



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p045-064>

História da Matemática e Tecnologia: visualização de sequências recorrentes, algumas propriedades e a noção de Tabuleiro 2D/3D

History of Mathematics and Technology: visualization of recurring sequences and the notion of 2D/3D board.

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES¹

<https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

RESUMO

O estudo de sequências numéricas recorrentes costuma apresentar pouco espaço de discussão no contexto dos livros de História da Matemática no Brasil. No contexto da formação do professor de Matemática, a investigação em torno de conceitos matemáticos relacionados com diferentes formas de representação de sequências numéricas recorrentes adquire importância estratégica. Assim, o presente trabalho apresenta propriedades geométricas relacionadas com a noção de Tabuleiro que possui íntima relação com a noção de sequência numérica. Ademais, a visualização por intermédio do software GeoGebra permite explorar alguns exemplos de Tabuleiros 2D/3D relacionados com as sequências numéricas de Padovan, Pell e de Mersenne, além de possibilitar a construção de um cenário de aprendizagem diferenciado para o professor de Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática; Sequência numérica; Professor de Matemática.

ABSTRACT

The study of recurring numerical sequences usually presents little space for discussion in the context of History of Mathematics books in Brazil. In the context of Mathematics teacher training, research into mathematical concepts related to different forms of representation of recurring numerical sequences acquires strategic importance. Thus, the present work presents geometric properties related to the notion of Board, which is closely related to the notion of numerical sequence. Furthermore, visualization using the GeoGebra software allows you to explore some examples of 2D/3D Boards related to the Padovan, Pell and Mersenne numerical sequences, in addition to enabling the construction of a different learning scenario for the Mathematics teacher.

Key-words: History of Mathematics; Numerical sequence; Mathematics Teacher.

¹ Professor Titular do departamento de Matemática e Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – fregis@ifce.edu.br

Introdução

Os livros de História da Matemática (ESTRADA, 2000; EVES, 1969; KATZ, 1998), de modo recorrente, dedicam amplo interesse ao estudo histórico da sequência de Fibonacci que, de modo formal, se caracteriza pela seguinte relação de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, com os valores $F_0 = 0, F_1 = 1$. Em nossos trabalhos temos registrado considerável escassez de investigações que, embora amparadas por alguns argumentos relevantes, tais como previstos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mediante o estudo previstos de sequências recursivas (MONTEIRO *et al.*2023)², findam por impulsionar certas concepções equivocadas e/ou imprecisas sobre a Matemática e propriedades com recorrências.

Por outro lado, podemos recordar o caso de uma sequência numérica recorrente menos explorada pelos livros de História da Matemática, como no caso da sequência de Pell, cujo nome ou nomenclatura e relação de recorrência correspondente é definida por $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, $P_0 = 0, P_1 = 1$. Na Figura 1 conseguimos visualizar os dois exemplos, via noção de Tabuleiro.

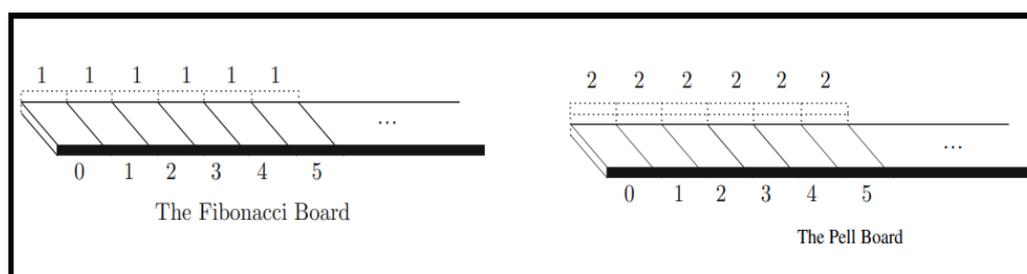


FIGURA 1: Koshy (2014, p. 76 – 77) descreve e compara o modelo para a abordagem combinatória e distingue as propriedades do Tabuleiro de Fibonacci e do Tabuleiro de Pell
FONTE: Koshy (2014)

Koshy (2014) exemplifica alguns elementos e formas de representação e interpretação de ambas as sequências numéricas, quando recorda sua descrição via Tabuleiro e a construção de um Tabuleiro de Fibonacci e de um Tabuleiro de Pell. Na figura 1, conseguimos visualizar ambos os casos e sua interpretação pictórica, todavia, completamente estática. Podemos reparar que o autor se esforça em transmitir uma interpretação e significado 3D para o referido conceito de Tabuleiro e que continua a ser empregado em inúmeros trabalhos na atualidade.

² Por exemplo, ao consultarmos o trabalho de Monteiro *et al.*(2023) identificamos que os autores buscam relacionar a recorrência que se costuma ser chamada de Fibonacci, e que se constitui como um elemento de uma classe determinada de recorrências homogêneas de 2ª ordem, de forma única, exclusivamente pelos dois valores iniciais, com progressões aritméticas. Não obstante, tal propriedade envolvendo progressões pode ser verificada para toda classe, a menos dos valores iniciais e, de modo particular, sequência de Fibonacci é um exemplo singular.

Por outro lado, quando buscamos proporcionar itinerários diferenciados para a formação de professores de Matemática no Brasil, compreendemos que a exploração da Tecnologia permite vislumbrarmos inúmeras possibilidades de aprendizagem no contexto da História da Matemática (ALVES, 2017; BUTON, 2007; STILLWELL, 2010). Com efeito, na Figura 2 trazemos uma construção realizada com o *software GeoGebra*. Para tanto, consideramos um Tabuleiro 3D (na cor rosa), constituído de células 3D e todas são enumeradas em ordem crescente, da seguinte forma $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-2, n-1, n$. Ademais, iremos considerar dois tipos de ladrilhos (células) 3D. O primeiro ladrilho será um paralelepípedo branco, de dimensões $1 \times 1 \times 1$ e um segundo ladrilho paralelepípedo cinza, de dimensões $1 \times 2 \times 1$ (Ver Figura 2). Tal construção dinâmica possibilita explorar compreender propriedades importantes da noção abstrata de Tabuleiro.

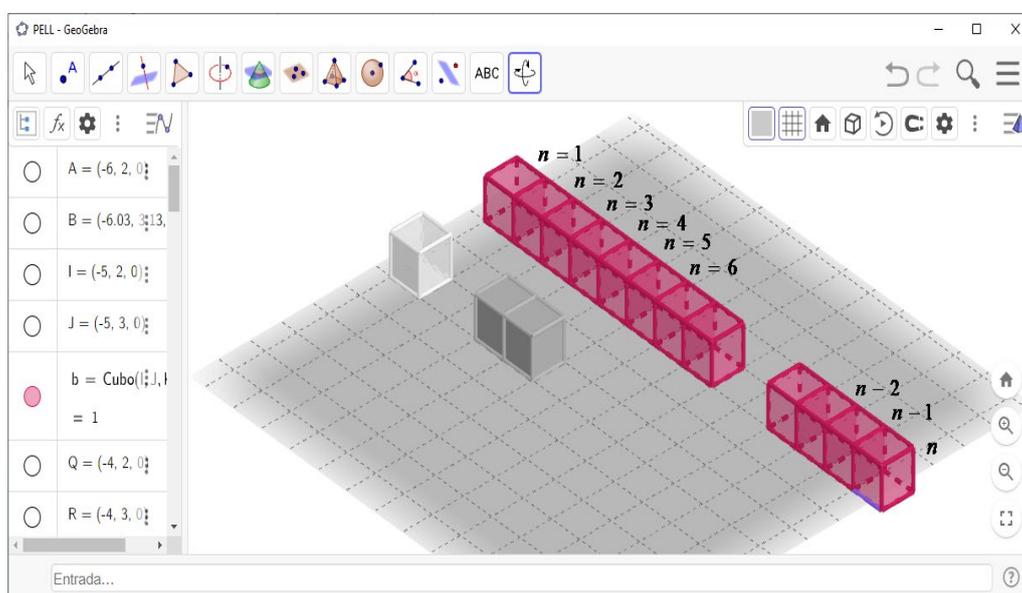


FIGURA 2: Visualização de tabuleiro (3D) que se relaciona com a sequência de Fibonacci e peças em forma de paralelepípedo

FONTE: Elaborado pelo autor.

