



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i2p032-047>

Uma abordagem geométrica para relações entre os números de Fibonacci e Leonardo com o aporte do GeoGebra¹

A geometric approach to relations between Fibonacci and Leonardo numbers with the contribution of GeoGebra

MILENA CAROLINA DOS SANTOS MANGUEIRA²

<https://orcid.org/0000-0002-4446-155X>

CARLA PATRÍCIA SOUZA RODRIGUES PINHEIRO³

<https://orcid.org/0000-0003-0766-8647>

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES⁴

<https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

PAULA MARIA MACHADO CRUZ CATARINO⁵

<https://orcid.org/0000-0001-6917-5093>

RESUMO

O estudo das seqüências numéricas é amplamente explorado no campo da Matemática Pura, com destaque para a famosa seqüência de Fibonacci, originada do clássico problema dos coelhos infinitos, sendo objeto de estudo em diversas disciplinas. A partir desta, emergiu a seqüência de Leonardo, que preserva certas semelhanças com a seqüência de Fibonacci, bem como recorrências similares e uma relação intrínseca entre seus termos. Nesse contexto, o objetivo deste artigo é apresentar uma interpretação geométrica destas seqüências e suas inter-relações utilizando o software GeoGebra, no âmbito da Educação Matemática. Para tanto, as definições e características que conectam esses números foram analisadas em uma perspectiva algébrica e geométrica. Em suma, constatou-se que a construção geométrica no GeoGebra possibilita uma exploração visual de conceitos matemáticos abstratos, configurando-se como um suporte à compreensão das propriedades apresentadas.

Palavras-chave: representação geométrica; seqüência de Fibonacci; seqüência de Leonardo; GeoGebra.

ABSTRACT

The study of numerical sequences is widely explored in the field of Pure Mathematics, with emphasis on the famous Fibonacci sequence, which originated from the classic problem of infinite rabbits,

¹ Apoio: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT)

² Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – milenacarolina24@gmail.com

³ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – profcarlapatricia@gmail.com

⁴ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – fregis@ifce.edu.br

⁵ Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – pcatarino23@gmail.com

being a subject of study in various disciplines. From this, the Leonardo sequence emerged, which maintains certain similarities with the Fibonacci sequence, including similar recurrences and an intrinsic relationship between its terms. In this context, the objective of this article is to present a geometric interpretation of these sequences and their interrelations using the GeoGebra software, within the scope of Mathematics Education. For this purpose, the definitions and characteristics that connect these numbers were analyzed from an algebraic and geometric perspective. In summary, it was found that geometric construction in GeoGebra enables a visual exploration of abstract mathematical concepts, serving as a support for understanding the presented properties.

Keywords: *geometric representation; Fibonacci sequence; Leonardo sequence; GeoGebra.*

Introdução

Os números da sequência de Fibonacci, criados pelo matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), têm sido estudados e explorados em várias áreas, como Matemática, Artes, Ciências, Computação, entre outras. E ainda, esta sequência origina outras sequências numéricas, como a sequência de Leonardo, na qual podem ser notadas relações e similaridades entre ambas (Catarino; Borges, 2019).

O estudo de sequências numéricas está presente no âmbito acadêmico, especialmente na Matemática Pura. Recentemente, o interesse pela sequência de Leonardo tem crescido, embora ainda esteja limitado a abordagens complexas, que por sua vez exigem um conhecimento prévio de propriedades matemáticas específicas. Usualmente o estudo destas sequências conta com abordagens que incluem representações algébricas e/ou combinatórias, entretanto, que desconsideram a possibilidade de uma perspectiva dinâmica direcionada para o ensino das sequências apresentadas.

Assim, destaca-se o potencial que permeia a investigação dessas sequências, bem como seus possíveis contextos de aplicação. Na Educação Matemática, considera-se relevante a exploração dessas sequências, sobretudo no contexto de seu ensino. Ao analisar as definições e características das sequências de Fibonacci e Leonardo sob perspectivas algébricas e geométricas, os alunos desenvolvem habilidades críticas de pensamento, incluindo a capacidade de reconhecer padrões, formular e testar hipóteses, e compreender relações matemáticas complexas.

Dito isto, pondera-se que a relevância deste estudo para a Educação Matemática pode ser justificada por diversos fatores. A utilização do *software* GeoGebra para a construção geométrica das sequências de Fibonacci e Leonardo oferece uma ferramenta visual, que permite que alunos e professores visualizem conceitos matemáticos abstratos de maneira concreta, otimizando, assim, a compreensão e o ensino desses tópicos e propriedades relacionadas, como podemos ver nos trabalhos de Santos, Sousa e Alves (2024) e Barros *et al.* (2024). Além disso, o uso de tecnologias como o GeoGebra promove uma abordagem interativa para o ensino da matemática, aumentando o interesse dos alunos e melhorando a retenção de conceitos, alinhando-se com as tendências atuais na Educação Matemática.

