



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p005-026>

Uso de GeoGebra para facilitar la comprensión de las definiciones de amplitud, período y diagrama de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno

Use of GeoGebra to facilitate the understanding of the definitions of amplitude, period and phase diagram of the graphs of the trigonometric functions' sine and cosine

ARMANDO JOSÉ GARCÍA-ORTIZ ¹
<https://orcid.org/0000-0003-2505-3961>

RAINIER VICENTE SÁNCHEZ CAMACHO ²
<https://orcid.org/0000-0002-6739-5102>

MIGUEL ISRAEL BENNASAR-GARCIA ³
<https://orcid.org/0000-0002-3856-0279>

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo mejorar la comprensión de las definiciones de amplitud, período y diagrama de fase de las funciones trigonométricas seno y coseno, utilizando el software GeoGebra. La Metodológica se llevó a cabo con un enfoque cuali-cuantitativo, en el que se utilizaron un par de encuestas a los estudiantes del curso: a) la primera (Pre-test), que se aplicó al terminar la clase donde se estudiaron las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las gráficas de las funciones seno y coseno, aplicando un sistema geométrico estático (SGE) b) la segunda (Post-test) que fue llenada por los estudiantes, una vez que realizaron unas actividades que involucraban los conceptos anteriormente señalados, pero con la ayuda del software GeoGebra, el cual es un representante de un sistema geométrico dinámico (SGD). Se logró incentivar a los estudiantes a que usen GeoGebra en su futura práctica docente, esto último, está muy bien sustentado en la respuesta positiva que expresaron todos los estudiantes en una pregunta del Post-test.

Palavras-chave: GeoGebra; seno; coseno.

ABSTRACT

The objective of this work is to improve the compression of the definitions of amplitude, period and phase diagram of the trigonometric sine and cosine functions, using the GeoGebra software. The Methodology was carried out with a qualitative-quantitative approach, in which a couple of surveys were used for the students of the course: a) the first (Pre-test), which was applied at the end of the class where the definitions were studied of amplitude, period and phase shift of

¹ Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, República Dominicana – argarcia1969x@gmail.com

² Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, República Dominicana – rainiersan76@gmail.com

³ Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, República Dominicana – miguel.bennasar7884@gmail.com

the graphs of the sine and cosine functions, applying a static geometric system (SGE) b) the second (Post-test) that was filled out by the students, once they carried out some activities that involved the previously mentioned concepts, but with the help of the GeoGebra software, which is a representative of a dynamic geometric system (DGS). It was possible to encourage students to use GeoGebra in their future teaching practice, the latter is very well supported in the positive response that all students expressed in a Post-test question.

Keywords: *GeoGebra; sine; cosine*

Introducción

La trigonometría es una rama fundamental de las matemáticas que se centra en el estudio de las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos, así como en las funciones trigonométricas que derivan de estas relaciones. Se aplica ampliamente en diversos campos como la física, la ingeniería, la navegación, la arquitectura, la astronomía, la acústica y muchas otras disciplinas científicas y técnicas. Además de su utilidad práctica, la trigonometría también tiene una importancia teórica significativa, ya que proporciona fundamentos matemáticos sólidos para comprender patrones y regularidades en fenómenos periódicos y cíclicos, así como para resolver una amplia gama de problemas geométricos y analíticos. Al respecto Alexis (2016), señala:

La trigonometría es una rama de la matemática al igual que la geometría, el álgebra y otras que contribuyen al logro del objetivo citado. Su amplio campo tiene aplicación para resolver problemas reales del mundo como en la navegación, las construcciones, la física, la astronomía, la náutica, la aviación, las telecomunicaciones y mediciones en general (p.37).

Por ende, es fundamental que los futuros docentes de matemáticas adquieran una comprensión sólida de la trigonometría, dado que sus estudiantes podrían incluir ingenieros, físicos, astrónomos y profesionales de otros campos. Estos estudiantes dependerán en algún momento de su carrera de una comprensión profunda y precisa de estas definiciones matemáticas.

La trigonometría como rama de la matemática no está exenta de dificultades en su aprendizaje, de acuerdo con Jácome y Gisela (2007): “La investigación en Matemática Educativa ha mostrado las dificultades en el aprendizaje al manipular, interpretar y significar a las razones, ecuaciones, identidades y funciones vinculadas a las relaciones trigonométricas” (p. 433).

De este modo, resulta imperativo explorar y desarrollar estrategias pedagógicas efectivas que faciliten la enseñanza de la trigonometría de manera integral y comprensible. Estas estrategias deben tener en cuenta el fomento de la participación activa de los estudiantes, la utilización de recursos visuales y tecnológicos pertinentes, y la promoción de la resolución de problemas prácticos y relevantes, por lo que resulta necesario considerar la diversidad de estilos de aprendizaje y habilidades

de los estudiantes, y adaptar las estrategias de enseñanza para asegurar que todos puedan comprender y aplicar las definiciones trigonométricas de manera significativa en contextos del mundo real.

Cabe destacar que las funciones trigonométricas juegan un rol importante dentro del mundo de las matemáticas. Un trabajo realizado por Trípoli, Torroba et al. (2019), enfocan en uno de sus objetivos específicos que el estudiante logre la comprensión de las definiciones seno y coseno, además que logre vincular las constantes que aparecen en la función, definida por:

$$f(t) = A\text{sen}(Bt + C) + D$$

con alguna interpretación física, además que pueda asociarla a la rama de la ingeniería y que, mediante el uso de TIC, pueda observar una aplicación experimental de esta.

Las funciones seno y coseno son funciones reales de una variable real definidas de la siguiente manera:

$$f(t) = A\text{sen}(Bt + C) + D, \text{ con } A \neq 0.$$

y

$$f(t) = A\text{cos}(Bt + C) + D, \text{ con } A \neq 0.$$

respectivamente.

En la presente investigación se consideró $D = 0$, debido a que los desplazamientos verticales de las funciones, en general, se estudian en cursos previos de la carrera. Ahora nos surge una pregunta: ¿Por qué utilizar el software GeoGebra para este trabajo? Los motivos son los siguientes: es un software libre, es decir, el usuario tienes acceso al código fuente, es gratuito y finalmente dinámico. Esta última afirmación es bien descrita por Posada-Acosta et al. (2017):

En la enseñanza tradicional de la Trigonometría, las figuras dibujadas por el maestro en la pizarra, además de ser estáticas y rígidas, pueden ser muy diferentes de aquello que él quiere representar. Los ambientes de Geometría Dinámica Interactiva pueden ser herramientas valiosísimas en la erradicación de las dificultades de los alumnos, inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. Puede considerarse que el software GeoGebra posee características semejantes a un simulador con el cual el alumno puede, desde una construcción, alterar los objetos preservando las características originales de la construcción (p. 401).

