



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i2p067-088>

## Entre o digital e o físico: integrando recursos com o GeoGebra para práticas criativas em espaços de aprendizagem

Digital and physical: integrating resources with GeoGebra for creative practices in learning spaces

DIEGO LIEBAN <sup>1</sup>

<https://orcid.org/0000-0002-0652-3860>

### RESUMO

*Neste artigo, são apresentados e discutidos exemplos de propostas que procuram privilegiar o aspecto interativo e criativo da matemática, seja com materiais físicos ou digitais. Através de abordagens que envolvem a Educação STEAM e a Cultura Maker, procura-se refletir sobre o papel docente e discente no processo de aprendizagem em espaços que não sejam restritos à sala de aula, com ênfase para a aprendizagem baseada em projetos. Em particular, é considerado o papel da formação tecnológica integrando o GeoGebra com tecnologias emergentes como impressão 3D e corte a laser, levando em conta a articulação com o conhecimento pedagógico e de conteúdo, à luz do modelo TPACK.*

**Palavras-chave:** Educação STEAM; Cultura Maker; GeoGebra; Modelo TPACK;

### ABSTRACT

*In this paper, examples of proposals that seek to favor the interactive and creative aspect of mathematics are presented and discussed, whether with physical or digital materials. Through approaches that involve STEAM Education and Maker Culture, we seek to reflect on the role of teachers and students in the learning process in spaces that are not restricted to the classroom, with an emphasis on project-based learning. In particular, the role of technological training is considered, integrating GeoGebra with emerging technologies such as 3D printing and laser cutting, taking into account the articulation with pedagogical and content knowledge, in the light of the TPACK model.*

**Keywords:** STEAM Education; Maker Culture; GeoGebra; TPACK framework.

---

<sup>1</sup> INSTITUTO FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - Campus Bento Gonçalves - [diego.lieban@bento.ifrs.edu.br](mailto:diego.lieban@bento.ifrs.edu.br)

## Introdução

Neste artigo, procuro reunir algumas práticas recentes que são resultados de trabalhos desenvolvidos ao longo dos últimos doze anos (pelo menos), em especial, como parte de estudos do doutorado, realizado junto à equipe desenvolvedores do *software* GeoGebra, em Linz, na Áustria. Embora várias das ações tivessem um viés acadêmico e com finalidade da pesquisa, minha intenção maior em conceber tais atividades sempre foi no sentido de apresentar a matemática em sua forma mais intrínseca, ou seja, menos dependente de fórmulas e com viés mais prático e aplicado, por vezes, até lúdico. Outra premissa importante, é o aspecto interativo e criativo das atividades, que oportuniza a quem age sobre os materiais, o papel de protagonista de seu próprio processo de aprendizagem. A quem exerce a função docente, neste viés, atribui-se o papel de guia, orientando ou mediando com questionamentos que promovam a reflexão e auxiliando nas necessidades demandadas. Muitas das propostas apresentadas aqui são endossadas pelas Metodologias Ativas tão em voga, como a Cultura Maker e Educação STEM<sup>2</sup> (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática), sobretudo no que diz respeito à aprendizagem baseada em projetos.

O público ao qual as atividades se destinam é bem amplo. Além de estudantes do último ano do Ensino Médio-Técnico e com formação de professores, com quem costumo atuar. Algumas das atividades aqui discutidas e apresentadas foram motivadas por interações com crianças em diferentes contextos. Ainda assim, as atividades promovidas entre discentes do Curso de Licenciatura em Matemática são, de maneira geral, pensadas para estudantes da Educação Básica em seus diferentes níveis. Aquelas que, eventualmente, se destinam ao Ensino Médio, podem naturalmente ser adaptadas para o Ensino Fundamental. Afinal, a seleção de materiais e o olhar pedagógico são ingredientes fundamentais da prática docentes em diferentes espaços de aprendizagem.

### 1. Uma breve ambientação teórica

A aprendizagem tem sido cada vez mais aceita como um processo construtivo no qual estudantes desenvolvem ativamente seus conhecimentos matemáticos experimentando, interpretando, visualizando, conjecturando, debatendo e provando (GRAVINA & SANTAROSA, 1998; JARVIS & NAESTED, 2012; WATSON, OHTANI, 2015). O construtivismo como uma teoria do desenvolvimento cognitivo apoia as abordagens de ensino e aprendizagem que incentivam estudantes a assumir

---

<sup>2</sup> Mais adiante, será discutida a transição do STEM para STEAM.

um papel ativo em sua aprendizagem e construir novos conhecimentos com base na compreensão prévia. Portanto, o construtivismo destaca a interação de pessoas e situações na aquisição e refinamento de habilidades e conhecimentos (COBB & BOWERS, 1999). Para explicar o processo evolutivo das estruturas cognitivas, Piaget destacou uma ordem predeterminada de estágios (PIAGET & INHELDER, 1969). Na construção dos primeiros esquemas lógico-matemáticos, as crianças contam com ações sensório-motoras sobre objetos físicos e por meio de exercícios de repetição espontânea chegam ao domínio e generalização da ação (pré-operacional). O segundo estágio é caracterizado pelo aparecimento de operações (ações no pensamento), mas nesta fase as crianças ainda dependem de objetos concretos para que as ações se tornem conceitos (operacionais concretos). E finalmente chegam ao estágio de operações sobre objetos abstratos, não mais dependendo de ações concretas ou objetos concretos, ou seja, é a constituição do pensamento puramente abstrato (operacional formal).

Para Bruner (1976), a tarefa de ensinar uma matéria para uma criança em qualquer idade é a de representar a estrutura dessa matéria em termos do modo da criança de ver as coisas. Em outras palavras, sob a perspectiva construtivista, o desenvolvimento cognitivo depende da exploração, intuição, senso comum, apreciação de regularidades, representação, abstração e generalização, e assim por diante. Novas pedagogias como aquelas que valorizam as habilidades humanas de investigar, criar, propor estratégias de resolução de problemas e fortalecer a colaboração e a interdisciplinaridade surgem como alternativas aos padrões educacionais regulares e promovem uma participação mais ativa de estudantes.