Na literatura científica correspondente encontramos inúmeros trabalhos que discutem pesquisas em torno da noção de Conselho, suas formas generalizadas e uma diversidade de abordagens e suas correspondentes interpretações (BENJAMIN; QUINN, 1999; 2003a; 2003b; BENJAMIN; PLOTT; SELLERS, 2008; DRESDEN; TULSKIKH, 2021; ZIQIAN; DRESDEN, 2022; DOŠLIĆ; PODRUG, 2022; KOSHY, 2001; 2014; 2019; BENJAMIN; WALTON, 2009). Contudo, vale ressaltar que muitos desses trabalhos representam resultados de pesquisas em Matemática Pura e são direcionados a um grupo restrito de pesquisadores e especialista em ramo particular de pesquisa.

Ao considerarmos a abordagem combinatória de sequências numéricas via noção de Tabuleiro, de forma preliminar, nos deparamos com alguns autores que exemplificam a interpretação da sequência de Fibonacci. Por outro lado, no Quadro 1 apresentamos uma lista extensa de sequências numéricas e algumas delas não possuem ou até o momento não registramos trabalhos que indiquem propriedades correspondentes, com destaque, por exemplo, no caso do Oresme sequência e a sequência de Narayana. Além disso, numerosas propriedades relacionadas ao conjunto de sequências mostradas no Quadro 1 podem ser direcionadas ao contexto da formação de professores no Brasil (ALVES, 2022; ALVES; SOUSA, 2023).

Quadro 1: Exemplos de sequências numéricas recorrentes definidas por valores iniciais

Sequência numérica	Relação de recorrência algébrica
FIBONACCI	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com $f_0 = 0, f_1 = 1$.
TRIBONACCI	$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, com $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1$.
TETRANACCI	$Te_n = Te_{n-1} + Te_{n-2} + Te_{n-3} + Te_{n-4}$, para valores iniciais $Te_0 = 1, Te_1 = 1, Te_2 = 2, Te_3 = 4$
....
PADOVAN OR COORDONIER	$C_{n+1} = C_{n-1} + C_{n-2}$, com $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 1$.
TRIDOVAN	$Tri_{n+1} = Tri_n + Tri_{n-1} + Tri_{n-2}$, para valores iniciais $Tri_0 = 0, Tri_1 = 1, Tri_2 = 0, Tri_3 = 1$
....
PELL	$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, para valores iniciais $P_0 = 0, P_1 = 1$.
TRI-PELL	$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n + P_{n-1}$, com $P_0 = 0, P_1 = 1, P_2 = 2$.
LUCAS	$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, com $L_0 = 1, L_1 = 3$.
PERRIN	$Q_{n+1} = Q_{n-1} + Q_{n-2}$, para valores iniciais $Q_0 = 3, Q_1 = 0$.
MERSENNE	$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$, com $M_0 = 0, M_1 = 1$.
ORESME	$O_{n+2} = O_{n+1} - (1/4)O_n$, com $O_0 = 0, O_1 = 1/2$.
NARAYANNA	$N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, com $N_0 = 1, N_1 = 1$.
JACOBSTHAL	$J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$, para valores iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$.
TRI-JACOBSTHAL	$J_{n+2} = J_{n+1} + J_n + 2J_{n-1}$, com $J_0 = 0, J_1 = 1 = J_2$.
LEONARDO	$Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2}$, com $Le_0 = 1, Le_1 = 1$.
REPUNIDADES	$R_{n+1} = 10R_n + 1, n \geq 1$, com $R_0 = 0, R_1 = 1$.
NÚMEROS TELEFÔNICOS	$T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}$, com $T_0 = 1, T_1 = 1$.

Fonte: Elaboração do autor.

A partir do Quadro 1, assinalamos que algumas das sequências numéricas recorrentes indicadas não possuem ainda uma interpretação combinatória via Tabuleiro. Por exemplo, assinalamos o caso da sequência recorrente de Narayana, da sequência de Oresme e, por fim, a sequência dos números telefônicos. (Alves; Vieira; Catarino, 2023), indicada pela recorrência $T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}$ e que corresponde ao conjunto dos números telefônicos. Por outro lado, considerando alguns resultados contemporâneos e formas diferenciadas de tratamento e da formalização envolvendo certos argumentos recorrentes no contexto da abordagem combinatória, na seção subsequente abordaremos alguns pressupostos assumidos por Tedford (2019) com o interesse de discutir a sequência de Padovan ou de Cordonnier.

Nesse caso, colocaremos em evidências sua representação 2D, a fim de de comparar com sua representação 3D. Mostraremos que a exploração da tecnologia, por intermédio do *software* GeoGebra possibilita a exploração da visualização e a correlação de elementos de natureza numérica, algébrica e geométrica. Assim, por intermédio do *software* GeoGebra, indicaremos alguns elementos visando a mediação e a transposição didática dos conhecimentos envolvidos em cada situação, com amparo de manipulação com o GeoGebra.

1. Dois exemplos de abordagem combinatória 2D: o caso da sequência de Padovan e Mersenne

A partir do Quadro 1, assinalamos que algumas das sequências indicadas não possuem ainda uma interpretação combinatória via Tabuleiro. Por exemplo, assinalamos o caso da sequência de Narayana, da sequência de Oresme e, por fim, a sequência dos números telefônicos.

Vejamos de modo detalhado o caso da sequência de Padovan. Vamos considerar as seguintes peças do Tabuleiro que indicaremos, segundo Tedford (2019), por  (dominós) e  (triminós). Em seguida, consideramos algumas regras de composição e descrição dos ladrilhos. De fato, definiremos o seguinte elemento \mathfrak{T}_n e que define uma partição em dois conjuntos, dos dominós (D) e do triminós (T): $\mathfrak{T}_n = D \cup T$. Em seguida, de acordo com a descrição de Tedford (2019, p. 291), indicamos o subconjunto D dos possíveis ladrilhos que sempre terminam por um dominó . E, por outro lado, o subconjunto T dos possíveis ladrilhos que sempre terminam por um triminó .

Por exemplo, vamos determinar os elementos iniciais indicados por $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4, \mathfrak{T}_5$. Considerando a definição anterior $\mathfrak{T}_n = D \cup T$, no caso \mathfrak{T}_1 assumiremos que, fixando um 1 – Tabuleiro não é possível realizar nenhuma forma de ladrilho, isto é, designaremos por $\mathfrak{T}_1 = \emptyset$ e, numericamente, podemos indicar por $|\mathfrak{T}_1| = 0 = P_{-1}$. Por outro lado, fixando um 2 – Tabuleiro concluiremos,

naturalmente, que ocorre apenas $\mathfrak{T}_2 = \{1 \text{ dominó}\} \cup \emptyset$, isto é, vemos que $|\mathfrak{T}_2| = 1 + 0 = 1 = P_0$. No passo seguinte, para um 3 – Tabuleiro, podemos inferir que $\mathfrak{T}_3 = \emptyset \cup \{1 \text{ triminó}\}$, isto é, determinamos que $|\mathfrak{T}_3| = 0 + 1 = 1 = P_1$. Repetindo os argumentos anteriores, fixando um 4 – Tabuleiro, veremos que $\mathfrak{T}_4 = \{1 \text{ dominó}\} \cup \emptyset$, isto é, podemos determinar que $|\mathfrak{T}_4| = 1 + 0 = 1 = P_2$. Nosso último caso que exemplifica os argumentos anteriores, quando fixamos um 5 – Tabuleiro temos as seguintes possibilidades indicadas por $\mathfrak{T}_5 = \{ \text{tridominó, dominó} \} \cup \{ \text{dominó, tridominó} \}$. Portanto, determinaremos que acontece a seguinte igualdade $|\mathfrak{T}_5| = 1 + 1 = 2 = P_3$.

Na figura abaixo exemplificamos os casos de $1 \leq n \leq 9$. Na coluna do meio indicamos por D as configurações possíveis por ladrilhos que correspondem aos ladrilhos que acabam por um dominó . Na última coluna à direita conseguimos identificar os ladrilhos que acabam sempre por um triminós . Por exemplo, vemos a correspondência numérica: $|\mathfrak{T}_6| = 1 + 1 = 2 = P_4$, $|\mathfrak{T}_7| = 2 + 1 = 3 = P_5$, $|\mathfrak{T}_8| = 2 + 2 = 4 = P_6$, $|\mathfrak{T}_9| = 3 + 2 = 5 = P_7$.

A partir da disposição e dos casos exibidos nas Figuras 2 e 3 descrevemos um modelo que envolve propriedades aritméticas, algébricas e geométricas, que devem corresponder com a sequência numérica de Padovan.