El estudio de este trabajo tiene como objetivo mejorar la comprensión de las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las funciones trigonométricas seno y coseno, utilizando la información de los datos que arrojen el Pre-test.

Para ello se proponen tres objetivos específicos, los cuales se muestran a continuación.

- Comparar la comprensión de las definiciones de: amplitud, período y diagrama de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno, utilizando GeoGebra (SGD) y el sistema tradicional de pizarra y tiza o marcador acrílico (SGE).
- Mejorar la comprensión de las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno, utilizando como estrategia el software GeoGebra (SGD).
- Incentivar al alumnado a utilizar herramientas tecnológicas para su futura práctica docente, más específicamente, el software GeoGebra.

1. Metodología

El estudio es abordado bajo el enfoque mixto, de carácter descriptivo, por cuanto, se centró en observar y registrar fenómenos o comportamientos tal como se presentan en su contexto natural, sin intentar modificarlos. En este caso, en el Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), Recinto Luis Napoleón Núñez Molina (RLNNM), República Dominicana. De acuerdo con Hernández-Sampieri y Mendoza (2018). Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.

La recolección de los datos a través de las encuestas, por parte del investigador, es de tipo cualitativo y luego se cuantifican para finalmente comparar los dos sistemas aplicados (SGE y SGD), como estrategias didácticas para el aprendizaje de las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno. Y con base a estos datos obtener algunas conclusiones.

La población objeto del estudio estuvo conformada por 18 estudiantes de la asignatura Trigonometría I, cuatrimestre 3-2022, pertenecientes a la Licenciatura en Matemática Orientada a la Educación Secundaria, ISFODOSU, RLNNM. Por ser la población finita, no se determinó cálculo muestral.

Este estudio fue planificado en tres fases:

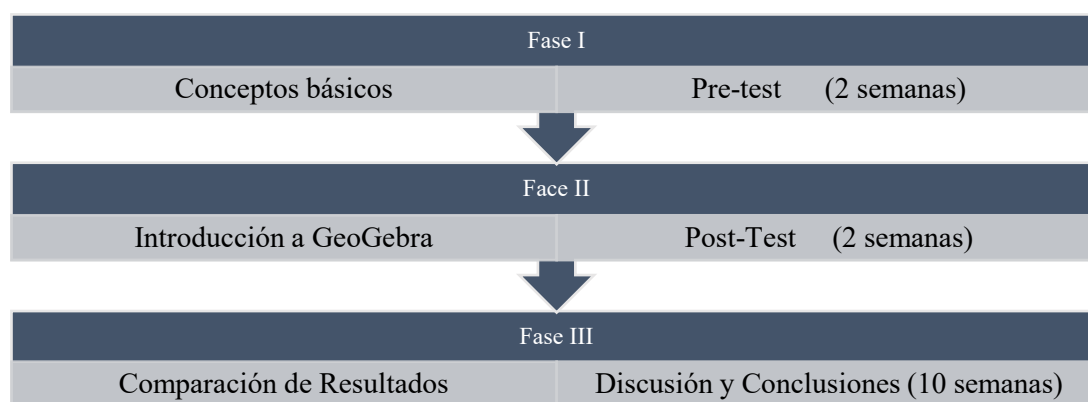
En la primera fase se expone en clases todo lo relativo a las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las funciones trigonométricas: seno y coseno. Esto último, utilizando el sistema tradicional de tiza (o marcador acrílico) (SGE), luego se procedió a realizar un pequeño test de preguntas (Pre- test, 7 preguntas), con sus posibles respuestas de tipo cualitativas: totalmente de

acuerdo (T.D), de acuerdo (D), en desacuerdo (E.D) y totalmente en desacuerdo (T.E.D), todas ellas basadas sobre la opinión de los estudiantes sobre la comprensión de las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno. Y la última pregunta referida al uso que hacían los docentes de matemática de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En el Pre-test, se aborda como los estudiantes perciben las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las funciones trigonométricas: seno y coseno. Esto último, utilizando el sistema tradicional de tiza (o marcador acrílico) (SGE).

En la segunda fase se hizo una inducción básica del software GeoGebra, por parte del docente del curso, haciendo énfasis en la utilización de deslizadores. A continuación, fueron asignadas a los discentes una serie de actividades a realizar con GeoGebra (SGD) que involucrara el manejo de las definiciones anteriormente mencionados. Aquí se les pide a los estudiantes que entreguen imágenes y ciertos comentarios de lo que realizaron en las actividades anteriormente señaladas, seguidamente, se realizan una serie de preguntas una vez realizadas las tareas con GeoGebra (Post- test, 7 preguntas) con sus posibles respuestas cualitativas, de manera similar a la descripción de lo hecho en el Pre test y basadas sobre la opinión de los estudiantes sobre la comprensión de las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno, pero ahora después de haber utilizado GeoGebra (SGD). Y la última pregunta que buscó indagar, sobre el uso de GeoGebra por parte de los participantes en su futura práctica como docentes.

Finalmente, en la tercera y última fase, se realiza una discusión sobre los resultados obtenidos y las conclusiones que arroja la investigación basados en la comparación y análisis de los datos recopilados.

Las fases de la investigación se ilustran de la siguiente manera:



Nota. Elaboración propia, 2023

2 Argumentación Teórica y Estado Del Arte

2.1. Las TIC en la enseñanza de la matemática rica

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) ofrecen numerosas posibilidades para enriquecer y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al integrar este estilo de vida en un área de formación tan elemental como la matemática, se puede lograr que el uso de software y aplicaciones especializadas permita a los estudiantes visualizar conceptos matemáticos abstractos de una manera más concreta y tangible. Esto facilita la comprensión de temas difíciles y fomenta un aprendizaje más activo y participativo.

Las TIC ofrecen acceso a una amplia gama de recursos educativos en línea, como videos, simulaciones, juegos interactivos y presentaciones multimedia, que pueden enriquecer la comprensión de los estudiantes y brindarles diferentes perspectivas sobre conceptos matemáticos complejos. Las herramientas en línea y los entornos virtuales de aprendizaje permiten a los estudiantes acceder a materiales educativos desde cualquier lugar y en cualquier momento.

El uso de recursos tecnológicos en las clases de matemáticas tiene un impacto positivo en los estudiantes, aunque se requieren investigaciones más profundas que analicen este impacto a lo largo de periodos de tiempo más extensos. Para fomentar aprendizajes significativos utilizando estos recursos, es necesario integrar en los currículos formativos competencias comunicativas y tecnológicas, tanto en los estudiantes como en los docentes, quienes deben innovar en sus métodos de enseñanza (Grisales-Aguirrearia, 2018).