Ancorado nas ideias do construtivismo e do experimentalismo de Dewey (1978), que pressupõe a importância do erro no processo de aprendizagem, aparece o construcionismo proposto por Papert (RESNICK, 2020), que está no cerne da Cultura Maker (TEIXEIRA & CATAPAN, 2020) e da Educação STEM/STEAM (BACICH & HOLANDA, 2020; BENDER, 2020; CORTELAZZO et al., 2018). Particularmente no que diz respeito às tecnologias, Papert (1994) defendia seu uso para auxiliar estudantes a pensar sobre novos conceitos e ideias e como instrumentos para o desenvolvimento de novos projetos. Por outro lado, no que diz respeito à formação docente, Niess (2005) adverte para a importância de uma visão transformadora e homogênea dos conhecimentos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo, não considerando qualquer uma dessas dimensões subjacente às demais. Essa percepção significa que TPACK<sup>3</sup> é maior que a simples soma de suas partes. Alguém que queira ensinar geometria, álgebra ou combinatória e que tenha desenvolvido o TPACK não pensa, por exemplo, na discussão conceitual, seguida

---

<sup>3</sup> Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo TPACK (sigla em inglês para Technological Pedagogical Content Knowledge).

pela abordagem didática para, finalmente, explorar o recurso tecnológico. Ao contrário, planeja as três dimensões em consonância, construindo elos de conexão entre tecnologia, pedagogia e conteúdo. Não há necessariamente etapas pré-concebidas a serem seguidas e não há também ordem entre os três domínios do TPACK a ser tomada. É um movimento reflexivo de vai e vem que considera tudo interligado, através de diferentes níveis de desenvolvimento docente em relação às três dimensões, sobretudo à tecnologia (pré-reconhecimento, reconhecimento, aceitação, adaptação, exploração e evolução). Uma discussão mais aprofundada deste modelo, que evidencia a aproximação das dimensões de acordo com o desenvolvimento docente, conforme Figura 1, pode ser encontrada em Bueno et al. (2023).

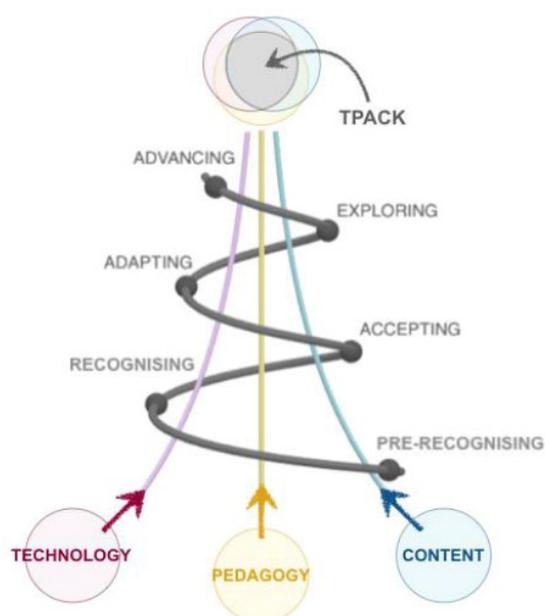


FIGURA 1: Versão TPACK revisitada, proposta por Bueno et al. (2023)

FONTE: <https://ajet.org.au/index.php/AJET/article/view/7970> ou <https://www.geogebra.org/m/renjycau> (para versão interativa). Acesso em: 08 ago. 2022.

Nas próximas seções, procuro destacar algumas dessas perspectivas de integração, em que identifico como oportunas para conexões físicas e digitais. Ainda, destaco a relevância de professores como facilitadores, seja para nutrir um ambiente adequado e frutífero com apoio e orientação, ou para extrair melhor o potencial de um recurso escolhido.

## 2. Modelagem geométrica em movimento com o GeoGebra: a transição do 2D para o 3D integrando recursos físicos e digitais

Neste primeiro grupo de trabalhos, procuro resgatar algumas das essências das ações desenvolvidas, tentando respeitar cronologicamente o momento em que elas sucederam ao longo do tempo. Algumas premissas fundamentais nestas atividades são: a transição do espaço bidimensional para o espaço tridimensional, o papel de estudantes (como agentes) frente às tarefas e o aspecto interativo das propostas, sejam com recursos físicos ou digitais. Naturalmente, essas duas últimas condições estão intrinsicamente conectadas, mas vale observar que a interatividade pode ser estabelecida no exercício da criação de modelos (como nos casos dos mecanismos em *Reconstruindo Da Vinci* ou das gangorras em *Modelagem Geométrica*), ou interagindo com materiais já desenvolvidos e disponibilizados (como exemplos compartilhados na seção *Problemas que Desafiam Nossa Intuição*).

A proposta *Reconstruindo Da Vinci* remete ao período em que ingressei no Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Campus Bento Gonçalves (IFRS-BG), em 2010, iniciando com uma ação que tivesse um aspecto interdisciplinar (com Física, Arte e História). Abaixo, alguns registros das produções realizadas. Como alternativa ao *QR code* (materiais em inglês), há uma versão em português no *link* que segue.



**FIGURA 2:** Mecanismos de Da Vinci, reproduzidos fisicamente e digitalmente no IFRS-BG  
**FONTE:** Adaptada de Lieban (2019). Versão em Português disponível em <https://www.geogebra.org/m/QyV5xaqm> Acesso em: 08 ago. 2022.