Teorema (TEDFORD, 2019): Para todo inteiro $n > 1$. Considerando $\tilde{\mathfrak{T}}$ as formas de preencher com os seguintes ladrilhos  (dominós) e  (triminós). Então, vale a seguinte relação $|\tilde{\mathfrak{T}}_n| = p_n = P_{n-2}$.

Demonstração. Com o amparo dos casos particulares anteriores, constatamos que para $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4, \mathfrak{T}_5$ temos a propriedade esperada. Neste caso, recordamos que o elemento \mathfrak{T}_n que define uma partição em dois conjuntos, dos dominós (D) e do triminós (T): $\mathfrak{T}_n = D \cup T$. Todavia, desde que $|D| = p_{n-2}$ e $|T| = p_{n-3}$, conseqüentemente, encontramos que $p_n = |\mathfrak{T}_n| = p_{n-2} + p_{n-3}$. Finalmente, tal relação coincide, de modo preciso, com a relação característica da sequência de Padovan. ■

Na Figura 3, conseguimos visualizar algumas colunas que correspondem com as propriedades desejadas e previstas pelo teorema 1. Embora grande parte dos resultados, via abordagem combinatória, presentes no trabalho de Tedford (2019) envolve certos interesses específicos de pesquisa em Matemática Pura, sua interpretação possibilita explorar tal assunto com professores de Matemática em um nível elementar.

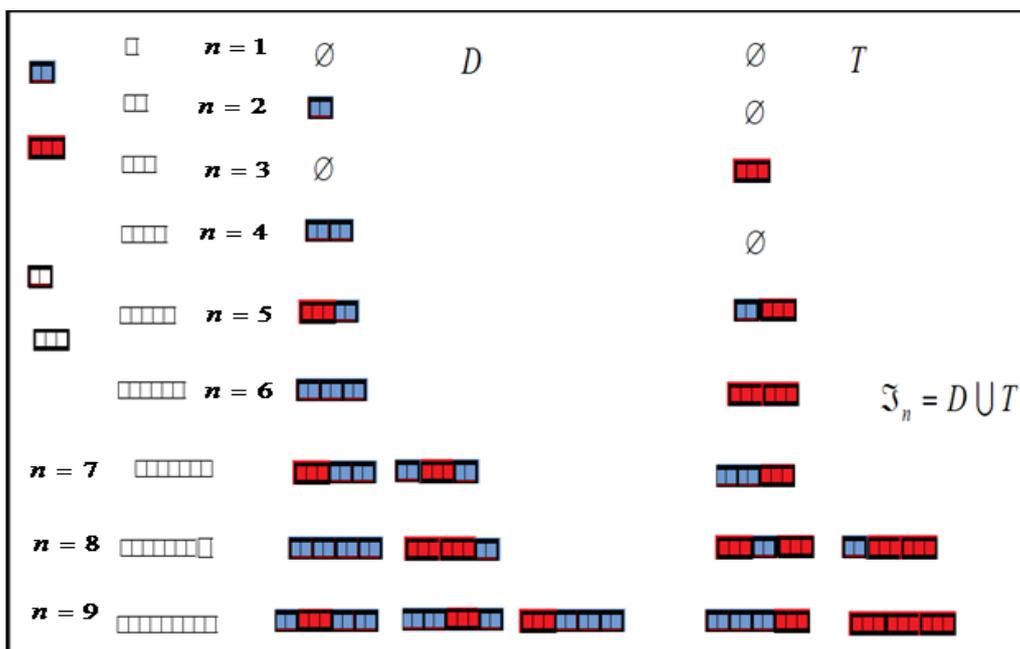


FIGURA 3: Visualização de casos particulares e Tabuleiro 2D, na demonstração do Teorema que corresponde com propriedades da sequência de Padovan
 FONTE: Elaborado pelo autor.

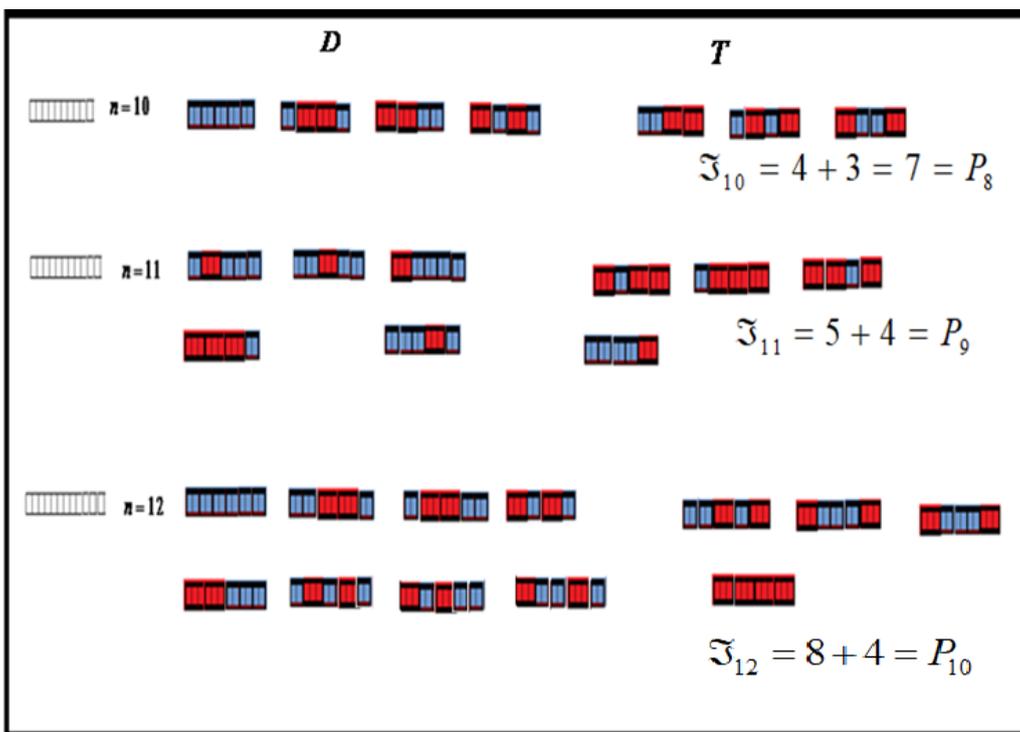


FIGURA 4: Visualização de casos particulares Tabuleiro 2D, na demonstração do Teorema que corresponde com propriedades da sequência de Padovan
 FONTE: Elaborado pelo autor.

2. Visualização de Tabuleiro 2D/3D e o exemplo da sequência de Mersenne

Consultando o Quadro 1, podemos verificar que a sequência de Mersenne, em sua forma homogênea, sem a presença de constantes é determinada por uma relação não homogênea, com a presença de constantes. De fato, vamos considerar a relação de recorrência $M_{n+1} = 2M_n + 1$, com valores iniciais definidos por $M_0 = 0, M_1 = 1$ e que correspondem com a sequência homogênea indicada na definição 1, vamos determinar algumas regras visando o preenchimento de um Tabuleiro de ordem $1 \times n$, com quadrados  (na cor rosa) e com quadrados  (na cor verde).

Na Figura 5 exemplificamos os casos particulares $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Em seguida, definiremos o termo m_n que designa a quantidade total de formas de preencher um Tabuleiro de comprimento n . Para efeito de nossa correspondência, definiremos preliminarmente que $m_0 = 0$ e $m_1 = 1$. Ademais, estabeleceremos as seguintes regras:

a) Em todo ladrilho deve ocorrer ao menos um quadrado (na cor branca) na célula de maior ordem (isto é, sempre à direita do Tabuleiro);

b) Não podem ocorrer ladrilhos que utilizam, ao mesmo tempo, quadrados verde e quadrados rosa, por exemplo, ladrilhos do tipo  ou  não podem ser empregados.

Assim, com amparo visual do diagrama, podemos verificar que $m_0 = 0 = M_0$, $m_1 = 1 = M_1$, $m_2 = 3 = M_2$, $m_3 = 7 = M_3$, $m_4 = 15 = M_4$, $m_5 = 31 = M_5$. Na figura 5 trazemos o caso $n = 6$ que corresponde aos seguintes valores numéricos que correspondem aos elementos $m_6 = 31 + 31 + 1 = 63 = M_6$. A partir das figuras 1 e 2 separamos os ladrilhos em três grupos.