Considerando a limitação de pesquisas que abordam o estudo matemático da relação das sequências de Fibonacci e Leonardo com foco específico no ensino de matemática, este artigo propõe uma interpretação geométrica dessas sequências e suas propriedades inter-relacionadas, utilizando o *software* GeoGebra. Recursos visuais, como *softwares* e aplicativos, auxiliam no desenvolvimento do raciocínio matemático, possibilitando que os alunos percebam relações e compreendam conceitos matemáticos abstratos de forma mais tangível (MATHIAS *et al.*, 2019).

O uso do GeoGebra favorece a visualização da relação entre as sequências de Fibonacci e Leonardo. Contudo, inicialmente, trataremos destas sequências separadamente. Nas próximas seções abordamos a sequência de Fibonacci, sua recorrência e propriedades inerentes e, de modo análogo, apresentamos uma caracterização da sequência de Leonardo, ao passo que exploramos a relação entre ambas as sequências.

Posteriormente, apresenta-se a elaboração de uma construção geométrica no GeoGebra para ilustrar esta a relação, considerando que a representação visual estruturada pode simplificar a compreensão de conceitos abstratos, estimular novas ideias e contribuir para a resolução de problemas.

1. Introdução à sequência de Fibonacci

A princípio, ressalta-se a existência de trabalhos encontrados na literatura matemática referentes à emblemática sequência de Fibonacci. Segundo Dunlap (2003), o termo Fibonacci é abreviação de *filho de Bonaccio*, seu pai. Fibonacci agregou conhecimentos nos campos da Álgebra e Aritmética, com viagens que realizou no território europeu (POSAMENTIE; LEHMANN, 2007). Dentre os diversos trabalhos desenvolvidos por Leonardo de Pisa nessas áreas da Matemática, destaca-se que este matemático foi eternizado a partir do problema que descreve a reprodução dos coelhos imortais (WELLS, 2005). O problema proposto foi:

Um homem coloca um par de coelhos em um cercado, a fim de que estes se reproduzam. Quantos pares de coelhos existirão neste cercado, ao final de um ano, sabendo que a natureza desses coelhos é tal qual que a cada mês, cada par reproduz outro par, que se torna produtivo do segundo mês em diante? (BOYER, 2006, p. 174).

Com a resolução do problema citado acima, encontra-se a seguinte sequência:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

A sequência indica que no primeiro mês, temos apenas 1 par de coelhos, como especificado no problema. No segundo mês, esse único par de coelhos se reproduz e temos mais 1 par. Agora, temos 2 pares de coelhos. A partir do terceiro mês, cada par de coelhos existente se reproduzirá e terá um novo par de coelhos, enquanto o novo par que nasceu no mês anterior ainda não se reproduzirá. Portanto, no terceiro mês, teremos 2 pares de coelhos, pois o par original se reproduziu, mas o novo par ainda não. No quarto mês, teremos o par original (que se reproduz novamente), o

novo par (que agora se reproduz) e um terceiro par que nasceu da reprodução do par original. Assim, teremos 3 pares de coelhos.

Esse padrão continua, onde a quantidade de pares de coelhos em cada mês é a soma dos pares existentes nos dois meses anteriores, o que é exatamente a definição da sequência de Fibonacci. Alves e Catarino (2017) estabelecem a lei de recorrência da sequência de Fibonacci a partir da definição 1:

Definição 1. $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para $n \geq 1$. Sendo $F_1 = 1, F_2 = 1$ as suas condições iniciais.

Considerando a sequência numérica como x_n , o termo geral é dado pela razão entre os dois termos consecutivos, ou seja, $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, que também é conhecida como *razão áurea*. Matematicamente, a definição dessa razão é “uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte” (RAMOS, 2013, p. 32).

Desse modo, esta linha é determinada como um segmento \overline{AB} , em que se considera $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = 1$. Logo, $\overline{AB} = x + 1$, o que implica que $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{CB}$. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Ao realizar algumas manipulações algébricas, tem-se que o polinômio característico da sequência de Fibonacci é dado por $x^2 - x - 1 = 0$ e possui duas raízes reais, sendo elas (ALVES, 2020):

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Observe que a raiz positiva é um valor aproximado a 1,61803... = Φ . Esse número é conhecido como *número de ouro* ou *razão áurea* e é representado por uma constante irracional, que representa, matematicamente, a perfeição da natureza.

A sequência de Fibonacci está relacionada às definições e identidades sobre o retângulo, triângulo e espiral de razão áurea. Alves e Catarino (2017) esclarecem que a sequência de Fibonacci, representada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, em que $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, é uma relação de recorrência de segunda ordem. Além disso, os autores destacam que esta sequência foi, inicialmente, propagada pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891), que elaborou algumas identidades de Fibonacci exploradas na obra de Koshy (2001).