As turmas envolvidas nesta atividade, que se estendeu pelos cinco anos seguintes, sempre foram de terceiros anos do Ensino Médio-Técnico, as quais, à época, tinham a Geometria Espacial como parte de seu programa curricular na disciplina de Matemática. Observa-se que a evolução desta iniciativa acompanhou, de certa forma, o desenvolvimento do *software* GeoGebra, que teve uma versão 3D

disponibilizada de forma mais consolidada em 2015<sup>4</sup>. Antes disso, alguns modelos eram feitos no GeoGebra 2D, simulando uma representação tridimensional<sup>5</sup>. Outra alternativa, utilizada por um grupo de alunos, foi modelar o “martelo de carne” no *software* SketchUp. Em todos os casos, no entanto, os grupos de estudantes deviam apresentar o correspondente físico do modelo criado digitalmente e algumas relações matemáticas eram mais bem esclarecidas ora através do modelo físico, ora através do modelo digital, como são apontadas em estudos correlatos (LIEBAN, 2012; LIEBAN, 2019).

Em 2015, insistindo com a intenção de integrar os recursos digitais aos físicos, reuni três *Problemas que desafiam nossa intuição*<sup>6</sup> para discutir questões de matemática que não são tão usuais na escola básica, como Ponto Fixo, Seção Transversal de um Cilindro e Geometria Esférica. Todos eles buscavam ser apresentados de forma que despertasse a curiosidade de quem acompanhasse as propostas – com alguma pergunta intrigante – e discutiam em que aspecto o modelo digital com o GeoGebra poderia complementar a interpretação do problema com o recurso físico. O primeiro deles, o problema *Saboreando palmitos*<sup>7</sup> (LIEBAN, 2013) propõe uma questão de investigação sobre a forma da superfície lateral de um cilindro cortado por um plano não paralelo a sua base. Com resultado surpreendente, o contraste entre recursos físicos e digitais foi destacado a partir de experimentações com público do Ensino Fundamental II à Formação de Professores. Particularmente, a maneira mais intuitiva, pelo público juvenil, de encarar e resolver o problema revelou a importância do papel interativo com os recursos, antes de uma abordagem mais formal.

---

<sup>4</sup> Já existiam ensaios anteriores (2012, ou mesmo antes) de algumas funcionalidades e os *applets* mais antigos que encontrei disponíveis em versão 3D entre os materiais públicos da plataforma datam de 2013, sendo os objetos, aparentemente, definidos algebricamente e não por seus comandos iconográficos.

<sup>5</sup> Vide <https://www.geogebra.org/m/chV6DJ6p>, de Sérgio Dantas que ilustra como o processo era feito quando ainda não havia o recurso 3D, propriamente, no GeoGebra.

<sup>6</sup> <https://www.geogebra.org/m/EAvAxAyV>

<sup>7</sup> <https://www.geogebra.org/m/EAvAxAyV#chapter/50289>



FIGURA 3: Problemas que desafiam nossa intuição, apresentados em 2015.

FONTE: Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/EAvAxAyV>  
 Acesso em: 08 ago. 2022.

O problema *Procurando um ponto no mapa*<sup>8</sup>, da maneira como foi apresentado para estudantes da Escola Básica, estendia uma abordagem inicialmente feita com papel e alfinetes para repetições sucessivas e iterativas do processo, através de uma representação digital com o GeoGebra. A sequência de iterações, nesse caso, ajudava significativamente a revelar a solução do problema (do Ponto Fixo). A ideia de recursão apresentada neste *applet* está diretamente conectada com outras ideias importantes da matemática, como a que foi apresentada pelo sempre incentivador e divulgador de inspirações para a comunidade usuária do GeoGebra, Prof. Humberto Bortolossi, no *applet* Efeito Droste (BORTOLOSSI, 2019). Outras entre tantas ideias já compartilhadas por Bortolossi<sup>9</sup> são justamente alguns dos arquivos precursores do GeoGebra 3D<sup>10</sup> e que estão relacionados com o último problema desta série, *Encurtando rotas*<sup>11</sup>, que procura esclarecer o caminho mais curto entre duas cidades no globo terrestre (considerando-o por uma aproximação esférica). Neste caso, compara-se a solução real com uma interpretação equivocada sugerida pela representação planificada do globo. Nos três exemplos citados, os recursos físicos utilizados ficavam, de certo modo, desfavorecidos para interpretações mais ricas do problema. Ao mesmo tempo, sua manipulação permitia uma compreensão inicial mais acessível das questões de discussão levantadas e motivavam para a problematização e abordagem com o recurso digital. Estes problemas foram

<sup>8</sup> <https://www.geogebra.org/m/EAvAxAyV#chapter/50291>

<sup>9</sup> <https://www.geogebra.org/u/hjbortol>

<sup>10</sup> <https://www.geogebra.org/material/show/id/hey8vpcp> e <https://www.geogebra.org/m/hUb7KZxj>

<sup>11</sup> <https://www.geogebra.org/m/EAvAxAyV#material/KWN8Ee9u>

apresentados, em 2015, no “GeoGebra Global Gathering<sup>12</sup>”, que teve participações importantes de outros membros ativos da comunidade internacional do GeoGebra. Na sessão de apresentação estavam Anthony OR<sup>13</sup> e Chris Cambré<sup>14</sup> que, posteriormente, aprimoraram<sup>15</sup> ainda mais as ideias compartilhadas, a partir da evolução dos recursos 3D e da contribuição fundamental de outros membros, como Rafael Losada<sup>16</sup>, que incrementou fantasticamente a representação do globo.

Neste percurso, vale destacar o aspecto colaborativo no desenvolvimento e compartilhamento de materiais na plataforma GeoGebra, uma vez que hoje, um material bem mais elaborado e completo<sup>17</sup>, traduzido pela professora Carmen Mathias<sup>18</sup>, sobre projeções cartográficas, pode ser explorado para fins de uma proposta interdisciplinar de geografia e matemática, como recomenda a Base Nacional Comum Curricular (BNCC-EF09GE15).