O primeiro grupo de ladrilhos constituído de ladrilhos apenas com quadrados brancos. O segundo grupo com os ladrilhos determinados pelos quadrados na cor verde e na cor rosa. Podemos verificar, nas figuras abaixo, que a quantidade de ladrilhos quadrados na cor verde e na cor rosa sempre coincide.

Nas Figuras 5, 6 e 7 conseguimos comparar múltiplas representações de ladrilhos relacionados ao Tabuleiro e a sequência de Mersenne. Nas Figuras 5 e 6 conseguimos visualizar vários casos e, por intermédio de representações 2D, determinadas propriedades geométricas, aritméticas e algébricas. Por outro lado, quando consideramos apenas a Figura 7, temos a possibilidade de explorar e manipular diversos ângulos de observação, visualização e verificação intuitiva de propriedades. Por exemplo, quando comparamos com as Figuras 5 e 6, visualizamos a configuração de propriedades de simetria que ocorrem na Figura 7, agora, correspondem com suas representações 3D.

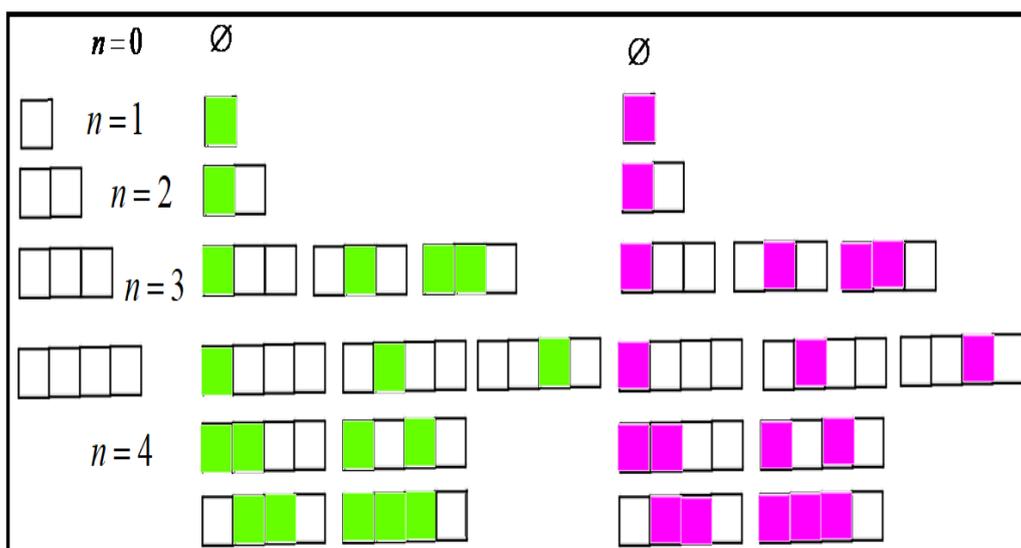


FIGURA 5: Visualização de ladrilhos 2D relacionados com a sequência de Mersenne

FONTE: Elaborado pelo autor.

O primeiro grupo de ladrilhos constituído de ladrilhos apenas com quadrados brancos. O segundo grupo com os ladrilhos determinados pelos quadrados na cor verde e na cor rosa. Podemos verificar, nas figuras abaixo, que a quantidade de ladrilhos quadrados na cor verde e na cor rosa sempre coincide.

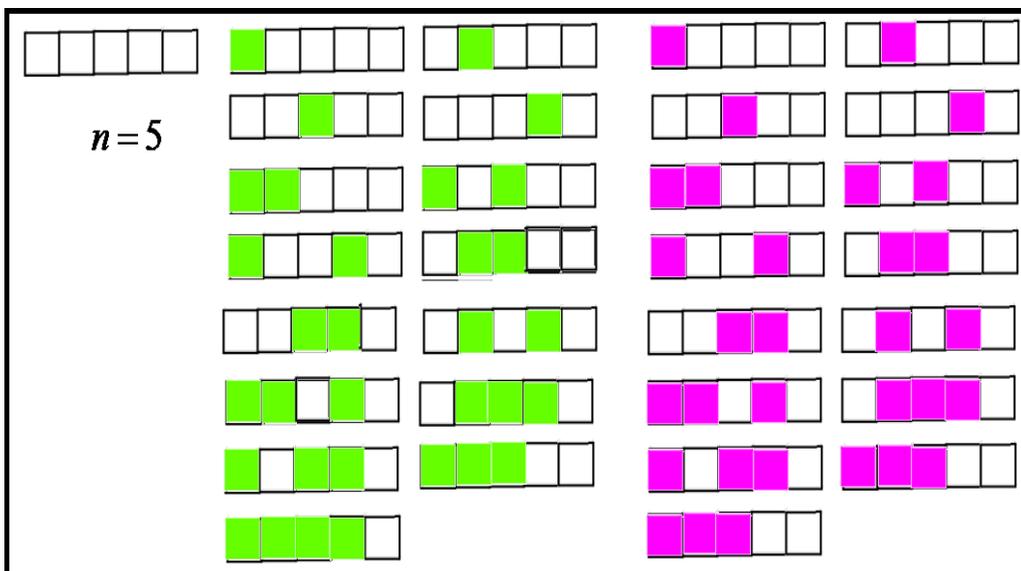


FIGURA 6: Visualização de casos particulares e ladrilhos 2D relacionados com a sequência de Mersenne

FONTE: Elaboração do autor.

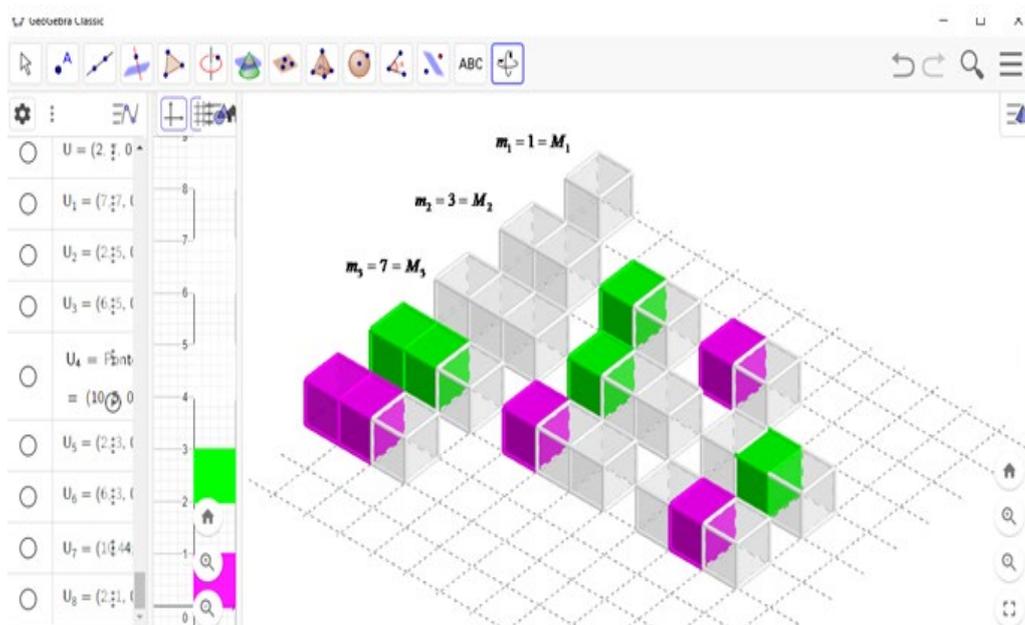


FIGURA 7: Visualização 3D do Tabuleiro e dos ladrilhos relacionados com a sequência de Mersenne por intermédio da exploração do *software* GeoGebra.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Reparemos que podemos estabelecer outra correspondência, afim de determinar uma regra para a descrição do Tabuleiro de Mersenne. Com efeito, no trabalho de Catarino; Campos e Vasco (2016) encontramos as seguintes relações envolvendo o conjunto dos números de Jacobsthal $\{J\}_{n \in \mathbb{N}}$ e de Mersenne $\{M\}_{n \in \mathbb{N}}$. Com efeito, Catarino; Campos e Vasco (2016) estabelecem as relações $3 \cdot J_{2k} = M_{2k}$ (índices pares), $3 \cdot J_{2k+1} - 2 = M_{2k+1}$ (índices ímpares). (**)

Quadro II: Descrição de relações aritméticas entre Jacobsthal e Mersenne.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\{J\}_{n \in \mathbb{N}}$	0	1	3	7	15	31	63	127	255
$\{M\}_{n \in \mathbb{N}}$	0	1	1	3	5	11	21	43	85

Fonte: Elaboração do autor.