A sequência também pode ser reescrita como $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$, onde em particular, tem-se que:

$$F_1 = F_2,$$

$$F_2 = F_3 - F_1$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= F_4 - F_2 \\
 F_4 &= F_5 - F_3 \\
 &\vdots \\
 F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2} \\
 F_{2n} &= F_{2n+1} - F_{2n-1} \\
 F_{2n+1} &= F_{2n+2} - F_{2n}
 \end{aligned}$$

Com base nessas informações, Catarino e Borges (2019) destacam a recorrência da sequência de Leonardo. Esta sequência, também conhecida como uma sequência numérica de segunda ordem, é caracterizada por sua recorrência não homogênea e mostra uma notável semelhança com a famosa sequência de Fibonacci.

2. Sequência de Leonardo

Historicamente, acredita-se que a sequência de Leonardo foi estudada por Leonardo Pisano, o mesmo criador da sequência de Fibonacci, devido à similaridade entre estas sequências e por esta última carregar o nome Leonardo (VIEIRA et al., 2019). Porém, não há trabalhos na literatura que comprovem tal afirmação.

Catarino e Borges (2019) apresentam uma definição da sequência de Leonardo, como apontado na Definição 2:

Definição 2. A relação de recorrência não homogênea da sequência de Leonardo é dada por:

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2.$$

em que os termos iniciais são iguais a $Le_0 = Le_1 = 1$. Ao comparar esta sequência com a sequência de Fibonacci, observa-se que é acrescentado o valor “1” à relação de recorrência. Ademais, os termos iniciais deixam de ser 0 e 1 e passam a ser 1 e 1. Manguiera (2022) afirma que as propriedades de Leonardo são análogas as propriedades de Fibonacci.

Posteriormente, alguns pesquisadores no campo da Matemática Pura, tais como Shannon (2019), Vieira, Catarino e Alves (2019), Alp e Koçer (2021), Manguiera (2022), Gökbaş (2023), Özimamoglu (2023), Prasad, Mohanty, Kumari e Mahato (2024) e Catarino e Spreafico (2024) apresentaram estudos inerentes a essa sequência, realizando processos de complexificações e generalizações.

Salienta-se que muitas propriedades das duas sequências são semelhantes, porém não todas. A seguir, veremos alguns das maneiras em que os números de Fibonacci e de Leonardo podem ser relacionados. Posteriormente, apresentaremos uma abordagem geométrica com o aporte do GeoGebra.

Catarino e Borges (2019) apontam uma segunda relação de recorrência para a sequência de Leonardo, transformando-a em uma sequência homogênea de terceira ordem:

Definição 3. A relação de recorrência homogênea da sequência de Leonardo é dada por:

$$Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}, \quad n \geq 3.$$

Catarino e Borges (2019) ainda apresentam uma definição matemática que relaciona os números de Leonardo com de Fibonacci, na definição 4, dada por:

Definição 4. Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se a relação entre os números de Leonardo e os números de Fibonacci.

$$Le_n = 2F_{n+1} - 1, \quad n \geq 0.$$

Nas Definições 2 e 3 mantêm-se os valores iniciais já estabelecidos anteriormente. Com base nessas definições, Mangueira (2022) afirma que o polinômio característico da sequência de Leonardo é representado por $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, como podemos ver no Teorema 1:

Teorema 1. (Polinômio característico) Para os números de Leonardo, o polinômio característico é dado por:

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0,$$

sendo um polinômio de terceiro grau, em que uma das raízes é igual a 1 e as outras duas correspondem às raízes do polinômio característico de Fibonacci.

Demonstração. Com base no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e a matriz base da sequência de Leonardo

dada por: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $\lambda I - Q = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. E, ainda:

$$\det(\lambda I - Q) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1.$$

Então, dado $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = 0$, o que implica em $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. ■

Os números de Leonardo também convergem entre os termos vizinhos ao número de ouro, aproximadamente 1,61, assim como ocorre na sequência de Fibonacci (MANGUEIRA, 2022). Com base nas relações de recorrência e a associação entre as duas sequências, Alp e Koçer (2021) mostram algumas identidades envolvendo os números de Leonardo, dadas pelos Teoremas 2, 3 e 4:

Teorema 2. (Fórmula de Binet) Com base na demonstração da fórmula de Binet para sequência de Fibonacci, temos a fórmula de Binet para os números de Leonardo, sendo:

$$Le_n = \frac{2\alpha^{n+1} - 2\beta^{n+1} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

em que α e β são as raízes do polinômio característico de Fibonacci, que por sua vez também são raízes do polinômio característico de Leonardo.

Demonstração. Utilizando a relação entre as sequências de Fibonacci e Leonardo e a fórmula de Binet de Fibonacci, tem-se que:

$$Le_n = 2F_{n+1} - 1 \text{ e } F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Substituindo F_{n+1} na relação entre as sequências:

$$\begin{aligned} Le_n &= 2 \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - 1 \\ &= \frac{2\alpha^{n+1} - 2\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - 1 \\ &= \frac{2\alpha^{n+1} - 2\beta^{n+1} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

■

Teorema 3. Para $n \geq 1$, tem-se a identidade:

$$Le_{n+1}^2 + Le_n^2 = 2(Le_{2n+2} - Le_{n+2} + 1)$$

sendo Le_n, F_n os n -ésimos números de Leonardo e Fibonacci, respectivamente.