El uso de las TIC en la enseñanza de la matemática es innegable hoy en día. De acuerdo con Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón (2021):

La formación en este tipo de herramientas con la que cuente el profesorado que enseña esta área del conocimiento, es clave en términos de su efectividad en el aula de clases”. Además, también afirman que: “Organismos internacionales como la Unesco (2017) y la OCDE (2019a) aseguran que dentro de las competencias de los profesionales del siglo XXI se encuentra el componente tecnológico (p. 93).

Según un estudio realizado por Díaz (2014), realizado en la escuela básica secundaria obligatoria (ESO) (en España):

Las matemáticas siempre han resultado una de las materias más complejas. Tal y como lo demuestra el Informe PISA (2012) en España el rendimiento en matemáticas de nuestros alumnos está por debajo de la media de la OCDE. De hecho, hay una tendencia negativa en el rendimiento educativo de esta asignatura, en particular cuando hablamos de fortalezas como: utilización de conceptos, hechos,

procedimiento, razonamientos matemáticos, y formular situaciones matemáticamente, según ese informe (p. 2).

De acuerdo con Cabrera et al. (2023):

La República Dominicana participa en el Programa Internacional para la evaluación de Estudiantes, Prueba PISA desde el 2015, donde el enfoque de evaluación fue en ciencias y las competencias científicas de las y los estudiantes. La prueba PISA en la República Dominicana es un informe que facilita conocer el nivel general de habilidades de los y las estudiantes de la República Dominicana, a los fines de servir como recurso, para guía de la evaluación y mejora de la calidad educativa (p.1).

Como vemos la prueba PISA es de suma importancia en lo referente a lo que se debe mejorar en la educación de la República Dominicana, es decir, buscar la calidad educativa.

En el mismo documento, se indica que la República Dominicana tomó parte por segunda vez en la prueba PISA en 2015, registrando una puntuación de 327,70 en el campo de las matemáticas, situándose por debajo del promedio de la OCDE. En su tercera participación en 2018, la puntuación en matemáticas se ubicó en 325,10 puntos, nuevamente por debajo del promedio de la OCDE. Destaca que esta última puntuación fue inferior a la obtenida en la participación anterior, evidenciando un descenso en el rendimiento en matemáticas respecto a la evaluación anterior (Cabrera et al., 2023).

Ante este panorama poco alentador, es deber del educador emplear metodologías didácticas que ayuden a cambiar esta realidad, unas de ellas es aplicar herramientas tecnológicas con el objetivo de mejorar el desempeño en futuras pruebas, lo que traería como consecuencia un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de la matemática. En este trabajo se aplicó una estrategia que involucra el uso de tecnologías, a una asignatura que tiene cierto grado de complejidad, dentro del área de la matemática, como lo es la trigonometría.

Uno de los principales obstáculos con los que se encuentran los estudiantes en el proceso de aprendizaje en la trigonometría y que refleja (Flores, 2008) es que a pesar de ser una rama muy visual es una de las más técnicas. Al ser visual debería ser más fácil de entender para los alumnos porque es “visible”, y sin embargo no es así porque a la hora de dibujar e interpretar se encuentran con varios obstáculos: la geometría basada en el uso de lápiz y papel deja al alumno poco margen de improvisación y de dinamismo lo que es importante a la hora de interpretar.

Por lo escrito anteriormente, es de suma importancia, aplicar en el desarrollo de la clase de trigonometría un SGD que en nuestro caso será GeoGebra, en especial para solventar las limitaciones, como las que se mencionan en el párrafo anterior, que implican el uso del modelo tradicional (SGE).

Las características de estos dos sistemas se pueden apreciar en el cuadro 1:

Cuadro 1. Características de los SGE y SGD (2023)

SGE	SGD
Cuando se dibuja un objeto geométrico en pizarra, ya no se puede modificar, salvo que se borre y se dibuje alguna modificación.	Una vez dibujado el objeto geométrico, es posible modificarlo mediante el software.
Los dibujos dependen de la habilidad de quien lo hace, por lo tanto, no existe precisión.	El software es quien grafica la figura y por lo tanto, existe precisión.
No se adquieren competencias tecnológicas.	Se adquieren competencias tecnológicas.
No se motiva la imaginación.	Se motiva la imaginación.

Nota. Elaboración propia, 2023

Fase I

Las definiciones básicas a estudiar son: amplitud, período y desplazamiento de fase de la gráfica de las funciones trigonométricas seno y coseno. Esta parte teórica se ha tomado de Zill (2012).

Se inicia considerando las gráficas de las funciones, reales de una variable real, definidas analíticamente por:

$$y = A \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad y = A \operatorname{cos} x \quad (1)$$

Cuando $A > 0$, las gráficas de las funciones expresadas en la ecuación (1) son de un estiramiento o una compresión vertical. Mientras que si $A < 0$ estas gráficas se reflejan sobre el eje X. Ambos casos se muestran en las figuras 1 y 2, respectivamente.

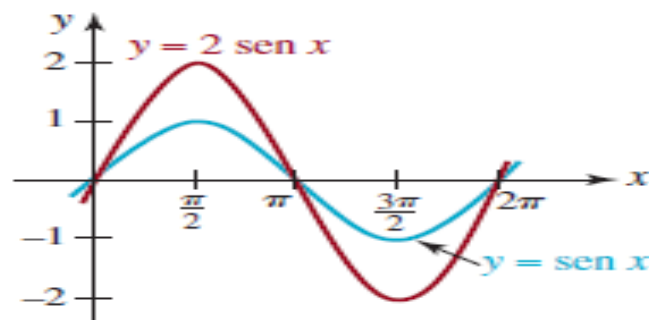


Figura 1. Estiramiento vertical de la función $y = 2 \operatorname{sen} x$.

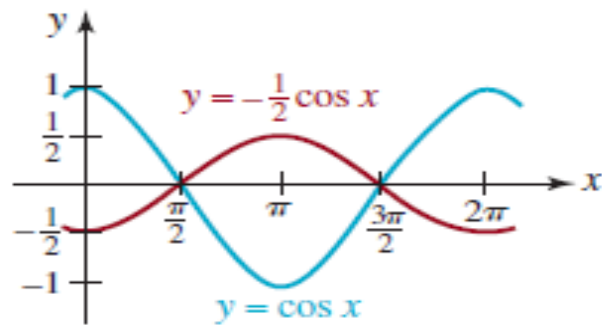


Figura 2. Gráfica de la función $y = -\frac{1}{2} \cos x$ con una compresión vertical y reflejada sobre el eje X.

