: a figura geométrica torna-se, de certa maneira, um fragmento do discurso teórico. (DUVAL, 2012a, p. 133)

Em relação à apreensão sequencial, Duval (1994) ressalta que ela diz respeito à ordem de construção de uma figura. Essa ordem depende não apenas das propriedades matemáticas da figura a ser construída, mas também das necessidades técnicas dos instrumentos utilizados. A apreensão sequencial é “explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.” (DUVAL, 2012a, p. 120).

Segundo Duval a apreensão operatória é focada nas modificações das figuras:

A apreensão operatória de figuras é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis [...] (DUVAL, 2012a, p. 125)

Para Duval (1994) essas modificações podem mostrar a ideia da solução de um problema ou de uma demonstração Matemática. Duval (2012a) afirma que as figuras podem ser modificadas de várias formas e classificou essas modificações em mereológica, ótica e posicional. Na modificação mereológica a figura pode ser dividida em várias subfiguras:

Toda figura pode ser modificada de muitas formas. Podemos dividi-la em partes que sejam como várias subfiguras, incluí-la em outra figura de modo que ela se torne uma subfigura: esta modificação é uma modificação mereológica, ela se faz em função da relação parte e todo. (DUVAL, 2012<sup>a</sup>, p. 125)

Na modificação ótica, Duval (2012c) afirma que a figura pode ser aumentada, diminuída ou deformada:

Pode-se também aumentá-la, diminuí-la ou deformá-la: esta modificação é uma modificação ótica, ela transforma uma figura em outra, chamada sua imagem. Esta transformação, que é realizada através de um jogo de lentes e espelhos, pode conservar a forma inicial ou alterá-la. (DUVAL, 2012c, p. 125)

De acordo com Duval (2012c) a modificação posicional acontece ao rotacionar ou deslocar a figura: “Pode-se, enfim, deslocá-la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca: esta modificação é uma modificação posicional de orientação e do lugar da figura dentro do seu ambiente.” (DUVAL, 2012c, p. 125)

Esses conceitos, que abordamos brevemente, foram bastante usados na produção e experimentação do livro dinâmico que desenvolvemos. Na seção seguinte, falaremos sobre nossos procedimentos metodológicos.

## 2. Metodologia

Para a produção do Livro Dinâmico de Matemática<sup>4</sup> que explora o ensino de prismas e pirâmides nos baseamos na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval e outros referenciais relacionados com a Educação Matemática e Informática Educativa. Trata-se de um produto educacional composto pelo livro dinâmico e orientações de utilização para o professor.

Para a construção do livro dinâmico realizamos análises de livros que exploram o conteúdo específico de Geometria Espacial, com o objetivo de obter noções de como o conteúdo é abordado e identificar alguns limites do livro impresso. Estudamos as orientações da Base Nacional Comum Curricular BNCC (BRASIL, 2018) e identificamos as habilidades relacionadas com o conteúdo para serem desenvolvidas no livro e as subdividimos em objetivos de aprendizagem. Após isso, fizemos um esboço de índice do livro com as ideias de cada página do livro.

O livro dinâmico tem como título “Livro Dinâmico de Geometria Espacial na plataforma GeoGebra para o Ensino de Prismas e Pirâmides”. O primeiro capítulo cujo título é “Apresentação” contém duas páginas, uma com a apresentação dos autores e outra com a apresentação do livro. O segundo capítulo possui o título “Prismas” e contém 15 páginas e o terceiro capítulo possui o título “Pirâmides” e contém 13 páginas.

Utilizamos partes do produto educacional com uma turma de 18 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola privada de Santa Catarina. Foram feitas 5 aulas presenciais de 50 minutos de duração.

<sup>4</sup> Disponível em <https://www.geogebra.org/m/stjgvpq> acesso em 9 de junho de 2023.