Para demonstrar esse teorema, usamos a Definição 4.

Demonstração.

$$\begin{aligned} Le_{n+1}^2 + Le_n^2 &= (2F_{n+2} - 1)^2 + (2F_{n+1} - 1)^2 \\ &= 4F_{2n+3} - 4F_{n+3} + 2 \\ &= 2(Le_{2n+2} - Le_{n+2} + 1). \end{aligned}$$

■

Teorema 4. Tem-se que $Le_{n+1}F_{n+1} - Le_nF_n = Le_nF_{n+1} + F_n$, para $n > 0$.

Demonstração. Utilizando a fórmula de Binet de Leonardo e Fibonacci, temos:

$$\begin{aligned} & Le_{n+1}F_{n+1} - Le_nF_n = \\ &= \left(\frac{2\alpha^{n+2} - 2\beta^{n+2} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{2\alpha^{n+1} - 2\beta^{n+1} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{2L_{2n+2} + 4((-1))^n - L_n - L_{n-2}}{5} \end{aligned}$$

■

Após discutirmos as características e teoremas relacionados às sequências de Leonardo e Fibonacci, na próxima seção apresenta-se uma abordagem geométrica destas sequências utilizando o GeoGebra.

3. Uma abordagem geométrica

Para visualizar geometricamente a relação entre as sequências de Fibonacci e Leonardo, optamos por utilizar o GeoGebra. Escolhemos essa ferramenta devido à sua natureza de software livre, disponível em diversos idiomas, e por oferecer uma interface que proporciona um "ambiente de geometria dinâmica que permite a criação, visualização e manipulação de representações de conceitos matemáticos, tratando geometria, álgebra e cálculo de forma interligada" (SOUSA et al., 2023, p. 1).



Inicia-se a construção usando dois controles deslizantes localizado na barra de ferramenta, para representar a quantidade de termos das sequências. Utilizando a letra “n” para os termos da sequência de Fibonacci, e a letra “m” para os termos da sequência de Leonardo, determina-se um intervalo entre um a dezenove para a construção geométrica pretendida.

Em seguida, os termos das sequências são estabelecidos por meio de um comando chamado *Lista de Iteração*, ilustrado na Figura 1:

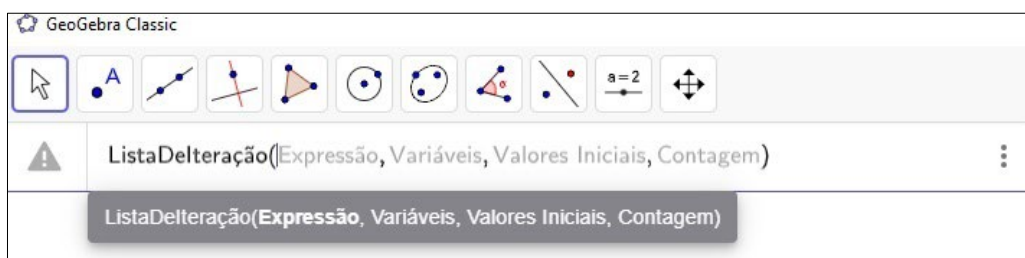


FIGURA 1: Comando lista de iteração.

FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

A lista de iteração determina os termos da sequência de Fibonacci e de Leonardo de acordo com a movimentação do controle deslizante, criado anteriormente. Dessa maneira, a Figura 2 apresenta como implementar esta lista, ao digitar o seguinte comando na caixa de Entrada:



FIGURA 2: Lista de iteração para sequência de Fibonacci
FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

Para a construção dos termos da sequência de Fibonacci, utiliza-se a caixa de entrada (Figura 1) e escolhe-se o comando *Lista de Iteração* para determinar esses termos, para então declarar a função entre as variáveis. Nesse caso, a adição foi utilizada, por tratar-se de uma sequência recursiva e linear. Em seguida, apresentam-se as variáveis envolvidas na operação, bem como os valores iniciais para cada uma das sequências. Por fim, o controle deslizante n é criado para estabelecer a quantidade de termos que devem aparecer na construção.

De forma análoga, os termos para a sequência de Leonardo foram criados. Para essa ação, novamente utilizamos a caixa de entrada com o comando sequência. Nesse comando determinamos a expressão, variável, valor inicial, valor final e incremento. Note que o comando na caixa de entrada foi o mesmo, porém o que difere as sequências é controle deslizante m , como pode ser observado na Figura 3:

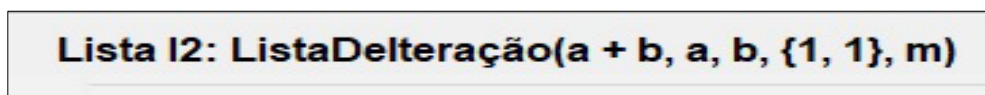


FIGURA 3: Lista de iteração para sequência de Leonardo.
FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