Com o interesse de exemplificar o comportamento particular das relações descritas por Catarino; Campos e Vasco (2016), de modo preliminar, vamos definir o termo j_n que designa a quantidade de ladrilhos que conseguimos formar, a partir dos ladrilhos fixados e um Tabuleiro com dimensões $2 \times n$. Neste caso, os ladrilhos são dois dominós 1×2 e 2×1 , respectivamente, além de um quadrado vermelho 2×2 . Na figura abaixo divisamos um Tabuleiro proposto por Koshy (2019). Observamos que o problema aritmético consiste em determinar a quantidade de ladrilhos que formamos com os três ladrilhos fixados na figura 8. O

resultado esperado é uma correspondência numérica com a sequência de Jacobsthal!



FIGURA 8: Visualização 3D do Tabuleiro e dos ladrilhos relacionados com a sequência de Mersenne por intermédio da exploração do *software* GeoGebra.

FONTE: Elaborado pelo autor.

De modo preliminar, no caso $n=0$ vamos fazer corresponder e definir $j_0 = 1$ e, aplicando um procedimento que corresponde, de modo alternado e com a regra indicada em (**). Nesse caso, escreveremos $3 \cdot j_0 - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1 = m_0$. No caso seguinte, para $n=1$, na figura abaixo, divisamos a possibilidade de empregar apenas um domino 1×2 e, empregaremos a regra $3 \cdot j_1 = 3 \cdot 1 = 3 = m_1$. No caso $n=2$, com amparo da figura abaixo, no caso da sequência de Jacobsthal, determinamos a quantidade de ladrilhos $j_2 = 3$ e, segundo a regra (**), vamos determinar que $3 \cdot j_2 - 2 = 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7 = m_2$. Em seguida, para $n=3$, empregaremos o cálculo direto $3 \cdot j_3 = 3 \cdot 5 = 15 = m_3$. Na figura 10, exemplificamos o caso $n=4$ e, de novo, determinaremos por uma inspeção direta dos ladrilhos da figura e contagem que vale a seguinte relação aritmética $3 \cdot j_4 - 2 = 3 \cdot 11 - 2 = 33 - 2 = 31 = m_4$.

Resumidamente, segundo as relações anteriores, conseguimos determinar uma maneira indireta de contagem dos ladrilhos que correspondem com a sequência de Mersenne: $\{M\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \dots\}$.

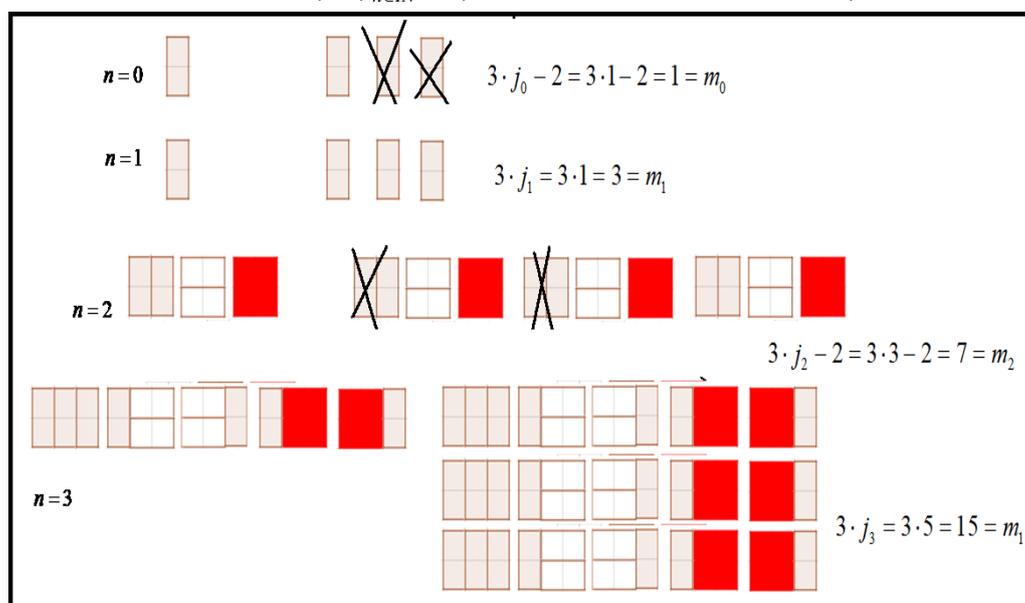


FIGURA 9: Determinação e correspondência aritmética entre a sequência de Jacobsthal e de Mersenne via ladrilhos, para o casos $n = 0, 1, 2, 3$.

FONTE: Elaborado pelo autor.

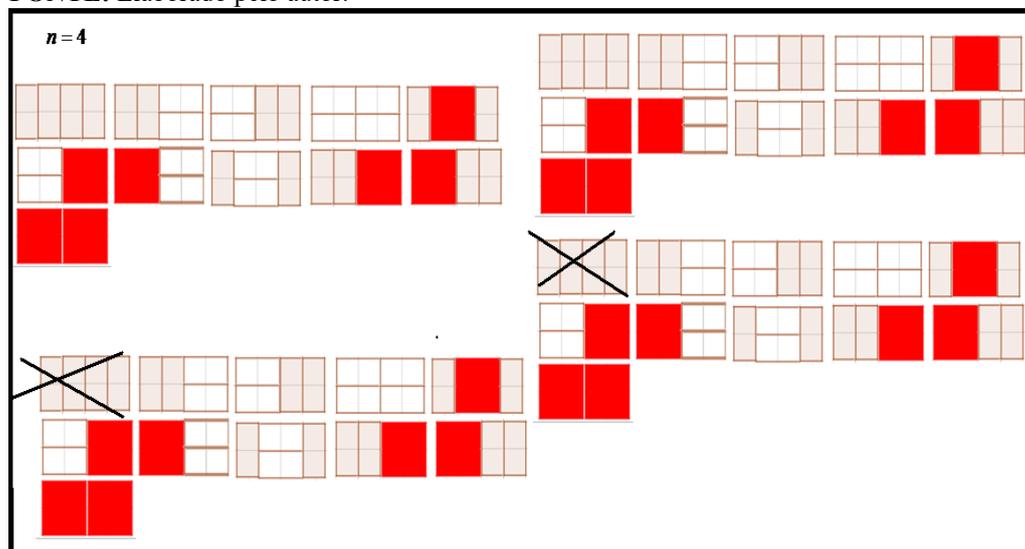


FIGURA 10: Determinação e correspondência aritmética entre a sequência de Jacobsthal e de Mersenne via ladrilhos, para o casos $n = 4$.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Benjamin, Plott e Sellers (2008) abordam a forma de preencher um tabuleiro com os valores correspondentes com a Sequência de Pell que, de modo *standard*, é descrita pela seguinte relação $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ para os valores $P_0 = 0$ $P_1 = 1$. Assim, vamos considerar um quadrado branco \square , um quadrado preto \blacksquare e um dominó na cor cinza \square . Para tanto, os autores denotam $p_0 = 1 = P_1$ que corresponde a nenhum ladrilhamento inicial. Para $p_1 = 2 = P_2$ que corresponde a preencher um 1 – tabuleiro de duas formas, com um quadrado branco e um quadrado preto. Na sequência, para um 2 – tabuleiro, podemos verificar na Figura 2, inclusive os ladrilhamentos para um 3 – Tabuleiro e 4 – tabuleiros que determinam as relações $p_2 = 5 = P_3$, $p_3 = 12 = P_4$ e $p_4 = 29 = P_5$. (ver Figura 2). Com amparo em um argumento combinatório, determinaremos que o respectivo tabuleiro pode estar relacionado a partir do número indicado por $p_n = P_{n+1}$, $n \geq 0$. Na Figura 8 indicamos um Tabuleiro 2D, com dimensões $1 \times n$ e os ladrilhos determinados.