No primeiro encontro o professor/pesquisador apresentou e explicou a proposta da pesquisa. Antes da utilização do livro, foi aplicada uma atividade em folhas impressas com intuito de identificar alguns conhecimentos prévios dos estudantes e suas possíveis dificuldades. Esta atividade buscou nos fornecer dados que ajudassem a responder as seguintes perguntas:

1. Os alunos sabem identificar os prismas, seus elementos, classificação e natureza?
2. Os alunos sabem identificar as características e os tipos de paralelepípedo?
3. Os alunos sabem calcular a área total e o volume dos paralelepípedos, como também de outros prismas?

Após a análise dos resultados da atividade, realizamos algumas alterações necessárias no livro dinâmico.

Nos encontros seguintes apresentamos algumas atividades do livro dinâmico em 4 aulas de 50 minutos. As aulas foram realizadas em duplas e individualmente na sala de informática do colégio. O professor/pesquisador solicitou aos alunos para que criassem uma conta na plataforma GeoGebra. Em seguida, as atividades do livro foram compartilhadas por meio da ferramenta “Tarefa” da plataforma GeoGebra. O professor/pesquisador, através da plataforma GeoGebra, acompanhou as atividades realizadas pelos estudantes em sala de aula, assim como também acompanhou os alunos em suas mesas, realizando questionamentos e explicações.

Os dados foram coletados por meio de Diário de Campo no qual realizamos as anotações das impressões importantes quanto ao envolvimento da turma nas atividades analisadas e as dúvidas que foram surgindo durante a aplicação do Produto Educacional. Além disso, analisamos também os dados obtidos por meio das atividades desenvolvidas pelos estudantes e que ficaram armazenadas na plataforma GeoGebra, assim como a gravação das telas e áudios dos computadores do professor e de 3 duplas de alunos.

Na análise dos dados, queríamos responder algumas perguntas. No que diz respeito à categoria “Identificação e verificação de conceitos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas” as perguntas foram:

- a. De que forma o livro contribuiu (ou dificultou) para o desenvolvimento das atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão?
- b. De que forma o livro contribuiu (ou dificultou) para o desenvolvimento das apreensões perceptiva, a discursiva, a sequencial e a operatória?

No que diz respeito à categoria “Aprendizagem do Conteúdo Matemático” as perguntas foram:

- a. De que forma os aspectos dinâmico e estático influenciaram (ou não) na compreensão e resolução das atividades?
- b. A forma como as atividades foram apresentadas no livro dinâmico contribuíram para uma melhor compreensão do enunciado?
- c. De que forma o livro contribuiu para o desenvolvimento da habilidade de visualização das representações planas dos objetos tridimensionais?
- d. De que forma o livro contribuiu (ou dificultou) para a compreensão do conteúdo explorado?