A partir dessas duas listas de iteração, I1 e I2, criam-se os pontos das sequências de Fibonacci e de Leonardo no plano cartesiano como mostra a Figura 4 a seguir:

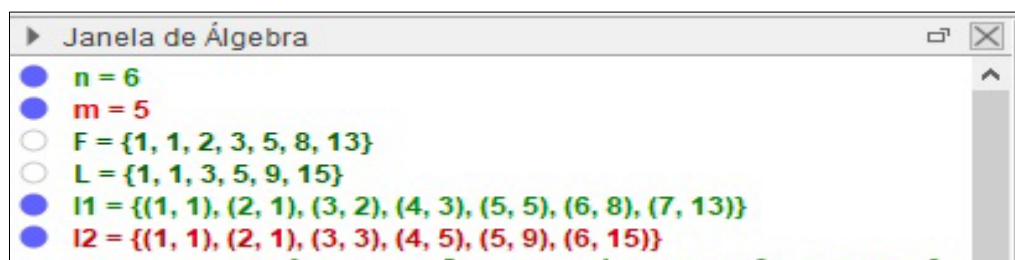


FIGURA 4: As sequências associadas a um ponto no plano cartesiano
FONTE: Elaborada pelos autores

Na Figura 4, observa-se que cada termo da sequência de Fibonacci e de Leonardo foi associado a uma posição no plano cartesiano. Partindo da criação dos termos das sequências, apresenta-se de forma visual a sua localização, por meio de pontos no plano cartesiano. Isto configura-se em uma representação geométrica e pode ser observado na janela de visualização do GeoGebra, conforme a Figura 5:

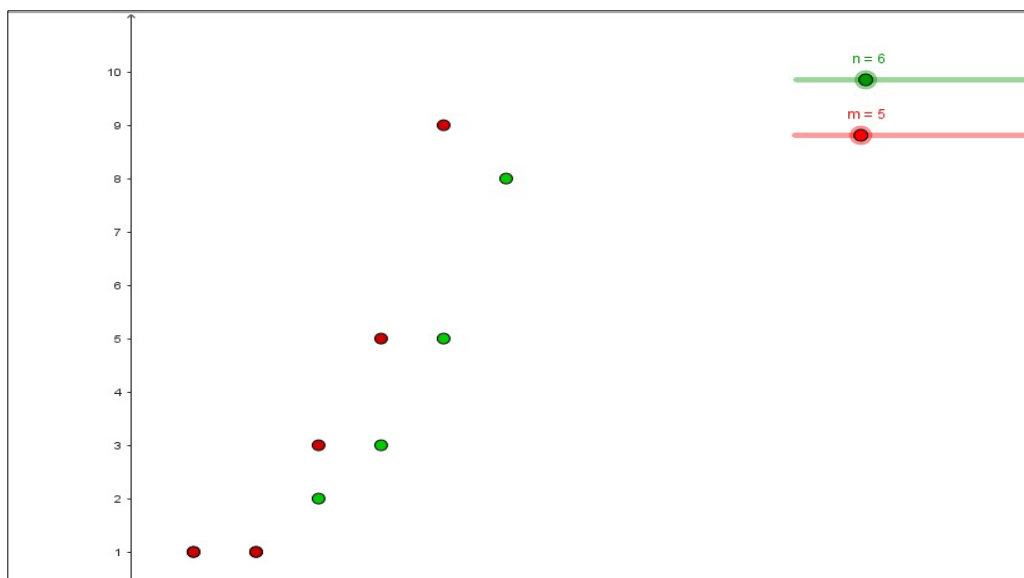


FIGURA 5: Representação das sequências por meio de ponto
FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

Observando a Figura 5, podemos destacar que os pontos de cor verde representam os números de Fibonacci, e os pontos na cor vermelha representam os números de Leonardo.

Dando continuidade à construção, faz-se a ligação entre os pontos por meio do comando *polinômio*, também inserido na caixa de entrada. Esse comando, por sua vez, mostra a representação algébrica a partir da função em relação as sequências na janela de álgebra, como mostrado na Figura 6:

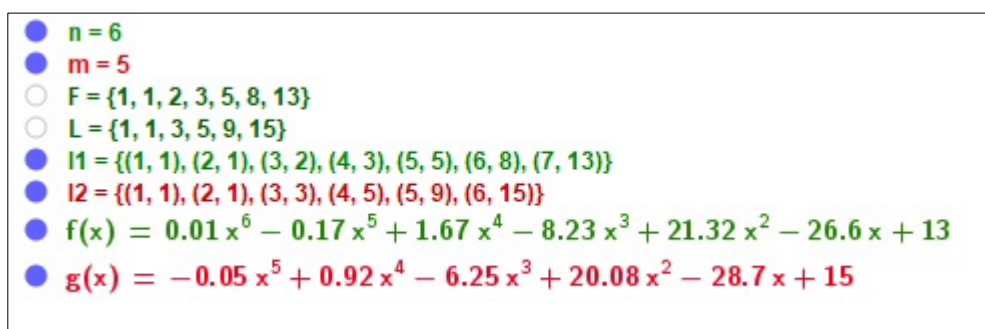


FIGURA 6: Os polinômios das sequências de Fibonacci e Leonardo.
FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