Finalizando esta seção, apresento brevemente o trabalho que desenvolvi com estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRS-BG, já como parte dos estudos de doutorado (iniciado em 2016). Inspirado nas vivências anteriores e sustentado pelos avanços do recurso de representação 3D e pelas reflexões sobre o caráter pedagógico que novos recursos possibilitavam, propus que um grupo de 19 participantes construísse gangorras físicas e desenvolvesse seu modelo correspondente digital (com possibilidades de movimento) como ato contínuo. A intenção era poder discutir, de maneira mais prática e aplicada, questões pertinentes da Geometria Espacial na formação de professores, com o uso de tecnologia. Esta motivação se deu especialmente pela dificuldade habitual que observei em experiências anteriores, mais especificamente na geometria posicional axiomática. Neste estudo, observou-se o valor do uso da simulação física no apoio ao grupo de participantes para que melhor compreendessem e descrevessem a ação das articulações. Assim, foi possível (re)interpretar melhor alguns comportamentos matemáticos muitas vezes ocultos durante a interação com algumas ferramentas do GeoGebra. Uma descrição mais detalhada do estudo, bem como seu viés teórico e metodológico pode ser encontrada em Lieban (2019) e os modelos desenvolvidos estão representados na Figura 4.

---

<sup>12</sup> <https://www.geogebra.org/m/DgPocAYy-material/XmA18a6f>

<sup>13</sup> <https://www.geogebra.org/u/orchiming>

<sup>14</sup> <https://www.geogebra.org/u/ccambre>

<sup>15</sup> <https://www.geogebra.org/m/cKuUYD7g>, <https://www.geogebra.org/m/wpptu5qp>,

<https://www.geogebra.org/m/asz8bv9a>

<sup>16</sup> <https://www.geogebra.org/u/rafael>

<sup>17</sup> <https://www.geogebra.org/m/btfr5zww>

<sup>18</sup> <https://www.geogebra.org/u/carmenmathias>



FIGURA 1. Gangorras desenvolvidas nos modelos físico e digital

FONTE: Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/Tng4JXDk>. Acesso em: 08 ago. 2022.

### 3. Matemática lúdica: materiais desenvolvidos com GeoGebra para espaços “(re)criativos” de ensino e aprendizagem

Um entendimento tácito entre formadores e educadores é que o ensino e a aprendizagem de matemática (e, naturalmente, de outras áreas) não se dá, e nem se deve dar, apenas no âmbito escolar. Das práticas domésticas à vivência em espaços alternativos como praças, museus, brinquedotecas, salões de festas, entre outros, muitas são as oportunidades de que crianças, adolescentes ou até mesmo adultos possam interagir com materiais ou atividades que promovam habilidades tão importantes para uma aproximação e identificação com a Matemática e que, muitas vezes, ficam subjacentes aos protocolos conteudistas curriculares. Algumas dessas habilidades podem ser, por exemplo, o desenvolvimento geométrico-espacial, o sentido combinatório, o reconhecimento de padrões, o princípio de ordem, ou a capacidade de estimar. Uma atividade bastante natural de pensar neste sentido é o uso de jogos (quebra-cabeças, desafios-lógicos, brinquedos, brincadeiras, entre outros) que possam despertar para este fim. Isso fica evidenciado na medida em que observamos que espaços como museus e feiras de ciências têm se valido cada vez mais de experiências interativas, físicas ou digitais, como estratégia de divulgação científica e de sensibilização para cativar participantes em geral e incentivar a exercerem seu pensamento crítico frente às atividades propostas. Percebendo este movimento em visitas a diferentes espaços, em 2017, procurei organizar no GeoGebra uma coletânea de materiais que pudesse ser útil tanto para interagir como

para inspirar novas ideias. O resultado desta coletânea (*livro*, segundo a plataforma GeoGebra) que, eventualmente, é ainda atualizada, pode ser conferido na Figura 5.



**FIGURA 5:** Jogos, Quebra-cabeças e desafios lógicos com GeoGebra

**FONTE:** Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/material/show/id/SBkdsTK6> Acesso em: 08 ago. 2022.

A motivação para organização deste *livro* e de tomada desta direção de proposta se deu pela constatação de que um material em formato de quebra-cabeça, publicado em 2016, teve expressivo número de acessos no ano seguinte<sup>19</sup>.

Nesta coleção há também registros de produções realizadas por estudantes da Educação Básica como parte das atividades desenvolvidas ao longo do estudo de doutorado. Uma particularidade, ainda, sobre o resultado observado a partir da publicação deste material é que, além dos vários acessos, tem um alto índice de materiais derivados<sup>20</sup>. Isto reflete, mais uma vez, a prática colaborativa e reforça a possibilidade de que todos os materiais disponibilizados possam ser compartilhados e adaptados (para fins não comerciais), em termos da licença *Creative Commons*.

Muitas das produções desenvolvidas ou filtradas para a coletânea já referida acabaram conduzindo para outros formatos de atividades, que permitiram conexões estreitas com museus, feiras de divulgação científica e programas nacionais de

<sup>19</sup> <https://www.geogebra.org/m/xpRFvBAQ-material/wVHUUjhh> contava com mais de 20.000 acessos em agosto de 2017 (atualmente, conta com mais de 50.000).

<sup>20</sup> Na plataforma é possível acompanhar alguns dados relevantes na opção Detalhes.

formação e incentivo à matemática. Um exemplo bastante concreto é o Quebra-Cabeça de Matemática<sup>21</sup> da OBMEP, que reúne um vasto acervo de desafios matemáticos digitais ilustrados e interativos para alunos do 4º ao 6º ano do Ensino Fundamental, favorecendo seu aproveitamento em sala de aula ou em outros espaços educativos. Outros materiais, inclusive em suas versões físicas, foram organizados e apresentados no MOMATH<sup>22</sup>, que também inspirou para a criação de novos materiais, como é o caso do Truchet, ilustrado a seguir.