En general, la distancia máxima de cualquier punto de la gráfica de $y = A \sin x$ o de $y = A \cos x$, al eje X es $|A|$. Al número $|A|$ se le llama amplitud de la función o de su gráfica.

Definición 1. (Funciones Periódicas)

Se dice que una función f es periódica si existe un número positivo p , tal que:

$$f(x) = f(x + p) \quad (2)$$

para cada x en el dominio de f . Si p es el número positivo más pequeño para el cual (2) es verdadero, entonces p se llama el período de la función f . Se puede observar que las funciones seno y coseno satisfacen:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \text{y} \quad \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

Así, ambas tienen período 2π .

La gráfica de una función periódica se obtiene con facilidad, trazando repetidamente un ciclo de su gráfica (en este caso, un intervalo de longitud 2π). Si tomamos como ciclo el intervalo $[0, 2\pi]$, la observación se muestra en la figura 3 y figura 4 con las funciones seno y coseno, respectivamente:

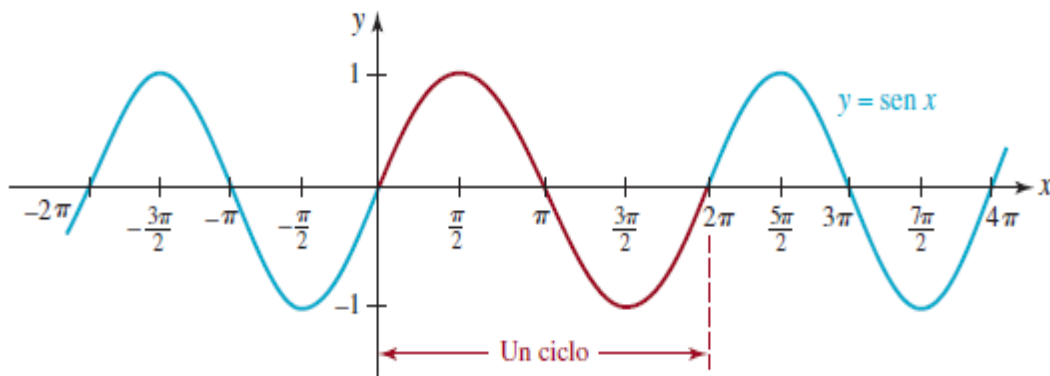


Figura 3. Gráfica de la función $y = \text{sen } x$.

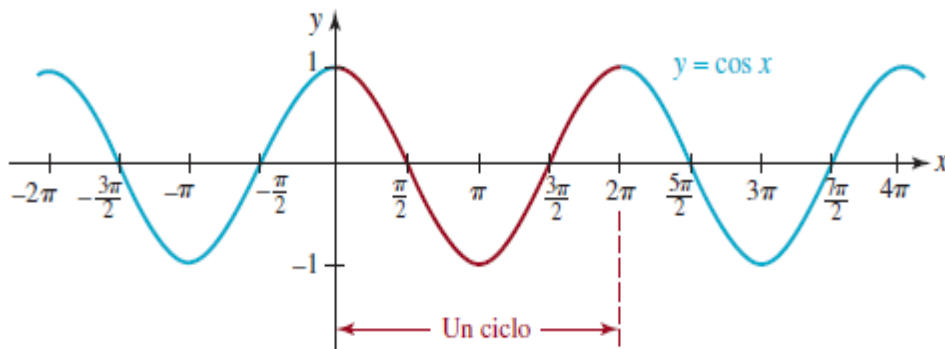


Figura 4. Gráfica de la función $y = \text{cos } x$.

Las propiedades de las funciones seno y coseno, se pueden resumir de la siguiente manera:

- El dominio de la función $f(x) = \text{sen } x$ y el dominio de la función $g(x) = \text{cos } x$ es el conjunto de todos los números reales R .
- El rango de la función $f(x) = \text{sen } x$ y el rango de la función $g(x) = \text{cos } x$ es el intervalo $[-1,1]$ en el eje Y.
- Los ceros de la función $f(x) = \text{sen } x$, son $x = n\pi$, con n un entero y los ceros de la función $g(x) = \text{cos } x$ son $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, con n un entero.
- La gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ es simétrica con respecto al origen y la función $g(x) = \text{cos } x$ es simétrica con respecto al eje Y.
- Las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \text{cos } x$ son continuas en el conjunto de todos los números reales R .

2.2. Las gráficas de $y=A\text{sen}(Bx)$ y $y=A\text{cos}(Bx)$

Si examinamos ahora la gráfica de $y = \text{sen}(Bx)$ para $B > 0$. La amplitud es 1, puesto que $A = 1$. El período de la función $y = \text{sen}x$ es 2π , un ciclo de la gráfica de $y = \text{sen}(Bx)$, que comienza en $x = 0$ y se comenzaran a repetir sus valores cuando $Bx = 2\pi$. Es decir, un ciclo de la función $y = \text{sen}(Bx)$ se completa en $0 \leq Bx \leq 2\pi$, de donde se obtiene que $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{B}$, de donde se observa que el período de la gráfica de $y = \text{sen}(Bx)$ es $\frac{2\pi}{B}$.

Nótese que el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{B}\right]$ es un ciclo de esa gráfica. Es fácil intuir que si $B > 1$, la gráfica sufre una compresión horizontal, mientras que si $0 < B < 1$, resulta en un estiramiento horizontal. En conclusión, las gráficas de

$$y = A\text{sen}(Bx); y = A\text{cos}(Bx),$$

cuando $B > 0$, tienen amplitud $|A|$ y período $\frac{2\pi}{B}$.

En el siguiente ejemplo se requiere determinar la amplitud y el período de la gráfica de la función:

$$y = \text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right).$$

Como se necesita que $B > 0$, entonces aplicamos la propiedad de imparidad de la función, entonces

$$y = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Se observa que $A = -1$, por lo tanto, la amplitud de la gráfica de la función viene dada por $A = |-1| = 1$, mientras que su período es $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Así se puede interpretar el ciclo de la función

$$y = \text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right),$$

en el intervalo $[0, 4\pi]$, como un estiramiento horizontal y una reflexión sobre el eje X, esto último debido a que $A < 0$. En la figura 5, se muestra la gráfica de la función $y = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$, en $[0, 4\pi]$.

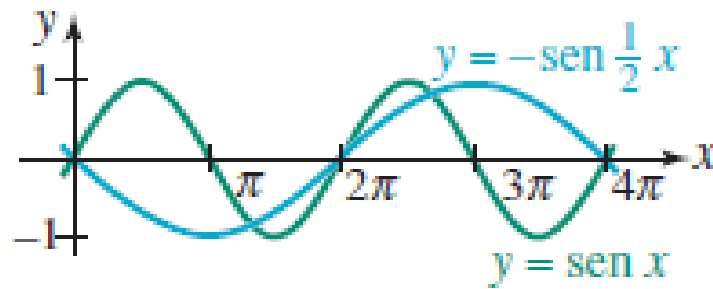


Figura 5. Gráfica de la función $y = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ en $[0, 4\pi]$.

