



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p141-154>

Visualização de elementos do Teorema de Ascoli-Arzelà com ferramentas do software GeoGebra¹

Visualization of elements of the Ascoli-Arzelà Theorem with GeoGebra software tools

ANDRÉ LUIZ ARAÚJO DA COSTA²

<https://orcid.org/0000-0003-1155-4204>

FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES³

<https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

RESUMO

A assimilação de conceitos como equicontinuidade e convergência uniforme é desafiadora devido a sua natureza abstrata e à complexa interação entre diferentes parâmetros presentes em suas definições. O objetivo deste artigo é explorar o uso de ferramentas do software GeoGebra na visualização dos conceitos de continuidade e convergência presentes no enunciado do Teorema de Ascoli-Arzelà. A metodologia se baseia no uso das ferramentas de Controle Deslizante e Rastro do software GeoGebra para analisar a variação dos parâmetros presentes nas definições dos conceitos estudados. As técnicas de visualização exploradas são validadas pela sua aplicação em exemplos e contraexemplos de cada conceito apresentado ao longo do texto. Espera-se que as técnicas de visualização apresentadas neste trabalho possam contribuir para o ensino dos conceitos aqui estudados.

Palavras-chave: Teorema de Ascoli-Arzelà; Equicontinuidade; Convergência Uniforme.

ABSTRACT

The assimilation of concepts such as equicontinuity and uniform convergence is challenging due to their abstract nature and the complex interplay between different parameters present in their definitions. The aim of this article is to explore the use of GeoGebra software tools in visualizing the concepts of continuity and convergence present in the statement of the Ascoli-Arzelà Theorem.

¹ O presente trabalho constitui recorte de pesquisa em desenvolvimento no Programa de Doutorado em Ensino - REDE NORDESTE RENOEN, envolvendo a supervisão do segundo autor, que possui financiamento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

² UECE – and.costa@uece.br

³ IFCE – fregis@ifce.edu.br

The methodology is based on using the Tracing and Slider tools of the GeoGebra software to analyze the variation of parameters present in the definitions of the concepts studied. The proposed visualization techniques are validated by its application to examples and counterexamples of each concept presented throughout the text. It is expected that the visualization techniques presented in this work can contribute to the teaching of these concepts.

Keywords: *Ascoli-Arzelà Theorem; Equicontinuity; Uniform Convergence.*

Introdução

As disciplinas de Análise presentes nos cursos de graduação em Matemática trazem um desafio intrínseco, uma vez que os conceitos são apresentados de forma mais rigorosa do que nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, onde a intuição é usada de forma mais ampla. Em sua Tese de Doutorado, Reis (2001) investiga como a relação entre rigor e intuição encontra-se nos manuais didáticos de Cálculo e de Análise e conclui que “[...] refletem uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo uma primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo” (Reis, 2001, p. 195).

A complexidade técnica da linguagem matemática usada em Análise muitas vezes é ocasionada pela tradução de noções topológicas presentes na investigação de certos fenômenos como aproximação e convergência, que nos cursos de Cálculo costumam ser apresentados de forma mais intuitiva. Nesse sentido, Alves (2012) entende que:

Um problema que se evidencia, portanto, nesta “transição” entre as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral - CUV⁴ e a disciplina Análise Real - AR, obrigatória no Brasil, tanto em cursos de licenciatura quanto em bacharelado, diz respeito ao modo idiossincrásico pelo qual o estudante relaciona, ressignifica e traduz conceitos matemáticos no locus do ensino do CUV e, posteriormente, no locus do ensino de AR (Alves, 2012, p. 166).

O maior nível de rigor matemático requerido na disciplina de Análise e a consequente dificuldade na sua aprendizagem tem levantado questionamentos e discussões (Otero-Garcia; Baroni; Martines, 2013, Gomes *et al*, 2015, Moreira; Vianna, 2016) sobre o papel desta disciplina na grade curricular de cursos de Licenciatura em Matemática.

⁴ CUV abrevia a expressão Cálculo em Uma Variável.

Uma alternativa para proporcionar uma melhor aprendizagem nesta disciplina é o uso de artifícios visuais que, além de proporcionar uma conexão entre sentenças matemáticas rigorosas e a noções intuitivas, contribuam para que o estudante desenvolva sua própria representação intuitiva dos conceitos estudados. Pinto e Scheiner (2015) analisam o uso de representações visuais por um estudante de Análise e trazem a seguinte conclusão:

Veja que o recurso visual elaborado por Chris foi suficientemente complexo para gerar componentes do conceito de limite de sequência em diversos contextos. O uso de tal representação para a construção de argumentos formais pode ser experimentado (por exemplo, como faz Chris), abrindo possibilidades para a pesquisa em visualização e ensino da análise matemática (Pinto; Scheiner, 2015, p. 652).

O curso inicial de Análise Real estuda, sob vários aspectos, o conjunto dos números reais e funções cujos domínio e contradomínio são subconjuntos de \mathbb{R} . Sendo assim, muitos conceitos presentes neste curso apresentam uma significação geométrica facilitada uma vez que funções reais de variáveis reais têm seu gráfico contido em \mathbb{R}^2 , fazendo-se natural o apelo geométrico no estudo de Análise. Em um dos livros didáticos mais usados no Brasil para se estudar Análise, Lima (2013) faz um acordo com o leitor: “Utilizaremos, porém, com frequência cada vez maior, a linguagem geométrica segundo a qual nos referimos ao corpo \mathbb{R} como ‘a reta’, diremos ‘ponto’ em vez de ‘número real’[...]” (Lima, 2013, p. 162).