**FIGURA 6:** Algumas ideias desenvolvidas para o GeoGebra day at MOMATH e para OBMEP  
**FONTE:** Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/qd6htsx4>  
 Acesso em: 08 ago. 2022.

A menção ao “(re)criativos”, termo utilizado no título da seção, procura enfatizar a importância combinada dos espaços (recreativos) com os processos metodológicos (criativos) em qualquer ambiente de aprendizagem. Mais uma vez, ressalta-se que o papel docente é fundamental para a melhor condução das atividades, desde a etapa de sensibilização até as discussões que podem ser promovidas com elas. Assim, há um trabalho bastante extenso para a procura e seleção de materiais e propostas (curadoria) ou mesmo para suas adaptações, que eventualmente podem ser necessárias. Acredito que pode ser uma boa alternativa, sempre que possível, incentivar o protagonismo discente através de tarefas de construção.

<sup>21</sup> <https://www.geogebra.org/u/quebracabecas>

<sup>22</sup> <https://momath.org/>

Um último exemplo nesta direção é de uma coletânea de materiais desenvolvidos à luz da experiência com as gangorras e com os "Mecanismos de Da Vinci", mas agora possibilitando a modelagem geométrica de articulações diversas. Os protótipos identificados na Figura 7 foram modelados fisicamente com um material de manipulação bastante amigável por seus conectores flexíveis e seus "canudinhos" de tamanhos diversos (4Dframe). Do ponto de vista da representação digital, é uma atividade que pode contribuir no desenvolvimento da espacialidade, particularmente nas relações que dizem respeito à geometria espacial posicional, assunto muitas vezes ainda preterido nas escolas.



FIGURA 7: Modelagem com materiais alternativos.

FONTE: Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/xCxJUyyx>  
Acesso em: 08 ago. 2022.

Assim como as propostas das gangorras e dos mecanismos de Da Vinci, nesta atividade podem ser trabalhadas as relações de retas e planos no espaço (com ou sem movimentos articulados) para representar estruturas tridimensionais. A diferença em relação às anteriores, neste caso, é que os elementos de representação ficam essencialmente reduzidos a segmentos de retas no espaço, o que simplifica significativamente o caráter da modelagem e faz com que possa ser uma tarefa mais introdutória comparada às outras duas.

## 4. GeoGebra e Impressão 3D: ampliando as possibilidades de desenvolvimento de materiais didáticos na perspectiva STEM

As atividades apresentadas anteriormente, combinando recursos físicos e digitais de diferentes naturezas, acabaram convergindo com a rápida evolução que as impressões em 3D vinham apresentando. Acompanhando alguns movimentos iniciais de introdução desta tecnologia no cenário escolar e acadêmico, o momento parecia oportuno para implementar o recurso de impressão 3D diretamente do GeoGebra. Do ponto de vista de formação e assumindo a familiaridade de boa parte de professores e estudantes com a ferramenta, era mais natural ter um comando adicional de impressão do que apresentar um novo *software* de modelagem 3D. Naturalmente que as condições do GeoGebra são diferentes de programas CAD (*Computer Aided Design*, ou “projeto e desenho assistidos por computador”), geralmente mais recomendados para o propósito de modelagem e prototipagem de projetos. No entanto, me fascinava a ideia de poder aproveitar um repositório tão vasto já existente para fins educacionais e, eventualmente, tornar estes materiais físicos. Assim, a interação dinâmica do recurso digital combinada com a exploração tátil de um material ampliaria a possibilidade de seu uso pedagógico e tornaria o mesmo mais inclusivo. Após várias testagens e algumas rodadas de discussões com os desenvolvedores, em agosto de 2018, surge então a primeira versão do recurso, que veio acompanhada de um *book* com tutoriais e exemplos ilustrativos.



FIGURA 8: Primeiros passos com impressão 3D no GeoGebra

FONTE: Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/pkfzccjw>  
Acesso em: 08 ago. 2022.

Uma vez introduzido o recurso na plataforma, passei a organizar oficinas e minicursos entre professores, futuros professores e estudantes para avaliar em que sentido os materiais impressos em 3D poderiam contribuir para os contextos escolares e acadêmicos. Em paralelo, tratava de navegar pelo vasto repositório de materiais já existentes para buscar ideias e alternativas que pudessem ser atrativas e com potencial pedagógico. Algumas dessas ideias remetiam justamente às atividades lúdicas já propostas anteriormente. O que foi observado durante este período é como a matemática, neste contexto, aparece muito mais como meio e bem menos como atividade fim. Além dos conceitos esperados de geometria métrica e posicional, são também inerentes a essa prática as noções de porcentagem, simetrias e mesmo relações algébricas, se passarmos a avaliar os parâmetros de impressão como tempo, densidade, velocidade, comprimento ou custo do filamento utilizado, por exemplo. Por vezes, considerando o processo de impressão por camadas, pode até ser oportuno para discutir noções de cálculo diferencial e integral com suas ideias de infinitésimos. Parte deste material está organizado na coletânea mostrada na Figura 9.



**FIGURA 9:** Ideias para impressão 3D no GeoGebra, em diferentes contextos da matemática  
**FONTE:** Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/vsrpgzek>  
 Acesso em: 08 ago. 2022.

Continuando na conexão física e digital e motivado pela possibilidade de que as pessoas criassem seus próprios protótipos para impressão, identifiquei que este seria um gatilho para a proposição de uma atividade que fosse tanto criativa quanto matemática. Mais objetivamente, a ideia era exercitar as diferentes estratégias para

dividir um cubo em “partes iguais” (volume e área de superfície), procurando explorar os benefícios complementares dos recursos físico e digital. A partir daí, fui colecionando soluções encontradas na plataforma GeoGebra ou em outras fontes e aquelas obtidas através de oficinas que oferecia a professores ou estudantes.