Na janela de visualização, esses polinômios são representados graficamente, conforme a Figura 7:

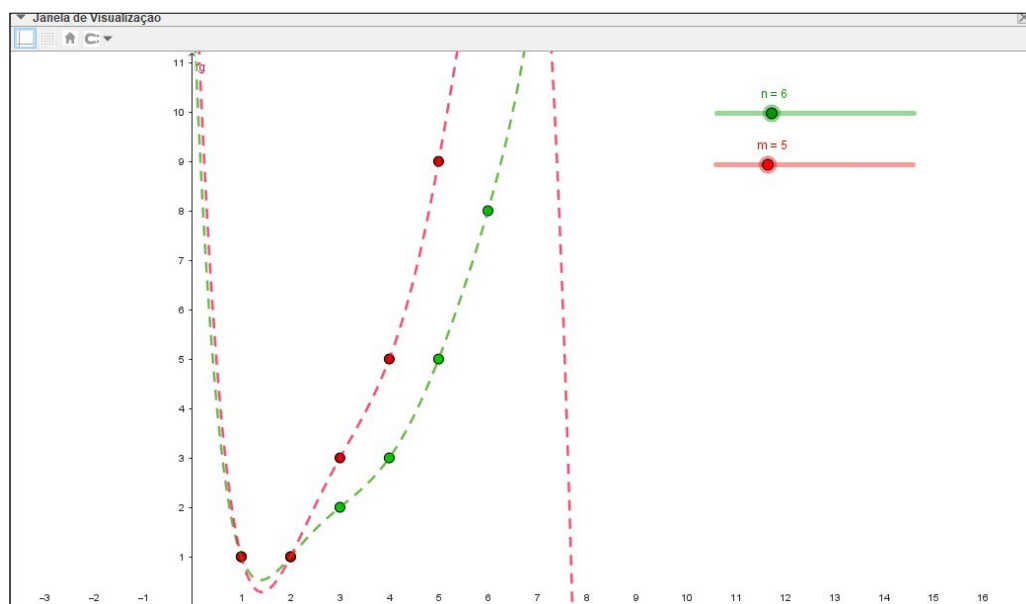


FIGURA 7: Gráficos das sequências de Fibonacci e Leonardo.
FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

Na Figura 7 estão traçados os gráficos que correspondem as sequências de Fibonacci e a de Leonardo, sendo representados pelas cores pontilhadas verde e vermelha, respectivamente. Para finalizar a representação geométrica, a ferramenta *polígono* foi utilizada, em que os pontos foram interligados três a três, formando diversos triângulos, como apresentado na Figura 8:

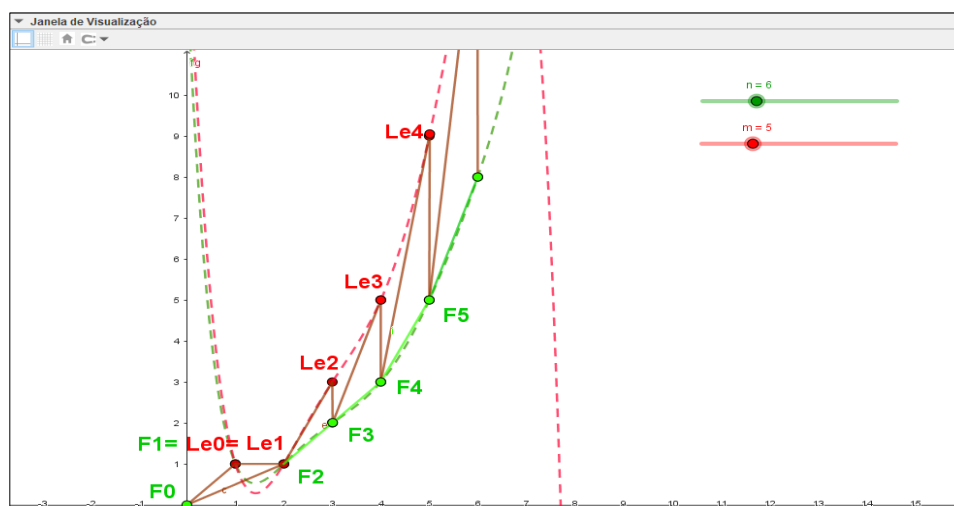


FIGURA 8: Relação entre os números das sequências de Fibonacci e Leonardo.
FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

Na Figura 8, os triângulos têm como vértices dois números consecutivos da sequência de Fibonacci e um termo da sequência de Leonardo. Dessa maneira, é possível fazer uma generalização desse triângulo para determinar um dos ângulos formados por esses três pontos, sendo o GeoGebra ferramenta fundamental para essa visualização.