2.3. Las gráficas de $y = A\text{sen}(Bx+C)$ y $y = A\text{cos}(Bx+C)$

Las gráficas de

$$y = A\text{sen}(Bx + C) \text{ y } y = A\text{cos}(Bx + C), \text{ con } B > 0,$$

son respectivamente, las de $y = A\text{sen}Bx$ y $y = A\text{cos}Bx$, desplazadas horizontalmente $\frac{|C|}{B}$. El desplazamiento es hacia la derecha si $C < 0$ y hacia la izquierda si $C > 0$. El número $\frac{|C|}{B}$, se llama desplazamiento de fase.

Así la gráfica de la función $y = \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ es un desplazamiento horizontal hacia la derecha de la gráfica de $y = \text{cos}(x)$. En la figura 6, la gráfica de $y = \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ tiene un ciclo en $[0, 2\pi]$ y es un desplazamiento de la gráfica de

$$y = \text{cos}(x),$$

en su ciclo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]$. Este desplazamiento es horizontal y además en $\frac{\pi}{2}$ unidades. De manera similar, se afirma que las gráficas de $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ y $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ son desplazamientos horizontales de la gráfica de $y = \text{sen}(x)$, la primera hacia la derecha y la segunda se desplaza también horizontalmente, pero hacia la izquierda y en ambos casos en $\frac{\pi}{2}$ unidades, como se puede observar en las figuras 7 y 8.

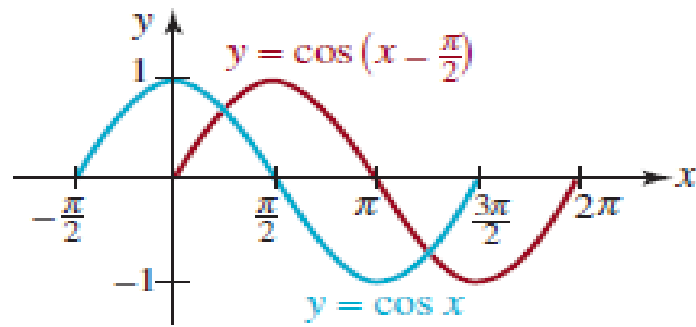


Figura 6. Función coseno desplazada horizontalmente a la derecha.

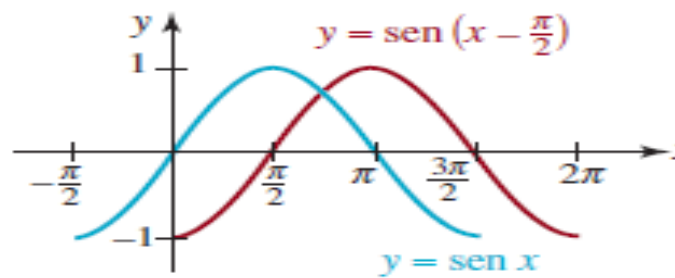


Figura 7. Función seno desplazada horizontalmente a la derecha.

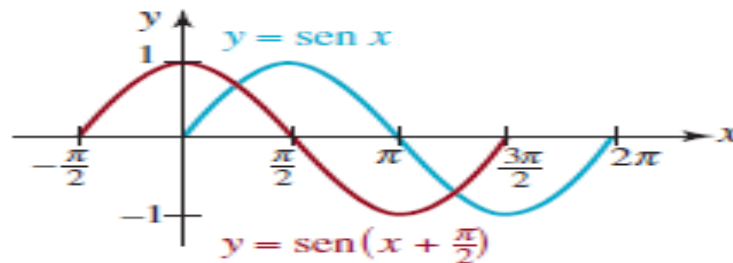


Figura 8. Función seno desplazada horizontalmente a la izquierda.

Observe que la gráfica del seno desplazada horizontalmente es la gráfica del coseno.

Lo anterior descrito fue explicado a 18 estudiantes de la asignatura Trigonometría I, cuatrimestre 3-2022, Licenciatura en Matemática orientada a la Educación Secundaria, ISFODOSU, RLNNM, de la manera tradicional, utilizando dos pizarras, una de tiza y otra acrílica, con borrador, tiza y marcador de pizarra acrílica, es decir, se usó el Sistema Geométrico Estático (SGE). Cabe destacar que se fue muy explícito en muchos detalles que se encuentran en el trazado de estas gráficas como lo son: a) los ceros de las funciones seno y coseno, b) los puntos de pruebas a considerar en las

gráficas y c) desplazamientos hacia la derecha o hacia la izquierda en ambas funciones. Las dificultades que perciben los estudiantes se obtuvieron de las respuestas del Pre-test aplicado.

A continuación, se muestran las preguntas del Pre-Test y el Post-test que se les aplicó a la muestra de los estudiantes.

Pre-test

1. ¿Considera usted que el concepto de amplitud de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se entendió después de la exposición teórica y práctica por parte del docente?
2. ¿Considera usted que el concepto de período de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se entendió después de la exposición teórica y práctica por parte del docente?
3. ¿Considera usted que el concepto de desplazamiento de fase de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se entendió después de la exposición teórica y práctica por parte del docente?
4. ¿Considera usted que entendió gráficamente el concepto de amplitud de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, después de la exposición teórica y práctica por parte del docente?
5. ¿Considera usted que entendió gráficamente el concepto de período de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, después de la exposición teórica y práctica por parte del docente?
6. ¿Considera usted que el concepto de desplazamiento de fase de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se entendió después de la exposición teórica y práctica por parte del docente?
7. ¿Piensa usted que el uso de un software para graficar funciones, como GeoGebra, es utilizado por los docentes de matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje?

Post –test

1. ¿Considera usted que el concepto de amplitud de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se comprendió mejor después de la utilización de GeoGebra?
2. ¿Considera usted que el concepto de período de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se entendió después de comprendió mejor después de la utilización de GeoGebra?
3. ¿Considera usted que el concepto de desplazamiento de fase de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se comprendió mejor después de la utilización del GeoGebra?
4. ¿Considera usted que entendió gráficamente el concepto de amplitud de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se comprendió mejor después de la utilización del GeoGebra?