**FIGURA 10:** Dividindo cubos em partes iguais

**FONTE:** Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/dbhtyw8g>  
Acesso em: 08 ago. 2022.

Para esta abordagem, pode ser providencial apresentar ao público um leque de soluções iniciais que sirva de inspiração para que adaptem e criem as suas próprias soluções. Explorando recursos físicos e digitais combinados nesta tarefa, pretende-se aprimorar o pensamento pautado em estratégias de simetria (STENDER e KAISER, 2017; STEWART, 2012) e recursão, bem como melhorar os argumentos matemáticos através da análise das possíveis soluções. Seções transversais e recursos de opacidade, por exemplo, no modelo digital, podem ser úteis para os usuários identificarem melhor as partes internas e, portanto, melhorarem seus entendimentos e argumentos espaciais. Um pouco mais sobre estas possibilidades e para melhor visualizar alguns exemplos físicos, uma opção de vídeo é “GeoGebra e Impressão 3D – a matemática como exercício criativo”<sup>23</sup>, em que apresento boa parte deste material no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), promovido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA.

Por fim, é importante enfatizar que essa conexão entre físico e digital por meio da impressão 3D e da Geometria Dinâmica não deve se restringir ao campo da

<sup>23</sup> <https://youtu.be/f3CF9dqfQaQ>

matemática. É fundamental que se pense em uma perspectiva integrada de ensino e a prática STEM favorece esse viés. Na Figura 10, apresento algumas alternativas discutidas com um grupo de professores de diferentes áreas do conhecimento, integrando o aspecto interativo digital de algum material, seu correspondente impresso e as possibilidades de integração no ensino, especialmente de ciências (física, química e biologia).



FIGURA 11: Atividade pensada para (e com) professores de ciências

FONTE: Adaptada de Lieban (2019). Disponível em <https://www.geogebra.org/m/fncnngep>  
Acesso em: 08 ago. 2022.

## 5. Produções recentes com tecnologias emergentes

Seguindo na perspectiva físico-digital e considerando ainda tecnologias emergentes combinadas às proposições de reforma curricular em constante e controversas discussões, desde 2021, no IFRS-BG, tenho procurado promover, entre estudantes do Ensino Médio-Técnico e futuros professores, ações que façam uso da cortadora a laser (além da impressão 3D) como ações combinadas de dois projetos institucionais: *Desenvolvimento de materiais pedagógicos – físicos e digitais – para Educação STEM* e *PIPA IFmakeRS*. A ideia é apresentar a matemática e a tecnologia como meios para conectar com outras áreas do conhecimento. Além disso, há uma lógica de que os materiais possam servir para outros níveis de ensino. Assim, muitos deles têm conotações de jogos ou quebra-cabeças. Por outro lado, espera-se que o benefício do aprendizado não esteja apenas no ato de jogar, mas essencialmente no de produzir o material (NUSSBAUM, 2013). Além disso, com esta ação procuro

oportunizar ainda mais o exercício da criatividade, colaboração, comunicação e pensamento crítico (4C's), consideradas competências fundamentais para a educação do século XXI (HARARI, 2018). Boa parte deste material pode ser encontrado em um *book* do GeoGebra<sup>24</sup> vinculado aos projetos citados. Procuo explicar brevemente alguma das ações através dos conjuntos de figuras seguintes.

Em 2021, como parte do conteúdo de Geometria Analítica, foi aplicada, com as turmas de 3º anos do Ensino Médio, uma atividade em que o objetivo é reproduzir um desenho com regiões delimitadas por arcos de circunferências e segmentos de retas. Como opção, é possível cortar ou gravar as construções com a cortadora a *laser* e transformar, assim, as produções em quebra-cabeças. A atividade foi aprimorada e reaplicada em 2022 e ainda deve ser melhor avaliada para fins de investigação no âmbito da Educação Matemática.



**FIGURA 12:** Arte com inequações, produções de estudantes de 3º ano do Ensino Médio  
**FONTE:** Disponível em <https://www.geogebra.org/m/tb67kepy> Acesso em: 08 ago. 2022.

Desde 2020, diferentes materiais pedagógicos têm sido criados como parte dos projetos institucionais já citados. Muitos deles na forma de jogos e, nesta perspectiva, há uma preferência por aqueles que possuem certo apelo à análise combinatória, já que é um conteúdo também trabalhado no 3º ano. Abaixo, os modelos dos jogos OTRIO, RUBIK'S RACE e QUARTO. O segundo, é um jogo híbrido, com um sorteador desenvolvido no GeoGebra e acessível por um *QR code*.



**FIGURA 13:** Desenvolvimento de jogos com apelo à combinatória  
**FONTE:** Disponível em <https://www.geogebra.org/m/xmgsf54t> Acesso em: 08 ago. 2022.

<sup>24</sup> Disponível em <https://www.geogebra.org/m/xmgsf54t>. Acesso em: 08 ago. 2022.

Uma atividade que envolveu três turmas de terceiros anos no primeiro semestre do ano de 2022 foi a adaptação do jogo SET, para que pudessem melhor desenvolver, no processo de concepção do jogo, estratégias de contagem, além da criatividade. Com o jogo, diferentes questões de probabilidade foram exploradas e discutidas em aula. A iniciativa visava ainda que a proposta tivesse um desdobramento social, de forma que estudantes apresentassem (e jogassem) seus jogos para crianças de escolas da região, criando possibilidades para eles aprenderem quando estão ensinando. Uma discussão mais detalhada desta atividade e sobre possibilidades de conexão com o GeoGebra pode ser encontrada em Lieban et al. (2022) ou acompanhada através do vídeo “Pintando o SET – uma bagunça boa entre Matemática e Cultura Maker”<sup>25</sup>.