Logo, considerando os triângulos com os pontos F_n, Le_{n-1} e F_{n+1} , apresenta-se o valor do ângulo $\theta_n = (F_n, Le_{n-1} \text{ e } F_{n+1})$ na Figura 9:

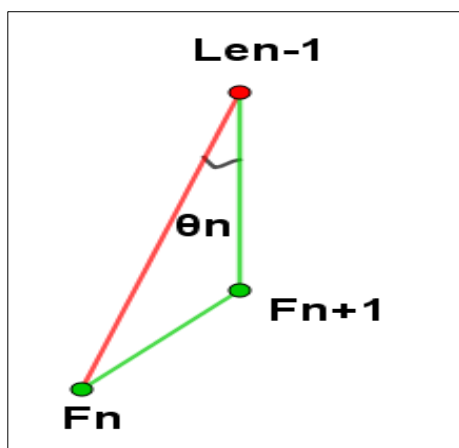


FIGURA 9: Ângulo θ_n .

FONTE: Elaborada pelos autores (2024).

Com base nas Definições 1 e 4, tem-se:

$$\overrightarrow{Le_{n-1}F_n} = (1, F_n - Le_{n-1}) = (1, -F_n + 1)$$

$$\overrightarrow{Le_{n-1}F_{n+1}} = (2, F_{n+1} - Le_{n-1}) = (2, -F_n + F_{n-1} + 1)$$

$$\overrightarrow{F_nF_{n+1}} = (1, F_{n+1} - F_n) = (1, F_{n-1})$$

E segue que:

$$|\overrightarrow{Le_{n-1}F_n}| = \sqrt{2 + F_n^2 - 2F_n}$$

$$|\overrightarrow{Le_{n-1}F_{n+1}}| = \sqrt{4 + F_n^2 - 2F_n}$$

$$|\overrightarrow{F_nF_{n+1}}| = \sqrt{1 + F_{n-1}^2}$$

Podemos então calcular a fórmula geral para o $\cos \theta_n$, dado pelo cosseno do ângulo formado pelos pontos (F_n, Le_{n-1}) e F_{n+1} :

$$= \frac{\overrightarrow{Le_{n-1}F_n} \cdot \overrightarrow{Le_{n-1}F_{n+1}}}{|\overrightarrow{Le_{n-1}F_n}| \cdot |\overrightarrow{Le_{n-1}F_{n+1}}|}$$

$$= \frac{3+F_{n-1}F_nF_{n+1}}{\sqrt{2+F_n^2-2F_n} \cdot \sqrt{4+F_n^2-2F_n}}$$

Este resultado representa uma interpretação geométrica da relação entre as sequências de Leonardo e Fibonacci, o que gera o Teorema 5:

Teorema 5. As seguintes relações no triângulo com os vértices (F_n, Le_{n-1}) e $F_-(n+1)$ para $n \geq 2$, conforme a Figura 6:

- (a) o ângulo $\theta_n = (F_n, Le_{n-1})$ e $F_-(n+1)$ aumenta quando “n” aumenta.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.
- (c) Os quocientes dos comprimentos das arestas do triângulo $(F_n, Le_{n-1}$ e $F_{n+1})$ convergem para φ e para φ^2 .
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \frac{|Le_{n-1}F_n|}{|Le_{n-1}F_{n+1}|} = \varphi$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \frac{|Le_{n-1}F_{n+1}|}{|Le_{n-1}F_{n+1}|} = \varphi^2$.

Demonstração:

- (a) F_n aumenta à medida que “n” aumenta,

$$\cos \theta_n = \frac{3+F_{n-1}F_nF_{n+1}}{\sqrt{2+F_n^2-2F_n} \cdot \sqrt{4+F_n^2-2F_n}} \geq \frac{3+F_nF_{n+1}F_{n+2}}{\sqrt{2+F_{n+1}^2-2F_{n+1}} \cdot \sqrt{4+F_{n+1}^2-2F_{n+1}}} = \cos \theta_{n+1}$$

Isso implica que θ_n aumenta à medida que “n” aumenta.

- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n = \frac{3+F_{n-1}F_nF_{n+1}}{\sqrt{2+F_n^2-2F_n} \cdot \sqrt{4+F_n^2-2F_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{(F_{n-1}F_nF_{n+1})^3} + 1}{\sqrt{\frac{2}{F_n^2-2F_n} + 1} \cdot \sqrt{\frac{4}{F_n^2-2F_n} + 1}} = +1$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0.$$

- (c) De $\varphi \approx 1,618 > 1$, com a fórmula de Binet, implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi^{-(n+1)})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi^{-n})} = \frac{\varphi^{2n+1} - \varphi^{-1}}{\varphi^{2n} - 1} = \varphi.$$

Esse limite foi descoberto pelo grande astrônomo Johannes Kepler (RADU-LOAN MIHAI, 2020) há quatro séculos. Seu resultado implica em:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \frac{|Le_{n-1}F_n|}{|Le_{n-1}F_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2+F_n^2-2F_n}{4+F_n^2-2F_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{2}{F_n^2-2F_n} + \frac{F_n^2-2F_n}{F_n^2-2F_n}}{\frac{4}{F_n^2-2F_n} + \frac{F_n^2-2F_n}{F_n^2-2F_n}}}$$

E pode-se observar que a partir das frações dentro dos radicais, e com base nas informações do item b, tem-se que:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Por fim, o item (d) pode ser demonstrado de forma análoga. Portanto, as demonstrações validam a construção geométrica proposta utilizando o GeoGebra.