5. ¿Considera usted que entendió gráficamente el concepto de período de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se comprendió mejor después de la utilización del GeoGebra?
6. ¿Considera usted que el concepto de desplazamiento de fase de una gráfica de funciones trigonométricas, particularmente, en el caso de las funciones seno y coseno, se comprendió mejor después de la utilización del GeoGebra?
7. ¿Estaría usted dispuesto a utilizar, el software GeoGebra, en su futuro ejercicio profesional como herramienta didáctica, para abordar el contenido de las funciones seno y coseno?

Cabe destacar que las preguntas de los cuestionarios fueron realizadas por los autores de este trabajo en el año 2023.

Para procesar estadísticamente los resultados de los cuestionarios se usarán las siguientes notaciones:

- T.D: Totalmente de acuerdo.
- D: De acuerdo.
- E.D: En desacuerdo.
- T.E.D: Totalmente en desacuerdo.
- f_i : frecuencia absoluta de cada respuesta de la pregunta i .
- (F.P): Frecuencia porcentual de cada respuesta de la pregunta i .

En la siguiente tabla se muestra la información del Pre-test.

Tabla 1: Información del Pre- test.

Pregunta/ f_i y (F.P) $_i$	T.D (f_i)	(F.P) $_i$	D (f_i)	(F.P) $_i$	E.D (f_i)	(F.P) $_i$	T.E.D (f_i)	(F.P) $_i$	Total (%)
1	9	50	9	50	0	0	0	0	100
2	9	50	9	50	0	0	0	0	100
3	4	22.22	8	44.44	6	33.33	0	0	100
4	3	16.67	15	83.33	0	0	0	0	100
5	9	50	9	50	0	0	0	0	100
6	3	16.67	9	50	6	33.33	0	0	100
7	3	16.67	9	50	6	33.33	0	0	100

Se observa que las respuestas a los ítems con sus respectivos porcentajes, los estudiantes, en su mayoría, consideran que se han entendido las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las funciones seno y coseno, así como también sus interpretaciones geométricas. Un aspecto

importante de resaltar es que un grupo significativo de la muestra (33.33%) responde que está en desacuerdo que entendió la definición de desplazamiento de fase de las gráficas de funciones trigonométricas seno y coseno e igual porcentaje responden que están en desacuerdo con que entendió gráficamente la definición de desplazamiento de fase de las gráficas de funciones trigonométricas seno y coseno después de la exposición teórica y práctica por parte del docente. El mismo porcentaje (33.33%) del alumnado se muestran en desacuerdo con que los docentes de matemáticas usan herramientas tecnológicas, como GeoGebra, en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Cabe recordar que toda esta información se obtuvo al aplicar el Sistema Geométrico Estático (S.G.E).

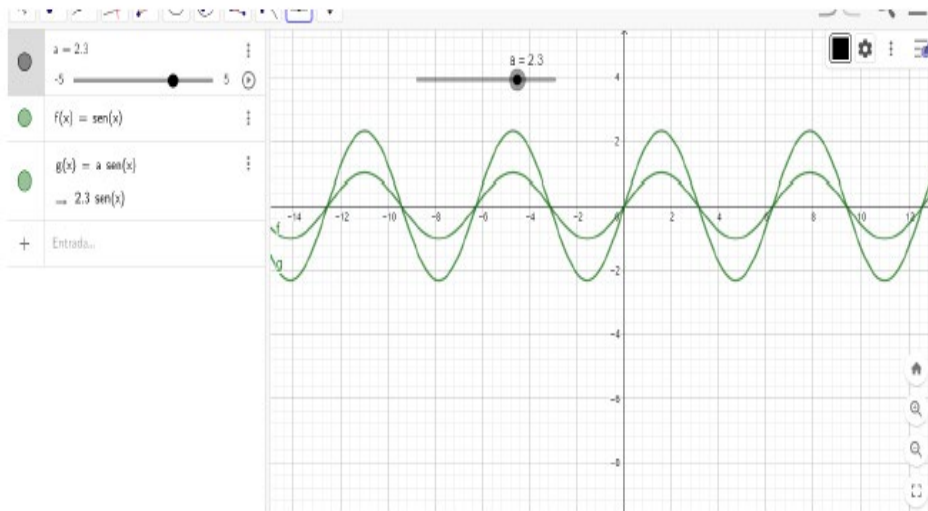
Fase II

Esta fase se inicia con una breve introducción de GeoGebra, haciendo énfasis en como se podían graficar las funciones trigonométricas seno y coseno en sus formas $y = \text{sen}x$ y $y = \text{cos}x$. También se les enseñó a utilizar los deslizadores para ayudar trabajar más adelante las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las gráficas de estas funciones. Seguidamente, se les propuso a los discentes las siguientes actividades, las cuales realizaron usando GeoGebra.

1. Graficar funciones de la forma $y = A\text{sen}x$ e identificar su amplitud y reconocer gráficamente su significado.
2. Graficar funciones de la forma $y = A\text{cos}x$ e identificar su amplitud y reconocer gráficamente su significado.
3. Graficar funciones de la forma $y = A\text{sen}Bx$ e identificar su amplitud y período, además de reconocer gráficamente sus significados.
4. Graficar funciones de la forma $y = A\text{cos}Bx$ e identificar su amplitud y período, además reconocer gráficamente sus significados.
5. Graficar funciones de la forma $y = A\text{sen}(Bx + C)$ e identificar su amplitud, período y desplazamiento de fase de la gráfica, además de reconocer gráficamente sus significados.
6. Graficar funciones de la forma $y = A\text{cos}(Bx + C)$ e identificar su amplitud, período y desplazamiento de fase de la gráfica, además de reconocer gráficamente sus significados.

El grupo trabajó de manera ardua y se le exigió que mostraran los captures de pantalla como evidencia de lo realizado en cada actividad, con algunos comentarios sobre las mismas en un informe.

A continuación, se muestran algunas imágenes de lo realizado por los estudiantes, con sus respectivos comentarios.