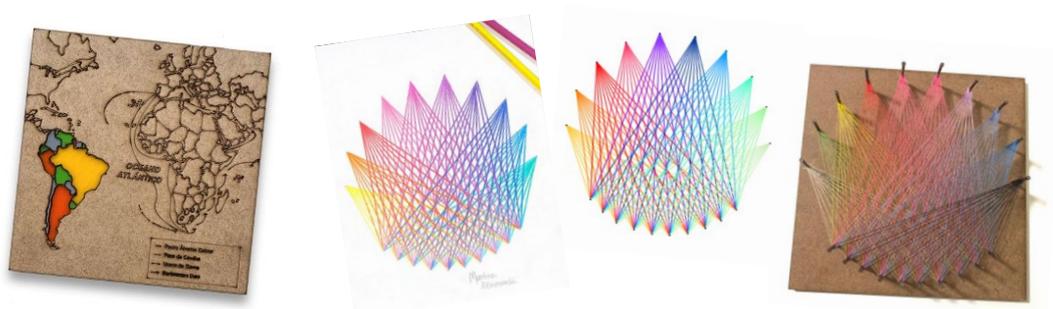
**FIGURA 14:** Jogo SET, adaptado por diferentes grupos de estudantes  
**FONTE:** Fotos do autor

Convém destacar as diferentes possibilidades de materiais utilizados para desenvolver os materiais criados com a máquina de corte a laser: MDF, acrílico, papel cartonado, EVA e até papelão, que são materiais relativamente acessíveis.

Estas atividades, assim como as próximas apresentadas, reforçam uma tendência de incorporar cada vez mais a componente das artes à Educação STEM, já tratada como STEAM, em muitos casos. Além do aspecto criativo, a articulação das artes com as demais dimensões contribui para o desenvolvimento da comunicação ou expressão, do pensamento crítico e da sensibilidade para diferentes questões presentes nas relações humanas. O olhar pelas lentes das artes não apenas amplia as capacidades reflexivas e perceptivas, como também alimenta a racionalidade, a afetividade e a emoção (CALIL e PUGLIESE, 2019), ingredientes fundamentais para o desenvolvimento das *inteligências intrapessoal e interpessoal* (GARDNER e CHEN, 2009).

<sup>25</sup> [https://www.youtube.com/live/xS3Tnjb\\_sal?feature=share](https://www.youtube.com/live/xS3Tnjb_sal?feature=share) Acesso em: 08 ago. 2022.

Os próximos dois e últimos trabalhos ilustrados servem para reiterar a possibilidade de apresentar a matemática de forma integrada em propostas interdisciplinares. O primeiro é resultado de uma atividade promovida pela professora de história do campus, que solicitou que estudantes se valessem do espaço *maker* da instituição para providenciarem mapas de diferentes contextos históricos, gravados ou cortados na cortadora a *laser*. Acompanhando a atividade e auxiliando quando possível, sugeri uma versão com peças destacáveis e coloridas para já introduzir a discussão do Teorema das 4 cores.



**FIGURA 15:** Projetos Interdisciplinares com GeoGebra

**FONTE:** Disponível em <https://www.geogebra.org/m/xmgsf54t#chapter/675519> Acesso em: 08 ago. 2022.

O outro trabalho traz um exemplar de uma ação desenvolvida com professores em formação e trata-se de uma técnica conhecida como *String Art*. Nas imagens apresentadas é possível acompanhar um dos trabalhos em seus três níveis de execução: com lápis de cor, no GeoGebra e, finalmente, com linhas coloridas e pregos (as marcações para os pregos foram gravadas no MDF, aproveitando o arquivo digital do GeoGebra). Para esta atividade, além de trabalharmos os conceitos de geometria, o objetivo era discutir possibilidades de promover o Pensamento Computacional<sup>26</sup> entre estudantes, na medida em que ideias de sequência e recursão eram amplamente utilizadas em processos repetitivos através das sintaxes do programa.

## 6. Considerações finais

O uso combinado de recursos físicos e digitais foi implementado nas abordagens apresentadas como uma possibilidade de promover o raciocínio espacial e soluções criativas para representações de modelos em 2D e 3D. Por meio de atividades de modelagem geométrica – em sua maioria desencadeadas por tarefas abertas – identificamos oportunidades para explorar conceitos matemáticos em diferentes níveis educacionais e promovidas por ambientes colaborativos. Com base

<sup>26</sup> Tópico que, apesar da ampla discussão atual, ainda carece de mais espaço na Educação Básica além das práticas em matemática.

em tarefas de simulação de mecanismos ou no desenho de quebra-cabeças e jogos, estudantes, professores em formação ou já em atividade foram engajados com desafios matemáticos impulsionados pelas suas próprias estratégias de modelagem. Trabalhando em seus projetos pessoais e definidos pelas tarefas abertas, os participantes tendiam a se envolver em discussões com outras pessoas e a considerar soluções alternativas para alcançar a representação de suas ideias. A flexibilidade de participantes para criar ou alcançar suas ideias originais muitas vezes parecia, por um lado, seguir a familiaridade que tinham (ou não) com conteúdos específicos. Por outro lado, trabalhar de forma colaborativa e discutir ideias ajudou os participantes a aumentar sua confiança para ajustar suas representações, seja explorando outros recursos do *software* ou aplicando alguns conceitos a diferentes contextos à medida que aprendiam. Essa relação contínua e dual entre criatividade e confiança em procedimentos matemáticos parece ser bastante favorecida pelos trabalhos com projetos.