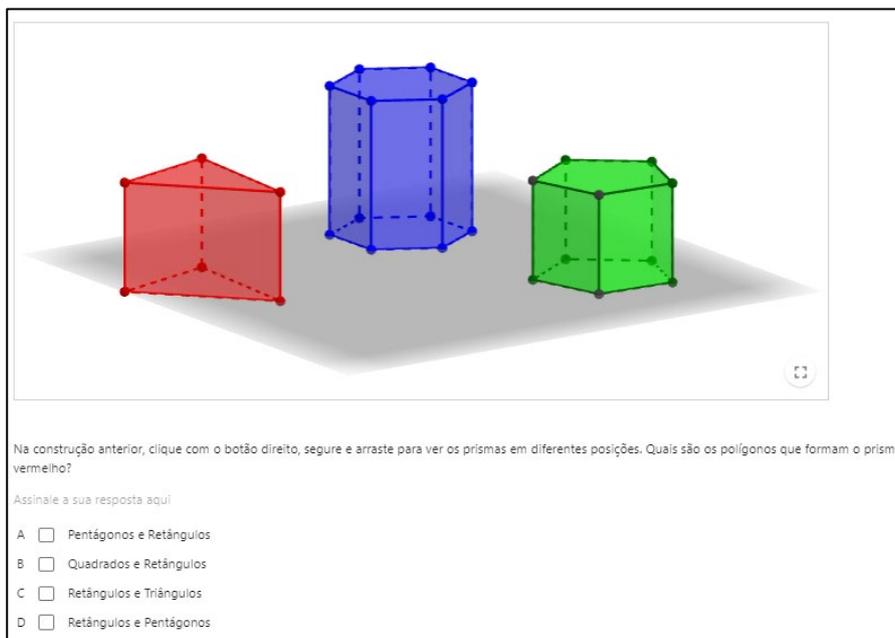
### 3. Resultados

Nesta seção apresentaremos parte das análises que fizemos dos dados coletados por meio das atividades desenvolvidas pelos estudantes, do diário de bordo, assim como a gravação das telas e áudios dos computadores do professor e de 3 duplas de alunos.

Conforme falamos anteriormente, o professor pesquisador apresentou o *software* GeoGebra e compartilhou algumas atividades do livro dinâmico para os alunos por meio da ferramenta Tarefa. Os estudantes foram resolvendo as atividades com o acompanhamento do professor.

As gravações das telas dos computadores dos alunos, realizadas por meio do programa OBS Studio, nos forneceram informações bastante relevantes. Por meio delas, pudemos não apenas ver as atividades que os estudantes fizeram, mas sobretudo como fizeram. Pudemos ver os movimentos dos cursores do *mouse*, mostrando como os alunos manipularam os *applets* para responder as perguntas propostas nas atividades. Pudemos ainda escutar os áudios das discussões ocorridas nas duplas.

Inicialmente relataremos fatos relevantes na resolução das tarefas da dupla IM, composta pelas alunas I e M. A Figura 1 mostra parte da tarefa.

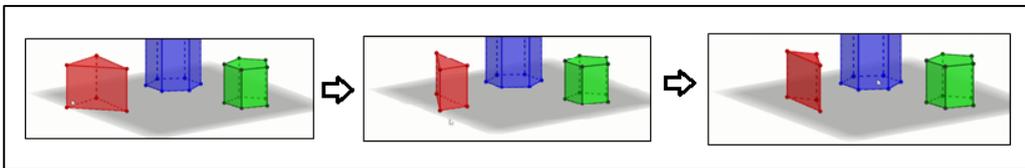


**FIGURA 1:** Tarefa polígonos do prisma vermelho

**FONTE:** Disponível em <https://www.geogebra.org/m/stjjgvpq#material/gfpysqsw> acesso em 12 de maio de 2023

Pelas ações feitas na tela do computador, podemos inferir que as estudantes leram o enunciado, foram até o *applet*, analisaram o prisma vermelho sem fazer nenhuma manipulação e inicialmente responderam oralmente que o prisma seria formado por triângulo e quadrado. Esse primeiro momento nos sugere que as alunas tiveram uma apreensão perceptiva equivocada. Cabe nos perguntar: O que levou as estudantes a acharem que as faces laterais eram formadas por quadrados? Acreditamos que,