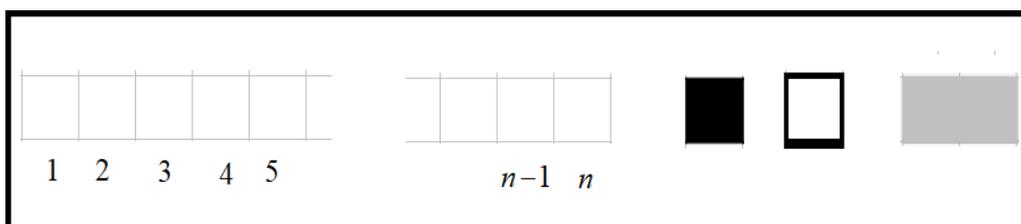


FIGURA 11: Tabuleiro $1 \times n$ e os ladrilhos que correspondem com sequência numérica recorrente de Pell proposto por Benjamin, Plott e Sellers (2008)

FONTE: Adaptado de Benjamin, Plott e Sellers (2008)

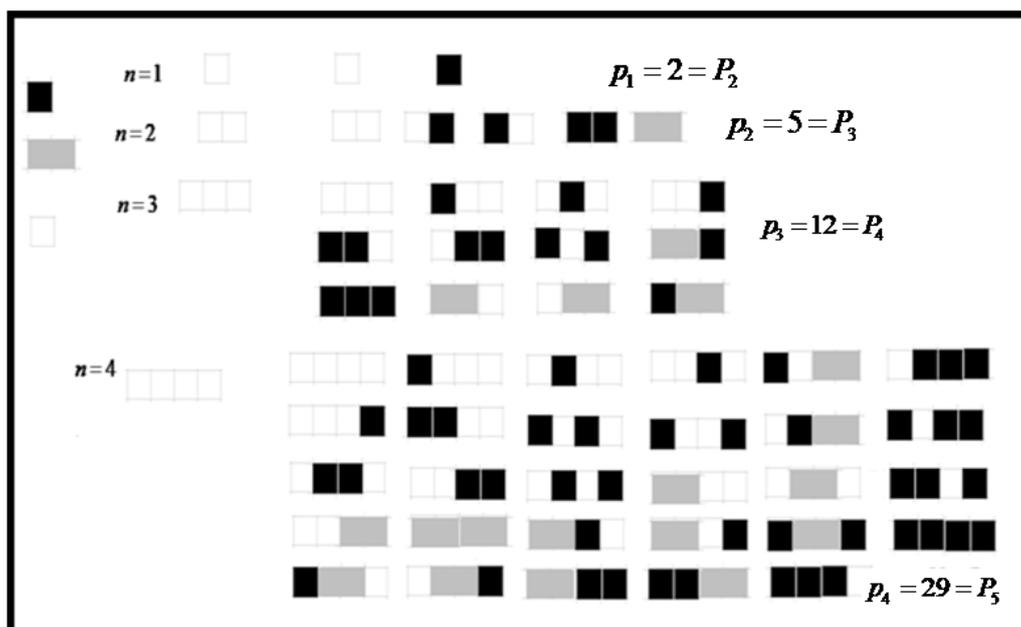


FIGURA 12: Tabuleiro $1 \times n$ e os ladrilhos que correspondem com sequência de Pell proposto por Benjamin, Plott e Sellers (2008).

FONTE: Adaptado de Benjamin, Plott e Sellers (2008)

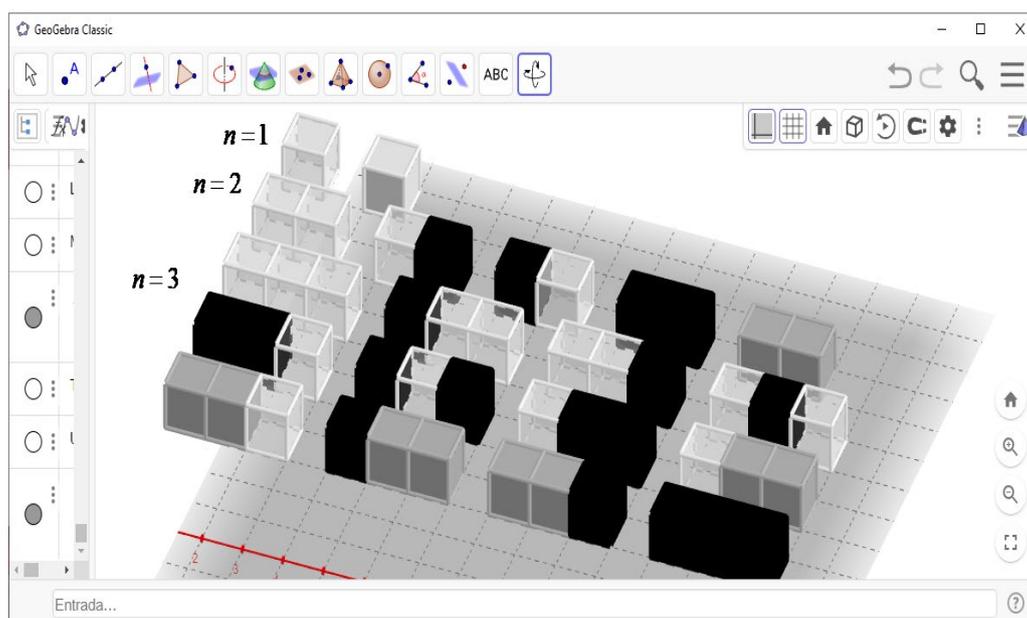


FIGURA 13: Visualização 3D do Tabuleiro e dos ladrilhos relacionados com a sequência de Pell por intermédio da exploração do *software* GeoGebra.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Na Figura 1 identificamos configurações de ladrilhos nos casos $n = 1, 2, 3, 4$. Podemos fazer uma correspondência com o comportamento 2D/3D.

Antes de finalizarmos, iremos considerar a Sequência de Jacobsthal é definida pela seguinte relação de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, e com os valores iniciais indicados por $J_0 = 1, J_1 = 1$. Na figura 11, logo a seguir, conseguimos identificar um Tabuleiro de dimensões $3 \times n$ e, ao lado esquerdo, ficam determinados os ladrilhos de dimensões 1×1 na cor branca, 2×2 na cor vermelha. Mais uma vez poderemos comparar o Tabuleiro 2D, de dimensões $3 \times n$ com o nosso último exemplo que exibimos na Figura 14.

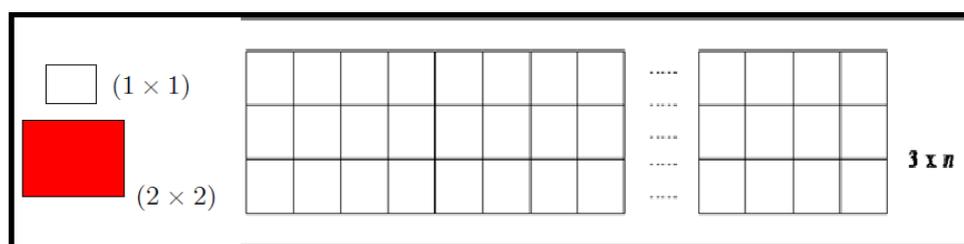


FIGURA 14: Visualização 2D do Tabuleiro e dos ladrilhos relacionados com a sequência de Jacobsthal por intermédio da exploração do *software* GeoGebra.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Na Figura 15 exibimos uma figura 3D que permite compreender a exploração dinâmica e de certas propriedades combinatórias que podem ser exploradas com o recurso ao *software* GeoGebra.

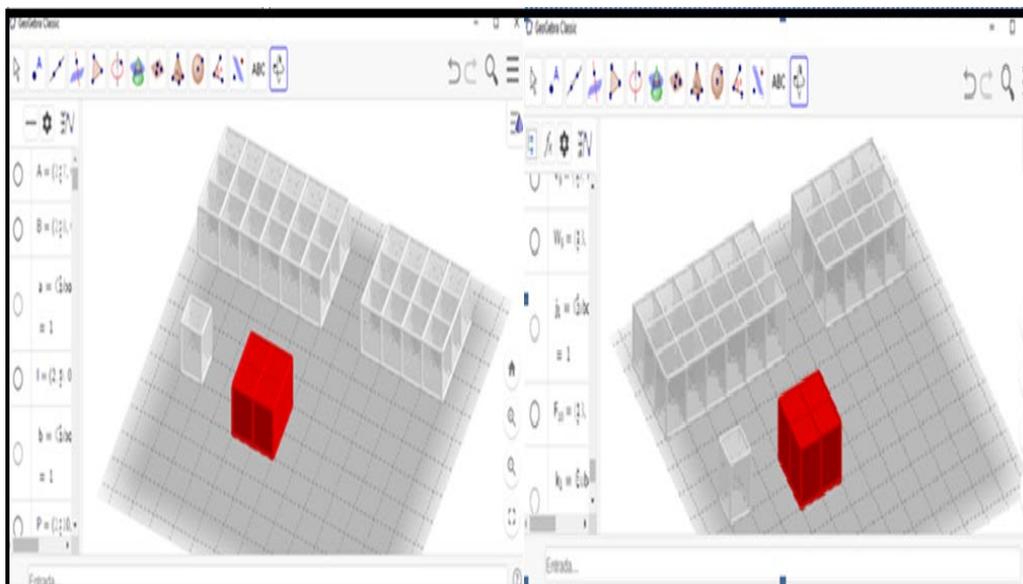


FIGURA 15: Visualização 3D do Tabuleiro e dos ladrilhos relacionados com a sequência de Jacobsthal por intermédio da exploração do *software* GeoGebra.