A variedade de representação para o ensino de matemática tem sido frequentemente defendida como estratégia pedagógica em sala de aula (CHAN, LEUNG & YUEN ONG, 2017). Enquanto a Geometria Dinâmica nos fornece uma diversidade de amostras com um simples movimento de arrastar, a impressão 3D e os materiais cortados a *laser* nos oferecem um tratamento alternativo a partir da interação tátil diretamente com o objeto. Diferentes habilidades são aprimoradas ao explorar recursos físicos e digitais. Por um lado, a manipulação com recursos físicos promove o desenvolvimento do raciocínio espacial, uma vez que as restrições físicas e a liberdade de movimentos são favorecidas por esse tipo de manipulação. Por outro lado, desenvolver digitalmente os modelos correspondentes ou apenas interagir com eles exibe algumas transformações e relações matemáticas por trás dessas construções que reiteram propriedades geométricas (ou mesmo, algébricas). A vantagem de integrar a geometria dinâmica nesta abordagem deve-se ao seu apelo educativo e à possibilidade de combinar diferentes funcionalidades para oportunidades de ensino e aprendizagem.

## Referências

BACICH, L.; HOLANDA, L. *STEAM em sala de aula a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na educação básica*. Porto Alegre: Penso, 2020.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em Projetos - Educação Diferenciada para o Século XXI*. Porto Alegre: Penso, 2020.

BORTOLOSSI, H. J. *Efeito Droste*. Materiais GeoGebra, 2019. Disponível em <https://www.geogebra.org/material/show/id/sjrqcgx9>. Acesso em: 04.09.2022

- BRUNER, J. *The Process of Education*. Harvard University Press, 1976.
- BUENO, R. W. S. ; NIESS, M. L.; ENGIN, R. A.; BALLEJO, C. C.; LIEBAN, D. *Technological Pedagogical Content Knowledge: exploring new perspectives*. Australasian Journal of Educational Technology – AJET, 2023.
- CALIL, B. M.; PUGLIESE, G. *STEM ou STEAM : Para que serve o ensino de Arte ?*, Em Porvir – Inovações em Educação, 2019. Disponível em <https://porvir.org/stem-ou-steam-para-que-serve-o-ensino-de-arte/>  
Acesso em: 23.03.2023
- CHAN, Y.-C. ; LEUNG, A. ; YUEN ONG, D.M. *Feedback and Discrepancies of a Physical Toolkit and a Digital Toolkit: Opportunities and Pitfalls for Mediating the Concept of Rotational Symmetry*. Mathematics Education Tasks, Mathematics Education in the Digital Era 8, 2017.
- COBB, P. ; BOWERS, J. *Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice*. Educational Researcher, 28(2), 4–15, 1999.
- CORTELAZZO, A. L.; FIALA, A. S; PIVA Jr, D.; PANISSON, L.; RODRIGUES, M. R. J. B. *Metodologias Ativas e Personalizadas de Aprendizagem*. Rio de Janeiro: Alta Books, 2018.
- DEWEY, J. *Vida e Educação*. 10 ed. São Paulo: Melhoramentos, 1978.
- GARDNER, Howard; CHEN, Jie-Qi; MORAN, Seana. **Inteligências múltiplas**. Penso Editora, 2009
- GRAVINA, M. A. ; SANTAROSA, L. M. *A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados*. Presented at the IV Congresso Ibero-americano de Informática na Educação. Brasília, Brazil, 1998.
- HARARI, Y. N. *21 lições para o século 21*. Companhia das Letras, 2018
- JARVIS, D.; NAESTED, I. *Exploring the Math and Art Connection: Teaching and Learning Between the Lines*. Calgary: Brush Education. 2012.
- LIEBAN, D. *Reconstruindo Da Vinci: uma proposta de modelagem geométrica com o uso do software GeoGebra*. 3º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012. Disponível em <https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/516/submission/director/516.pdf>  
Acesso em: 26.08.2022
- LIEBAN, D. *Um Olhar Matemático sobre Palmitos Cortados*. Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2013. Disponível em

[https://www.researchgate.net/publication/317388355\\_Um\\_Olhar\\_Matematico\\_Sobre\\_Palmitos\\_Cortados](https://www.researchgate.net/publication/317388355_Um_Olhar_Matematico_Sobre_Palmitos_Cortados). Acesso em: 26.08.2022

LIEBAN, D. *Exploring opportunities for connecting physical and digital resources for mathematics teaching and learning*. Tese de Doutorado em STEM Education. Linz: Johannes Kepler Universität (JKU), 2019. Disponível em <https://epub.jku.at/obvulihs/content/titleinfo/4555198> Acesso em: 26.08.2022

LIEBAN, D.; MARTINS, E.; BUENO, R.; POMPERMAYER, E. *Combinatória com o jogo SET e o GeoGebra: explorações com recursos físicos e digitais*. Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18(65), 2022. Disponível em <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1080>. Acesso em 24.02.2023

NISS, M. L. *Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge*. Teaching and Teacher Education, 21, 509–523. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.03.006>, 2005.

NUSSBAUM, B. *Creative Intelligence: Harnessing the Power to Create, Connect, and Inspire*. Harper Collins Publishers, 2013.

PAPERT, S. *A Máquina das Crianças: repensando a escola na era da informática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PIAGET, J. ; INHELDER, B. *The psychology of the child*. New York: Basic Books, 1969.

RESNICK, M. *Jardim da Infância para Vida Toda : Por uma Aprendizagem Criativa, Mão na Massa e Relevante para Todos*. Porto Alegre : Penso, 2020.

STENDER, P. ; KAISER, G. *The Use of Heuristic Strategies in Modelling Activities*. In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.) (2017). Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10, February 1 – 5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

STEWART, I. *Uma história da Simetria na Matemática*. Zahar, 2012.

TEIXEIRA, C. S. & CATAPAN, A. H. *Via Revista –Movimento Maker*. UFSC, 2020. Disponível em [https://via.ufsc.br/wp-content/uploads/2020/03/revista\\_VIA-8\\_edicao.pdf](https://via.ufsc.br/wp-content/uploads/2020/03/revista_VIA-8_edicao.pdf) Acesso em: 26.03.2023

WATSON, A., OHTANI, M. (Eds.). *Task design in mathematics education: an ICMI study 22*. Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer, 2015.