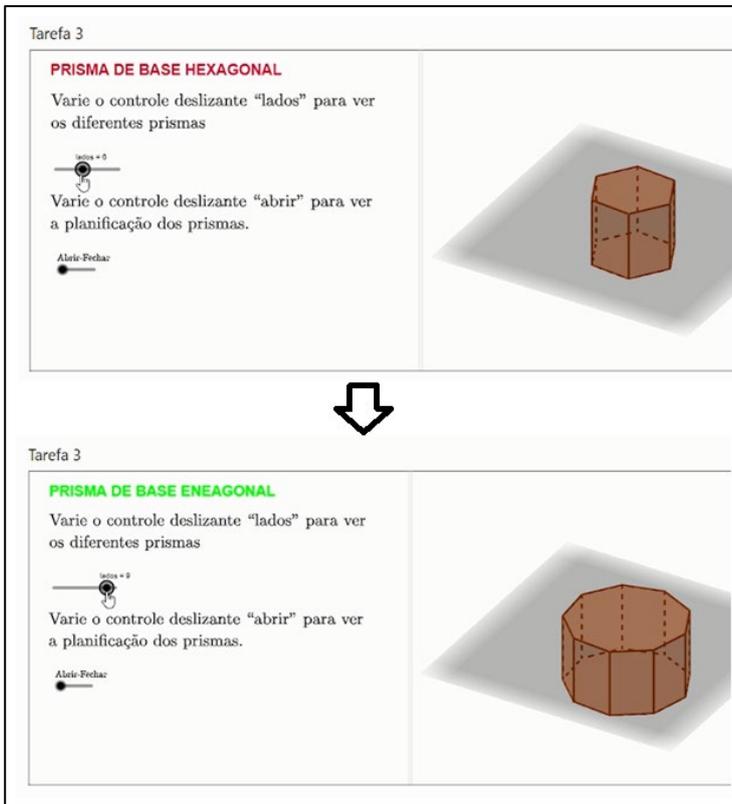
provalmente, elas se basearam na face da frente do prisma. Os segmentos pontilhados davam a ideia de profundidade. Então elas perceberam que teriam que ver a figura como a representação de algo tridimensional. A face da frente não tem os lados com medidas tão diferentes e os lados parecem formar ângulos de 90°. Assim, acharam que era um quadrado. Todavia, ao constatarem que não havia a opção de resposta quadrados e triângulos, retornaram para o *applet*, manipulando-o de diferentes maneiras: arrastaram os vértices da base, reduzindo ou ampliando os prismas. Esses movimentos tratam de uma modificação ótica e acreditamos que eles foram importantes para o desenvolvimento da Apreensão Operatória e, conseqüentemente, para que elas respondessem corretamente que o prisma vermelho era formado por retângulos e triângulos. Ao responderem que o prisma era formado por retângulos, as estudantes parecem ter notado que os ângulos internos das faces laterais eram retos, mas os lados não tinham, necessariamente, a mesma medida. A modificação ótica realizada pela dupla está representada na Figura 2:



**FIGURA 2:** Modificação ótica  
**FONTE:** Elaborada pelo autor

Interessante observar que a dupla AE, formada pelos alunos A e E, em relação à tarefa da Figura 1, também demonstrou dúvida se o prisma vermelho seria formado por quadrados ou retângulos. Podemos supor que a causa deve ser parecida com a que relatamos para a dupla IM. Após manipular o prisma vermelho, responderam à pergunta corretamente. Isso parece nos mostrar que a atividade feita no livro dinâmico contribuiu para o desenvolvimento da apreensão operatória dos estudantes, pois foi nítida a importância da possibilidade de manipulação do *applet* para fazer as modificações. Cabe nos perguntar também: se os estudantes estivessem fazendo essa tarefa num ambiente estático teriam percebido que a face lateral era um retângulo?

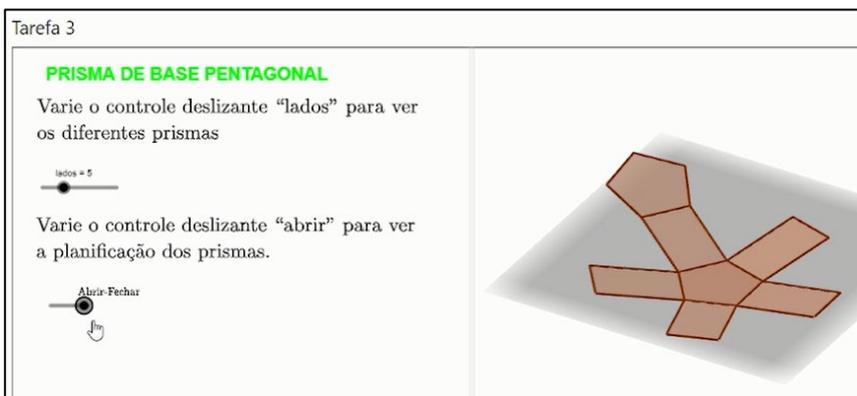
No *applet* sobre a classificação dos prismas quanto à natureza, representado pela Figura 3, a dupla IM, seguindo as instruções, posicionou o cursor no controle deslizante “lados”, modificando os valores dos lados da base do prisma. Simultaneamente o *applet* informava o novo nome do prisma, assim como também apresentava sua representação figural correspondente ao número de lados. Caracterizando uma conversão dinâmica, assim como conceitua Nóbriga (2019) são transformações que ocorrem simultaneamente, de um registro para outro e que sejam produzidas em um ambiente que permita os princípios de manipulação direta. Ao manipular o controle deslizante mudava-se a classificação dos prismas quanto à natureza. Todavia, continuava aparecendo um prisma reto. Dessa forma, inferimos que a modificação feita pela dupla era do tipo ótica e ela parece favorecer o desenvolvimento da apreensão discursiva.