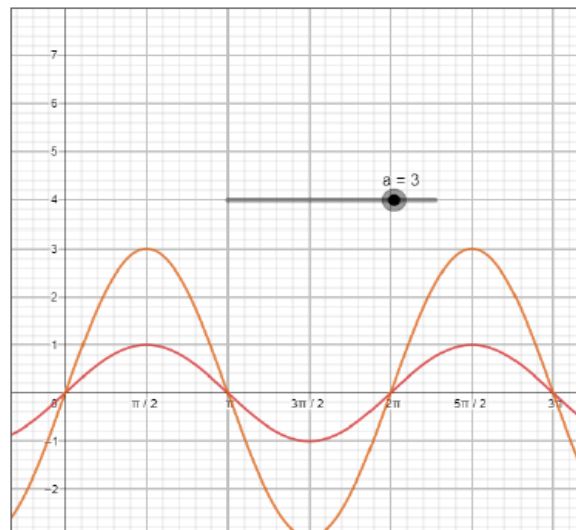


Aquí podemos observar la como la amplitud de la gráfica es diferente a la de la gráfica original y como esta se estira hacia arriba

Figura 9. Actividad desarrollada por un estudiante. Amplitud

1. Graficar función en forma $y = A \text{ sen}(x)$ e identificar su amplitud y reconocer gráficamente su significado.

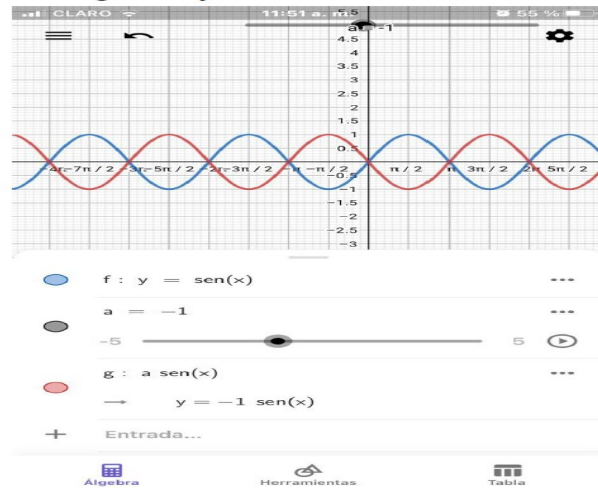
$Y = 3 \text{ Sen}(x)$



- En la grafica se observa que la función se estiró verticalmente
- El rango de la función es $[-3, 3]$
- Su amplitud es 3
- Su periodo es 2π

Figura 10. Actividad desarrollada por un estudiante. Variación de la amplitud usando deslizadores.

• Primera gráfica: $y = A \text{sen}x$

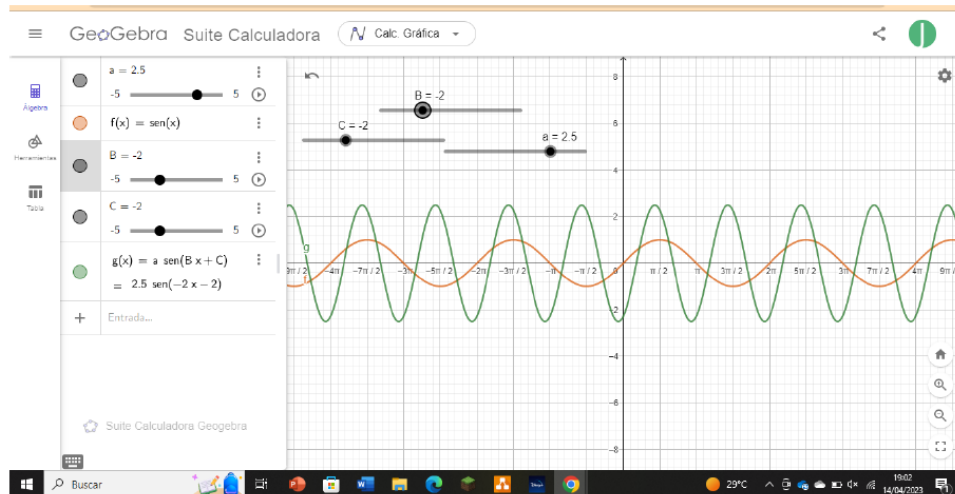


Comentario:

En la grafica presentada se puede identificar que la amplitud de la función de color azul es 1, sin embargo, cuando se mueve el deslizador hacia -1 la amplitud sigue siendo 1 pero el sentido de la gráfica roja cambia haciendo una reflexión con la primera.

Figura 11. Actividad desarrollada por un estudiante. Cambio de fase.

5. Graficar funciones de la forma $y = A \text{sen}(Bx + C)$ e identificar su amplitud, periodo y desplazamiento de fase de la gráfica, además de reconocer gráficamente sus significados.



Comentario:

De acuerdo con la gráfica obtenida en GeoGebra de la función $y = A \text{sen}(Bx + C)$, en donde $A = 2.5$, $B = -2$ y $C = -2$, de tal manera que: $y = 2.5 \text{sen}(-2x + (-2))$ y de acuerdo a la gráfica de $y = \text{sen}(x)$ se nota un desplazamiento horizontal de 2 unidades hacia la derecha. Además, se puede notar una amplitud de 2.5, puesto que $|A| = |2.5| = 2.5$ y un periodo de -

π , puesto que el periodo de la función seno es $\frac{2\pi}{B}$ por lo que en la función

$y = 2.5 \text{sen}(-2x + (-2))$ el periodo es $\frac{2\pi}{-2} = -\pi$.

Figura 12. Actividad desarrollada por un estudiante. Cambio de fase del seno.

Los comentarios de estos estudiantes están bien próximos a la realidad, aunque les falta una mejor redacción, en algunos casos, como el primero, puesto que debe decir que la gráfica se estira verticalmente, lo cual incluye un estiramiento hacia arriba y también hacia abajo. En la última gráfica falta decir que la gráfica de color rojo es la gráfica del seno con amplitud igual a 1, período igual a 2π y sin desplazamientos verticales, ni horizontales; mientras que la de color verde posee desplazamientos verticales y horizontales, pero no como indica su escrito y un período de π (no de $-\pi$). Esto no significa de ninguna manera que no entienden la definición, puesto que, al preguntarles sobre lo escrito, reflexionan y reconocen su error de redacción u omisión en los colores que identifican a ambas gráficas.

Una vez finalizadas las actividades con GeoGebra, se procedió a aplicar un pequeño grupo de preguntas (Post-test) con sus posibles respuestas de tipo cualitativas. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos en el Post-test.

Tabla 2: Información del Post-test.

Pregunta/Respuestas y porcentajes.	T.D (f)	%	D (f)	%	E.D (f)	%	T.E.D (f)	%	Total (%)
1	12	66.67	6	33.33	0	0	0	0	100
2	13	72.22	5	27.28	0	0	0	0	100
3	14	77.78	4	22.22	0	0	0	0	100
4	12	66.67	6	33.33	0	0	0	0	100
5	10	55.56	8	44.44	0	0	0	0	100
6	6	33.33	12	66.67	0	0	0	0	100
7	16	88.88	2	11.11	0	0	0	0	100

De la Tabla 2, se puede observar que el 100% de los estudiantes presentan respuestas entre Totalmente de acuerdo y De acuerdo con todos los ítems. Es interesante observar que la totalidad de los estudiantes opina que incluiría a GeoGebra en su práctica profesional. También se observa que desaparecen la respuesta en desacuerdo (E.D).