FONTE: Elaborado pelo autor.

Na Figura 15 podemos verificar alguns ângulos de visualização e de exploração de propriedades do Tabuleiro de Jacobsthal. De imediato, podemos comparar as propriedades dinâmicas do Tabuleiro 3D na Figura 12 com a representação estática da figura 11 e que corresponde ao Tabuleiro 2D da mesma sequência numérica. Podemos observar que a exploração da tecnologia atual, por parte do professor de Matemática, proporcionar vislumbrar cenários de formação de professores que proporcionam a integração de assuntos matemáticos, diante dos avanços de tecnologia atual.

Finalmente, nas Figuras 16 a 17 conseguimos comparar dois modelos teóricos. O primeiro corresponde ao Tabuleiro relacionado com a sequência de Padovan ou de Cordonnier. Na Figura 16 indicamos sua descrição, da maneira como se mostra discutido em um artigo científico de Matemática Pura.

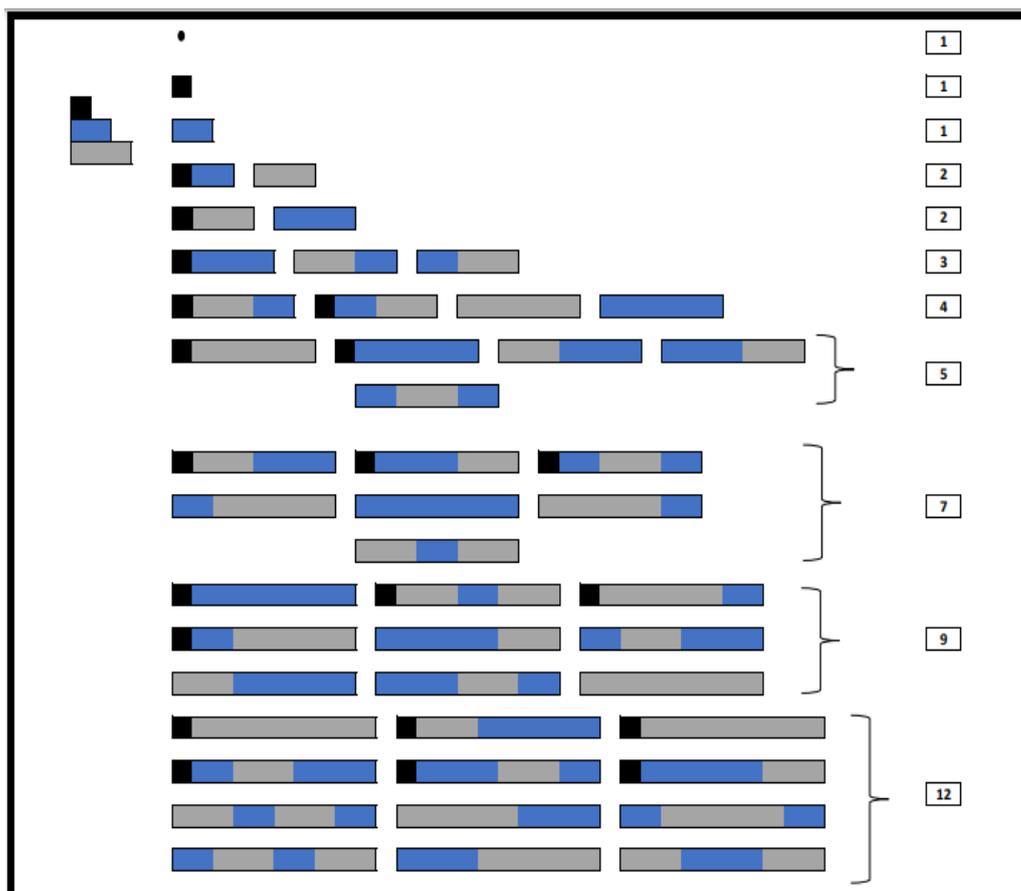


FIGURA 16: Vieira, Alves e Catarino (2023) descrevem o Tabuleiro 2D de Padovan, considerando um interesse pelos resultados e avanços em Matemática Pura.

FONTE: Vieira, Alves e Catarino (2023)

Por outro lado, o segundo modelo didática visa proporcionar um ambiente de investigação e de aprendizagem para professores de Matemática em formação inicial no Brasil. Ao lado esquerdo da Figura 17 vemos a exploração do Tabuleiro 2D, relacionado com a sequência de Fibonacci.

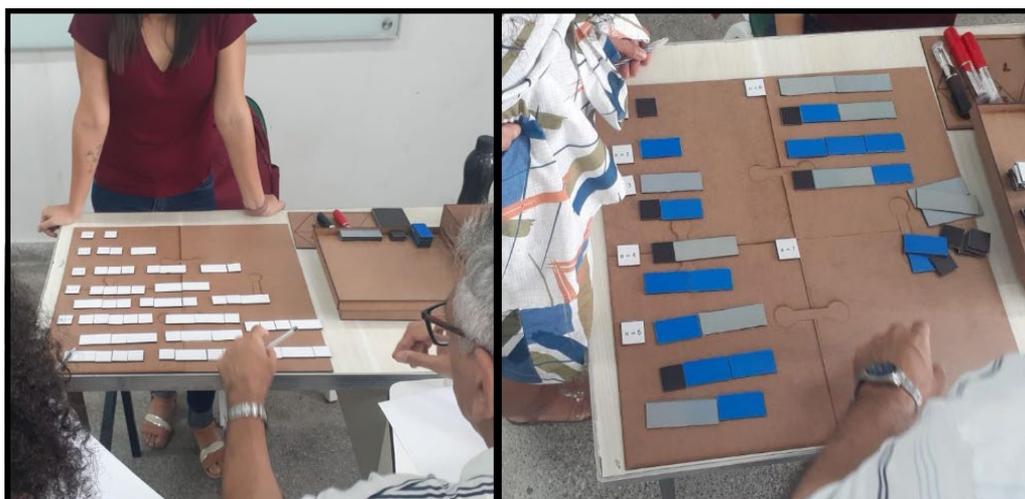


FIGURA 17: Situação didática de investigação matemática em relação a sequência de Fibonacci (ao lado esquerdo) Padovan ou de Cordonnier, com a participação de professores de Matemática no Brasil.

FONTE: Vieira (2024).

A Figura 18 apresentamos uma visualização dos primeiros casos do tabuleiro em 3D da sequência de Padovan ou Cordonnier, vislumbrando por meio do *software* GeoGebra. Desse modo, é possível constatar que para o caso inicial tem-se a presença de um cubo preto. Para o segundo caso, tem-se a presença de dois cubos concatenados azuis, formando o dominó na versão em 2D. Já para o terceiro caso, apresenta-se um cubo preto, concatenado com o dominó azul e o caso do triminó cinza. Os demais casos seguem as combinações visualizadas e apresentadas na figura.

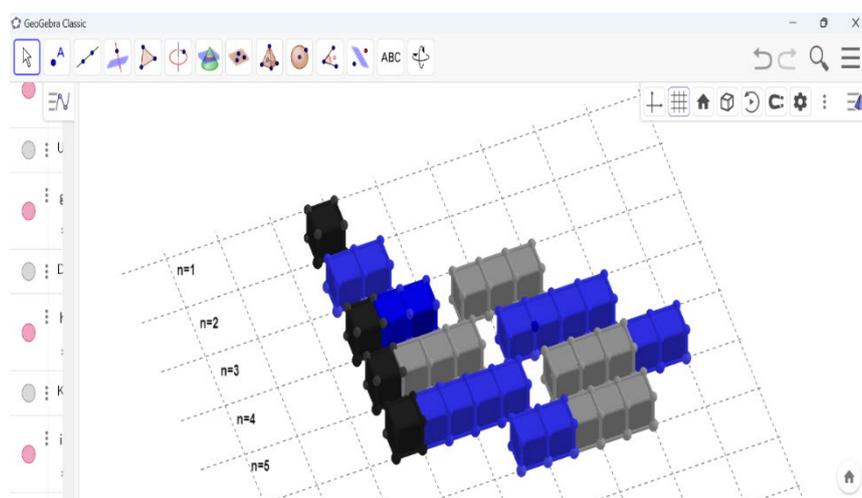


FIGURA 18: Tabuleiro de Padovan ou Cordonnier em 3D.