**FIGURA 3:** Classificação dos Prismas quanto a Natureza

**FONTE:** Disponível em <https://www.geogebra.org/m/stjjgvpq#material/qhmrduz> acesso em 12 de maio de 2023

Em seguida, a dupla IM colocou o cursor no controle deslizante “abrir” e ao movimentar o botão a planificação do prisma foi formada ao lado. Trata-se de uma modificação mereológica que pode fornecer condições para apreensão operatória, pois ao planificar o prisma, a dupla pode identificar mais claramente seus elementos (Figura 4). Isso parece estar evidenciado na resposta dela ao momento de reflexão (Figura 5).



**FIGURA 4:** Representação plana do prisma

**FONTE:** Elaborada pelo autor

**Tarefa 4: Reflexão 2**

A partir da manipulação do applet anterior, o que caracteriza um prisma Triangular? E um prisma Heptagonal?

Aa  $\pi$  O prisma triangular possui uma base em forma de triângulo (3 lados), e o heptagonal, possui uma base em forma de heptágono (7 lados).

**FIGURA 5:** Reflexão 2

**FONTE:** Elaborada pelo autor

Com isso acreditamos que a manipulação do *applet* realizada pelas estudantes foi importante para o desenvolvimento tanto da apreensão operatória quanto da apreensão discursiva. Acreditamos ainda que o uso de textos dinâmicos na atividade contribuiu também para que a dupla pudesse relacionar os registros de representação linguísticos com os registros de representações figurais.

Em continuação na Tarefa 5, conforme Figura 6, as estudantes, sem retornarem ao *applet*, responderam corretamente que o prisma de base hexagonal possui as bases formadas por hexágonos e que 6 retângulos formam suas faces laterais. Acreditamos que as estudantes, nesta tarefa, conseguiram visualizar mentalmente os polígonos do prisma de base hexagonal, constatando que a manipulação do *applet* foi importante para o desenvolvimento da apreensão operatória.

**Tarefa 5**

Um prisma de base hexagonal, possui:

Assinale sua resposta aqui

A  as bases formadas por hexágonos e 6 retângulos formam as faces laterais. ✓ CORRETO

B  as bases formadas por retângulos e 6 hexágonos formam as faces laterais.

C  6 faces hexagonais.

D  uma base formada por hexágono e 6 retângulos formam as faces laterais.

✓ Muito bem! A sua resposta está correta.

**FIGURA 6:** Tarefa 5

**FONTE:** Elaborada pelo autor

Na atividade da Figura 7, a dupla AE, seguindo as instruções, realizou a manipulação dos controles deslizantes que representavam a largura, comprimento e altura. Tratam-se de modificações óticas. À medida que os valores eram alterados a representação figural no lado direito se modificava. Se todos os valores estivessem iguais aparecia uma mensagem: “Este paralelepípedo é um CUBO”, porém se algum valor fosse diferente aparecia a mensagem: “Este paralelepípedo não é um CUBO”. Em dado momento da manipulação dos controles deslizantes o estudante A da dupla falou: “Ah o cubo é quando tudo é igual”, mostrando ao colega do lado: “olhe este não será um cubo”, modificando os valores, “já este será um cubo”, colocando os valores iguais (Figura 8).