4. Considerações finais

A presente pesquisa objetivou apresentar uma interpretação geométrica das sequências de Fibonacci e Leonardo, bem como suas propriedades de forma inter-relacionada, utilizando o *software* GeoGebra como amparo visual. Inicialmente, as sequências foram abordadas separadamente, em que as definições, fórmulas de Binet, teoremas e propriedades inerentes a elas foram esclarecidos como pré-requisito à compreensão das demonstrações matemáticas envolvidas. Posteriormente, utilizou-se da relação entre as duas sequências para a construção geométrica utilizando o *software*.

Explorar a relação entre as sequências de Fibonacci e Leonardo, especialmente utilizando a visualização fornecida pelo *software* GeoGebra, mostrou potencial para promover uma compreensão mais profunda da relação entre os conceitos matemáticos abordados, mas também conduziu à descoberta de um novo teorema baseado nas relações do triângulo, com vértices compostos a partir de elementos de ambas as sequências. A possibilidade de exploração visual oferecida pelo GeoGebra torna sua demonstração e compreensão mais acessível, tanto para estudantes quanto para pesquisadores.

Por último, este estudo oferece uma contribuição significativa para o campo matemático ao fornecer uma representação geométrica das relações entre os números de Fibonacci e Leonardo. Essa abordagem possibilitou a exploração e validação de hipóteses sobre as propriedades intrínsecas das sequências por meio da visualização. Destaca-se, ao mesmo tempo, a relevância da incorporação de *softwares* de visualização em pesquisas futuras e no âmbito educacional, estimulando discussões matemáticas de maneira dinâmica e interativa.

5. Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

- ALP, Y.; KOÇER, E. G. Some properties of Leonardo numbers. **Konuralp J. Math**, v. 9, n. 1, p. 183-189, 2021.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v. 14, n. 1, p. 112-136, 2017.
- ALVES, F. R. V. Fórmula de de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci - SGF. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], v. 17, n. 33, p. 01-16, 2020.
- BARROS, F. E. et al. The construction of figured numbers in GeoGebra software using algebraic properties. **The Mathematics Enthusiast**, v. 21, n. 1, p. 203-224, 2024.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª ed. Edgard Blücher, 2006.
- CATARINO, P. M. M. C.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2019.
- CATARINO, P. M. M. C.; SPREAFICO, E. A Note on Bi-Periodic Leonardo Sequence. **Armenian Journal of Mathematics**, v. 16, n. 5, p. 1-17, 2024.
- DUNLAP, R. A. **The golden ratio and Fibonacci numbers**. World Scientific, 2003.
- GÖKBAS, H. A New Family of Number Sequences: Leonardo-Alwyn Numbers. **Armenian Journal of Mathematics**, [S. l.], v. 15, n. 6, p. 1-13, 2023.
- GOMES, C. A.; OLIVEIRA, O. d. O teorema de Cayley-Hamilton. **IME-USP Oswaldo Rio Branco de Oliveira**, p. 1-11, 2019.
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2**. John Wiley & Sons, 2001.
- PRASAD, K.; MOHANTY, R.; KUMARI, M.; MAHATO, H. Some new families of generalized k -Leonardo and Gaussian Leonardo Numbers. **Communications in Combinatorics and Optimization**, v. 9, n. 3, p. 539-553, 2024.
- POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. **The (Fabulous) Fibonacci Numbers**. Prometheus Books, 2007.
- SHANNON, A. G. A note on generalized Leonardo numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 97-101, 2019.
- MANGUEIRA, M. C. S. **Engenharia Didática: Um processo de Híbridização e Hipercomplexificação de sequências lineares recursivas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

MATHIAS, C. V.; DA SILVA, H. A.; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 8, n. 2, p. 62–77, 2019.

ÖZIMAMOĞLU, H. On Leonardo sedenions. **Afrika Matematika**, v. 34, n. 2, p. 26, 2023.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Brasil, 2013.

SANTOS, M. G. M. D.; SOUSA, R. T. DE; ALVES, F. R. V. Situações Didáticas Profissionais: concepções e obstáculos no ensino de sistemas lineares e o uso do GeoGebra. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1-22, 15 abr. 2024.

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. F. Categories of Intuitive Reasoning in the Teaching of Parabolas: A Structured Practice in Didactic Engineering. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 18, n. 4, 2023.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 156-173, 2019.

WELLS, D. **Prime Numbers**: the mysterious figures in the Math. John Wiley and Sons Inc., 2005.