FONTE: Elaboração do autor.

Considerações Finais

Nas seções passadas discutimos alguns exemplos sobre a relação de sequências numéricas e a noção de Tabuleiro, com ênfase em sua representação 3D proporcionada pelo *software* GeoGebra (BARROS; ALVES; CATARINO; SOUSA, 2024). Observamos que, no Brasil, podemos constatar vários autores de História da Matemática que consideram, de modo restrito, informações e curiosidades originadas e relacionadas com a sequência de Fibonacci (ALVES; VIEIRA; CATARINO, 2023; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2023; ALVES, 2012). Por outro lado, no Quadro 1 indicamos um conjunto ampliado de sequências numéricas recorrentes, cujo conhecimento e a necessidade de um aumento de pesquisa se constitui como um assunto importante para a cultura matemática do professor no Brasil.

Ademais, como indicamos nas seções anteriores, a abordagem combinatória possibilita a introdução de representações inesperadas envolvendo sequências numéricas recorrentes e, em certos casos, como no caso da sequência de Mersenne e da sequência Padovan, sua representação e propriedades via Tabuleiro ocorreram apenas recentemente. Em outros casos, deparamos informações recentes, de modo restrito, apenas no contexto da circulação de artigos científicos de Matemática Pura e que não permitem um acesso maior do professor de Matemático. Para exemplificar, em nossa última figura, trazemos a ilustração de um cenário de aprendizagem envolvendo professor de Matemática e alunos.

A situação envolve busca investigar e descobrir propriedades aritméticas e combinatórias relacionadas com a sequência de Padovan e o Tabuleiro 2D. No cenário de aprendizagem que exibimos na Figura 15 os estudantes e professor de Matemática vivenciam um processo de investigação histórica, por intermédio da compreensão e do funcionamento dos conceitos de natureza aritmética, algébrica e geométrica, com ampla relação com a noção de sequências numéricas recorrentes.

Por fim, indicamos que a exploração do *software* GeoGebra permite explorar múltiplas relações de natureza conceitual, no campo geométrico, aritmético e algébrico. Assim, por intermédio de suas potencialidades dinâmicas e não estáticas, como no caso dos Tabuleiros 2D/3D que exibimos na Figura 1 (Fibonacci e Pell), na Figura 11 (Pell), na Figura 8 (Jacobsthal), ampliamos um cenário de aprendizagem ao professor de Matemática e, conseqüentemente, impulsionamos abordagens diferenciadas e criativas, sobretudo, em sala de aula, como o tema Tabuleiro e sequências numéricas.

No contexto de inspiração de outras pesquisas, alguns aspectos discutidos nas seções predecessoras podem impulsionar uma perspectiva de interface de História da Matemática com a Tecnologia, mediante uma consideração de um

caráter histórico evolutivo relacionado com a noção de sequências recorrentes generalizadas (ALVES; CATARINO; VIEIRA; SPREAFICO, 2023).

Agradecimentos

Agradecemos o apoio e suporte financeiro concedido no Brasil pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, correspondente ao Processo N° 305495/2022-4.

Referências

ALVES, F. R. V. Fórmula De Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci - SGF. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 33, p. 1-16, 2017. <https://doi.org/10.47976/RBHM2017v17n3301-16>

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. Sequência de Padovan ou Coordonier, **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, nº 45, 1 – 23 2022.

ALVES, F. R. V. Propriedades Combinatórias sobre a sequência de Jacobsthal, a noção de tabuleiro e alguns apontamentos históricos. **Revista Cearense de Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1-13, 2022. <https://doi.org/10.56938/rceem.v1i1.3146>

ALVES, F. R. V. História da Matemática: os números figurados 2D/3D. **Revista CONEXÕES, CIÊNCIA e TECNOLOGIA**, v. 6, nº 2, 1 – 20, 2012.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C ; VIEIRA, R. P. M; SPREAFICO, E, V. P. . Combinatorial approach on the recurrence sequences: An evolutionary historical discussion about numerical sequences and the notion of the board. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 19, p. em0775-16, 2024.

ALVES, F. R. V.; SOUSA, R. T. Some elementary combinatory properties and Fibonacci numbers. **Journal of Instructional Mathematics**, v. 4, n. 1, p. 1-16, 2023. <https://doi.org/10.37640/jim.v4i1.1756>

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P.; CATARINO, P. M. C. A note on Telephone Numbers, **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 23, n. 1, p. 195-203, 2023. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2023.29.2.195-203>

BARROS, F. E.; ALVES, F. R. V; CATARINO, P. M. M. C.; SOUSA, R. T.. The construction of figured numbers in GeoGebra software using algebraic properties. **The Montana Math Enthusiast**, v. 21, n. 1, p. 203-224, 2024. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1624>

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. The Fibonacci numbers: exposed more discretely. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 3, p. 182-192, 2003a. <https://doi.org/10.2307/3219319>

- BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. **Proofs that really count: the art of combinatorial proof.**, Washington, DC: Mathematical Association of America. (Dolciani mathematical expositions, n. 27, 2003b).
- BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. Recounting Fibonacci and Lucas Identities. **The College Mathematics Journal**, v. 30, n. 5, p. 359-366, 1999. <https://doi.org/10.2307/2687539>
- BENJAMIN, A. T.; PLOTT, S. S.; SELLERS, J. A. Tiling proofs of recent sum identities involving Pell numbers, **Annals of Combinatorics**, v. 12, n. 3, p. 271-278, 2008. <https://doi.org/10.1007/s00026-008-0350-5>
- BENJAMIN, A. T.; WALTON, D. Counting on Chebyshev polynomials. **Mathematics Magazine**, v. 82, n. 2, p. 117-126, 2009. <https://www.jstor.org/stable/27765885>
- BURTON, D. M. **The history of mathematics: an introduction.** 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2007.
- DOŠLIĆ, T.; PODRUG, L. Tilings of a Honeycomb Strip and Higher Order Fibonacci Numbers, **AirXiv**, v. 25, n. 2, p. 1-22, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.11761>
- DRESDEN, G.; TULSKIKH, M. Tiling a $(2 \times n)$ -Board with Dominos and L-Shaped Trominos, **J. Integer Seq.**, v. 24, 2021. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL24/Dresden2/dresden9.pdf>
- ESTRADA, M. F. et al. **História da Matemática.** Lisboa: Universidade Aberta, 2000.
- EVES, H. **An introduction to the History of Mathematics.** 3. ed. Chicago: Holt, Reinhardt and Wilson ltd, 1969.
- KATZ, V. A **History of Mathematics.** New York: Addison Wesley, 1998.
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications.** 2nd ed. Hoboken: Wiley & Sons. v. 2, 2019.
- KOSHY, T. **Pell and Pell-Lucas numbers with applications.** New York: Springer, 2014.
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications.** New York: Wiley, 2001.
- MONTEIRO, A. C. A. et al. Engenharia didática para o ensino de sequência recursiva: o caso da sequência de Fibonacci. **Revista Contribuicoes a las ciencia sociales**, v. 16, nº 1, 1 – 14, 2023.
- STILLWELL. J. **Mathematics and its history.** New York: Springer, 2010.

TEDFORD, S. J. Combinatorial identities for the Padovan Numbers, **Fibonacci Quarterly**, v. 57, n. 4, p. 291-298, 2019.

VIEIRA, R. P.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. Combinatorial Interpretation of Numbers in the Generalized Padovan Sequence and Some of Its Extensions. **Axioms**, v. 11, n. 11, p. 1- 9, 2023. <https://doi.org/10.3390/axioms11110598>

VIEIRA, R. P. M. **Investigação da Complexificação, Generalização e Modelo Combinatório dos Números de Padovan e Perrin com a Engenharia Didática**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Matemática). Programa de Pós-graduação em Rede Nordeste de Ensino. 2024, 466f.

ZIQIAN, J; DRESDEN, G. Tetranacci Identities via Hexagonal Tilings, **Fibonacci Quarterly**, v. 60, n. 2, p. 99-103, 2022.

Enviado:26/01/2024

Aceito: 30/09/2024