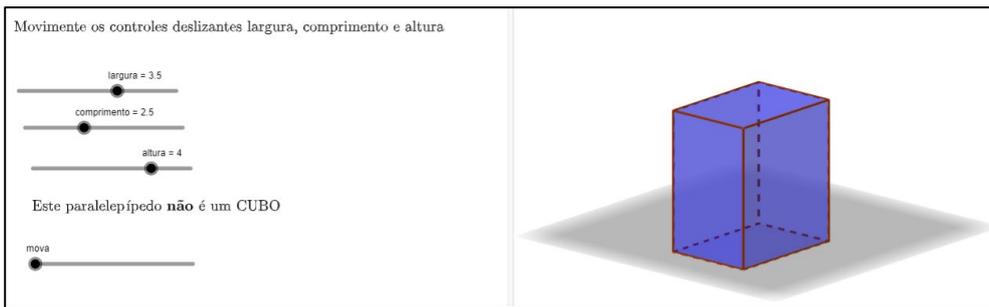


FIGURA 7: Applet do paralelepípedo

FONTE: Disponível em <https://www.geogebra.org/m/stjgvpq#material/tpqvpkpp> acesso em 12 de maio de 2023

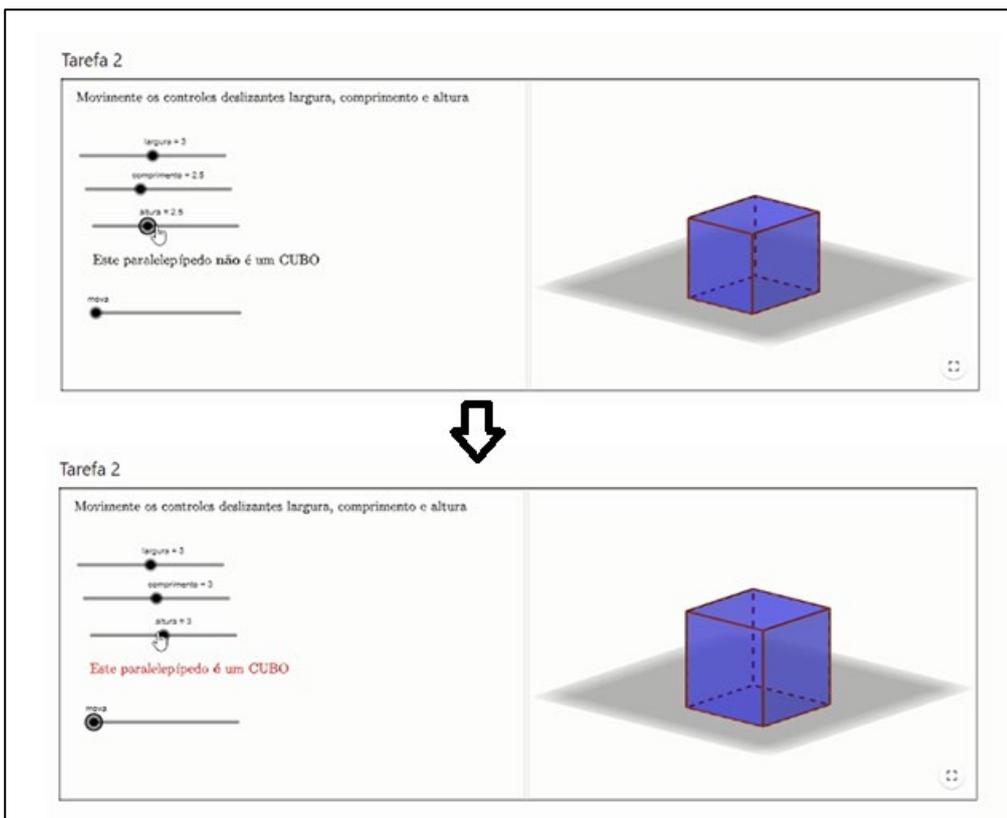


FIGURA 8: Modificando os valores

FONTE: Elaborada pelo autor

No exercício 1 que questionava sobre como devem ser as dimensões do paralelepípedo para que ele seja um Cubo, os estudantes responderam corretamente que todas as dimensões de um paralelepípedo devem ter a mesma medida (Figura 9). Assim acreditamos que a manipulação do *applet* foi importante para o desenvolvimento da apreensão discursiva.

**Tarefa 3: Exercício 1**

Na construção anterior, mova os seletores "largura", "comprimento" e "altura", buscando fazer combinações até que apareça a frase "Este Paralelepípedo é um Cubo". Como devem ser as dimensões do paralelepípedo para que ele seja um Cubo?

Assinale a sua resposta aqui

A  Todas devem ter a mesma medida.

B  Pelo menos duas tem que ter a mesma medida.

C  Todas devem ter medidas diferentes.

**FIGURA 9:** Exercício 1

**FONTE:** Elaborada pelo autor

O exercício 2 perguntava qual polígono que compõe as faces do cubo (Figura 10). Os estudantes da dupla AE leram o enunciado do exercício, retornaram ao *applet*, movimentaram o controle deslizante<sup>5</sup> “mova”, planejando o cubo representado à direita. Trata-se de uma modificação mereológica. Em seguida, responderam que o polígono que compõe