Fase III

Después de hacer un análisis comparativo de los resultados arrojados por las encuestas de las fases I y II, se muestran la discusión y conclusiones del presente trabajo.

3. Discusión

Los hallazgos del trabajo, una vez analizados y comparados los resultados de aplicar el SGE y un SGD (GeoGebra), sugieren que el software GeoGebra mejora la comprensión de las definiciones que se pueden trabajar con él. Esto concuerda con Díaz (2014) señala que se ha visto que los SGD como GeoGebra, le brindan al estudiante un apoyo en la visualización y que por medio de esta se puede concentrar en el aprendizaje de las definiciones que trabaja, también Posada-Acosta y Matilla (2017) indican que la enseñanza de la trigonometría del docente de matemática de la manera tradicional es imprecisa, con dibujos rígidos, mientras que con el uso de GeoGebra es totalmente distinta, puesto que existe el dinamismo en la construcción de la figuras y esto ayuda a mejorar las dificultades del alumno en el proceso enseñanza y aprendizaje. Por otro lado, existe la evidencia para afirmar que los docentes están dispuestos a utilizar en su futura práctica docente el Software GeoGebra y esto se realizó en un curso de comienzo de la carrera, por lo tanto, se está formando a un maestro con herramientas tecnológicas, esto último, da cierta respuesta a lo expresado por Díaz (2014), donde señala que hay un cierto vacío en lo que respecta al uso de las TIC en la formación profesoral, mientras que Padilla-Escorcía y Conde-Carmona (2019) señalan que la tecnología es parte de la realidad del entorno y que no utilizarla en el área educativa sería un grave desatino.

Conclusiones

De la información que aporta la Tabla 3 al compararla con la información de la Tabla 2, se observa que las respuestas Totalmente de acuerdo incrementaron su frecuencia en la segunda tabla con respecto a la primera. También se puede observar que desaparecen las respuestas: En desacuerdo (E.D), las cuales correspondían a la comprensión de lo relativo al desplazamiento de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas en estudio. Así, afirmamos que la totalidad de los estudiantes afirman que comprenden las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las funciones trigonométricas seno y coseno, tanto de manera teórica como gráfica. Lo cual muestra lo positivo de incorporar un SGD, en nuestro caso GeoGebra, como una estrategia para mejorar la comprensión de las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las gráficas de las funciones seno y coseno.

El estudiantado, se vio en la necesidad de aprender a utilizar el software GeoGebra, puesto que las actividades planteadas lo utilizaban como herramienta para aprender las definiciones de amplitud, período y desplazamiento de fase de las funciones trigonométricas seno y coseno. Este hecho contribuye a que el alumnado se acostumbre a hacer uso de herramientas tecnológicas para su aprendizaje en algún tema específico de la matemática.

De la tabla 1, se puede apreciar que sólo un tercera parte de los alumnos piensan que los docentes de matemáticas no usan herramientas tecnológicas, como GeoGebra, en el proceso de enseñanza y aprendizaje y de la segunda tabla se recopila la información de que la totalidad de los estudiantes piensa en incorporar GeoGebra en su futura práctica docente, por lo tanto, podemos afirmar que en este estudio la cantidad de docentes que usan herramientas como GeoGebra en su práctica docente en el ISFODOSU es considerablemente buena, un tercio, mientras que por otra parte, el total de los alumnos del estudio opinan que están dispuestos a incorporar la herramienta GeoGebra en su futura actividad docente en el aula. En consecuencia, podemos afirmar que el profesorado del área de matemática del ISFODOSU en un buen número incorpora herramientas tecnológicas en su práctica docente y que los futuros profesores de matemática (los 18 estudiantes del curso) están dispuestos a incorporar a su actividad docente el software GeoGebra.

Referencias

- Alexis, P. (2016). Nota científica. La trigonometría: Dificultades existentes en el proceso enseñanza-aprendizaje. *Revista Colón Ciencias, Tecnologías y Negocios*, 3(1), 36-43. <http://up-rid.up.ac.pa/3097/>
- Cabrera S., Lisbeth P. y Alba L. (2023). Análisis del Marco de Referencia PISA 2022. Foco Atención Matemática. Departamento de Evaluación. Instituto Dominicano de Evaluación e Investigación de la Calidad Educativa. <https://ideice.gob.do/documentacion/publicaciones-msg-set-id-1-art-p1-181-analisis-del-marco-de-referencia-pisa-2022-foco-atencion-matematicas>
- Díaz, M. (2014). Enseñanza de la trigonometría en 4º de la ESO con GeoGebra [Fin de Máster, Universidad Internacional de la Rioja]. Facultad de Educación. <https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2426/diaz.fernandez.pdf?sequence=1>
- Flores, F. (2008). Historia y didáctica de la trigonometría. Ítakus, sociedad para la información S.L. España. <https://www.studocu.com/bo/document/universidad-mayor-de-san-simon/trigonometria/historia-y-didactica-de-la-trigonometria-francisco-luis-flores-gil/107661311>
- Grisales-Aguirrearia, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), 198-214, <https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751>
- Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2018). Metodología de la investigación. Las rutas

cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw Hill: México
[.http://www.biblioteca.cij.gob.mx/Archivos/Materiales_de_consulta/Drogas_de_Abuso/Articulos/SampieriLasRutas.pdf](http://www.biblioteca.cij.gob.mx/Archivos/Materiales_de_consulta/Drogas_de_Abuso/Articulos/SampieriLasRutas.pdf)

- Jácome, G. y Montiel, G. (2007). Memoria de la XI Escuela de Invierno de Matemática Educativa. Red Cimates. Pp. 433-436. <http://up-rid.up.ac.pa/3097/>
- Posada-Acosta, M. G., Matilla-Arias, J., y Rosales-Sáez, F. (2017). Potencialidades del software GeoGebra en la enseñanza de la matemática: estudio de caso de su aplicación en la trigonometría. *Roca. Revista científico - Educacional De La Provincia Granma*, 13(4), 401-415. <https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca/article/view/300>
- Padilla-Escorcia, I. A., y Acevedo-Rincón, J. P. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica: mediaciones con TIC. *Eco Matemático*, 12(1), 93–106. <https://doi.org/10.22463/17948231.3072>
- Trípoli, M., Torroba P., Devece E. y Aquilano, L. (2019). Funciones trigonométricas, periódicas y oscilatorias: Una propuesta interdisciplinaria. Quinta Jornadas ITE. Facultad de ingeniería UNLP, pp. 166-171.
- Zill, D y Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. Tercera edición. Mc Graw Hill., 12 (1), 73-112, 1992.

Enviado: 20/12/2023

Aceito: 24/10/2024