as faces do cubo é o quadrado. Interessante notar que os estudantes não fizeram uma rotação do plano para poderem ver a planificação de diferentes formas. Essa rotação caracterizaria uma modificação posicional. Ao que parece apenas a planificação foi suficiente para eles responderem corretamente. Todavia, cabe nos perguntar: Como eles perceberam que os ângulos internos das faces eram de 90°? A representação da planificação mostrada na Figura 11 não evidencia isso. Por outro lado, as medidas dos lados parecem ter os mesmo tamanhos. Será que os estudantes analisaram apenas as medidas dos lados para responder à pergunta? De qualquer forma, acreditamos que a planificação ajudou no desenvolvimento da apreensão perceptiva e operatória.

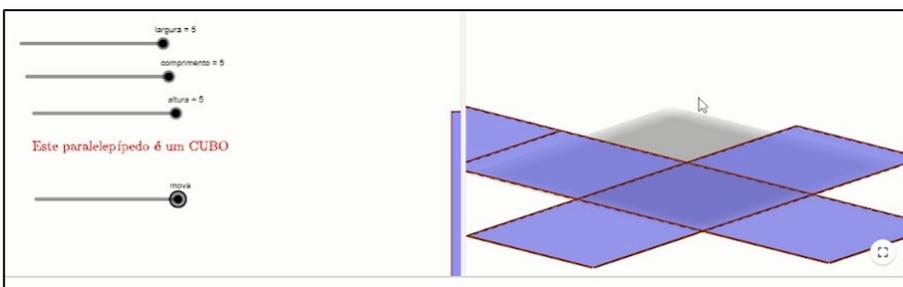
**Tarefa 4: Exercício 2**

Na construção anterior, mova os seletores "largura", "comprimento" e "altura" até que se obtenha um cubo. Após isso mova o seletor "mova" para planificar o Cubo. Qual polígono compõe as faces do Cubo?

Aa  $\pi$  um quadrado

**FIGURA 10:** Exercício 2

**FONTE:** Elaborada pelo autor



**FIGURA 11:** Planificação do Cubo

**FONTE:** Elaborada pelo autor

<sup>5</sup> Na atividade o controle deslizante está sendo chamado de seletor.

## Considerações Finais

Nossa pesquisa foi norteadada pela seguinte questão: Quais as contribuições de um livro dinâmico de Geometria Espacial para o processo de aprendizagem e ensino de prismas e pirâmides?

Diante dessa questão, produzimos um livro dinâmico de geometria espacial, abordando o tema prisma e pirâmides. Experimentamos partes do livro e a análise dos dados mostrou indícios de potenciais contribuições do livro dinâmico para o processo de aprendizagem e ensino de prismas e pirâmides, sobretudo no que diz respeito ao fato de ele oferecer condições para o desenvolvimento das apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. Acreditamos que tais apreensões estão bastante relacionadas com o processo de visualização que é bastante ressaltado pelas pesquisas que investigaram dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial.

Cabe ressaltar que apesar de estarmos mais interessados nas contribuições do livro dinâmico que produzimos, também encontramos aspectos que precisam ser melhorados. Dentre eles, destacamos a necessidade de criar mais atividades que envolvem a construção dos prismas e pirâmides e o uso do GeoGebra 3D com realidade aumentada. Ressaltamos ainda que o livro dinâmico que produzimos não tem a pretensão de substituir todos os outros recursos didáticos usados no ensino de geometria espacial. É muito importante que o professor utilize também os materiais concretos, tais como prismas e pirâmides, para o ensino desses conteúdos.

Finalmente, gostaríamos de enfatizar a necessidade de criação de mais Livros Dinâmicos de matemática que possam apoiar o trabalho dos professores e alunos em sala de aula. Esperamos que este trabalho possa servir de inspiração para criação de mais livros dinâmicos de diferentes assuntos.

## Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

DUVAL R.. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, 17, 121-138, 1994.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, p. 11–33, 2008.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução L. F LEVY; M.R.A SILVEIRA. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Mérciles Thadeu Moretti. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465> Acesso em: 31 jan. 2023.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução Mérciles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b.

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97/22381> Acesso em: 31 jan. 2023.

DUVAL, R. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012c.

<<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118>> Acesso em: 31 jan. 2023.

LORENZATO, S. A. **Por que não ensinar Geometria?** Disponível em: <[http://professoresdematematica.com.br/wa\\_files/0\\_20POR\\_20QUE\\_20NAO\\_20ENSINAR\\_20GEO\\_METRIA.pdf](http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEO_METRIA.pdf) <https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/download/47318/33678> >. Acesso em: 10 abr. 2022.

NÓBRIGA, J. C. C.; DANTAS, S. C. **Uma Proposta de Atividade com *Feedbacks* Automáticos no GeoGebra.** Disponível em: < <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12755> >. Acesso em 10 jun. 2022.

NÓBRIGA, J. C. C. **Demonstrações Matemáticas Dinâmicas.** Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e61725/40047> >. Acesso em: 01 abr. 2022.

NÓBRIGA, J. C. C.; SIPLE, I. Z. **Livros Dinâmicos de Matemática.** Disponível em: < <https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/download/47318/33678> >. Acesso em: 01 abr. 2022.

PAVANELLO, M. R. **Por que ensinar/aprender Geometria?** Disponível em: < [http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012\\_curso\\_32\\_e\\_39\\_-\\_matematica\\_-\\_clecimara\\_medeiros.pdf](http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso_32_e_39_-_matematica_-_clecimara_medeiros.pdf) >. Acesso em: 10 mai.2022.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades.** 2009. Disponível em: < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf> >. Acesso em: 12 abr. 2022.

SANTOS, S. C. **A Produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: O caso da geometria euclidiana espacial.** Dissertação de mestrado defendida no Programa de pós-graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos. Unesp. 2006.

SCHULZ, M. de A. **Números racionais e suas representações com base no ensino híbrido.** Dissertação de mestrado defendida no programa de pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Furb. 2017

SETTIMY, T. F. de O. **Desenvolvendo a visualização por meio de papel, lápis e toques na tela.** 2019. Disponível em: < <http://eventos.sbem.com.br/index.php/EBRAPEM/EBRAPEM2019/paper/view/310/467> >. Acesso em: 12 abr. 2022.