O objetivo deste trabalho é promover a visualização dinâmica dos conceitos de continuidade e convergência que estão presentes nas hipóteses e na tese de uma das versões do Teorema de Ascoli-Arzelà, facilitando assim a compreensão do teorema. Para esse propósito, contaremos principalmente com o *software* GeoGebra e o uso de sua ferramenta Controle Deslizante, fundamental na visualização do que ocorre à medida que mudamos o termo da sequência de funções e o valor da variável.

2. GeoGebra no ensino de Análise e o Teorema de Ascoli-Arzelà

O bom uso do *software* GeoGebra já se mostrou capaz de proporcionar a visualização de vários conceitos presentes na Análise Real como podemos ver nas pesquisas de Alves e Neto (2012), Alves, Fontenele e Lucas (2016), Mazzi (2014), Lacerda *et al* (2020) entre outros.

Mazzi (2014) apresenta um exemplo experimental de como o *software* GeoGebra pode ser usado tanto na visualização e compreensão de ideias matemáticas como na elaboração e refutação de conjecturas, elementos valiosos para o processo de aprendizagem. Nascimento e Esquincalha (2017) construíram o *GeoGebra Book* ‘Mathlets para o Ensino de Cálculo e Análise’ com o intuito de oferecer possibilidades para professores e alunos dessas disciplinas. Nesta ocasião, foram dispostos *mathlets* na plataforma *on-line* do *software* GeoGebra contemplando vários assuntos de Análise como limites, derivadas e integrais.

Sobre o conteúdo específico de seqüências de funções, a única pesquisa encontrada em português que contemplava a visualização com o arrimo do *software* GeoGebra foi a de Alves, Fontenele e Lucas (2016), que teve enfoque na visualização do fenômeno de convergência de seqüências de funções.

O Teorema de Ascoli-Arzelà pode ser enunciado de várias formas, algumas delas mais gerais que outras. Vamos considerar o seguinte enunciado:

Teorema 1. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções contínuas $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente equicontínua e uniformemente limitada, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(f_{n'})_{n' \in \mathbb{N}'}$ uniformemente convergente.

Na obra de Lima (2013), uma versão um pouco mais geral (que considera uma seqüência de funções equicontínuas definidas sobre um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ qualquer) se situa na seção intitulada ‘Equicontinuidade’, no início da qual Lima ressalta que:

Nosso objetivo agora é determinar sob que condições a respeito de um conjunto E de funções contínuas (todas com o mesmo domínio) pode-se garantir que qualquer seqüência com termos $f_n \in E$ possui uma subsequência uniformemente convergente. Este tipo de questão ocorre com certa frequência em Análise: basta citar o Cálculo das Variações, a Teoria das Equações Diferenciais e as Funções de uma Variável Complexa (Lima, 2013, p. 405).

A versão de Teorema de Ascoli-Arzelà adotada neste trabalho se justifica pelo fato de que o gráfico de uma função contínua é conexo quando seu domínio é um intervalo fechado, o que contribui para uma melhor visualização. Além disso, a versão que utilizamos impõe a condição de ‘equicontinuidade uniforme’, o que não enfraquece nosso enunciado uma vez que, desde que $K \subset \mathbb{R}$ seja compacto, “[...]Todo conjunto equicontínuo de funções $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente equicontínuo” (Lima, 2013, p. 409).

3. Conceitos de continuidade

Nesta seção abordaremos os conceitos de continuidade, equicontinuidade e equicontinuidade uniforme. Como artifício visual para a apreciação destas propriedades, definiremos o conceito de ε -retângulo de uma função em um ponto do seu domínio, o que pode ser visualizado com o arrimo no *software* GeoGebra e serve como uma tradução visual para as definições de continuidade estudadas.

O conceito de continuidade foi bastante desenvolvido no século XIX quando, por exemplo, Cauchy formulou uma definição de continuidade utilizando noções de infinitésimos:

Em outras palavras, a função $f(x)$ permanecerá contínua com respeito a x dentro dos limites dados se, dentro desses limites, um acréscimo infinitamente pequeno da variável sempre produz um acréscimo infinitamente pequeno da própria função (Bottazini, 1986, p. 105).

Vamos visualizar a definição de continuidade no contexto do teorema:

Definição 1. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua em** $p \in [a, b]$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta$ implica $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Esta definição nos diz que f é contínua em p se, para todo $\varepsilon > 0$, é possível escolher $\delta > 0$ de modo que o pedaço do gráfico de f que fica sobre o intervalo $(p - \delta, p + \delta)$ esteja no retângulo $(p - \delta, p + \delta) \times (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$.

Ao longo deste trabalho um retângulo qualquer que cumpra a condição acima para um valor de ε dado será chamado um **ε -retângulo de f em p** . Assim, a função f é contínua em p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um ε -retângulo de f em p .

Na figura 1, observamos que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ se $x < 1$ e $f(x) = x + 1$ se $x \geq 1$ não é contínua em $p = 1$, pois para valores de ε menores que 1 não é possível obter um ε -retângulo de f em $p = 1$.

Ao inserir ' ε ' na caixa de entrada do *software* GeoGebra, cria-se um Controle Deslizante sobre o valor de ε . O mesmo procedimento pode ser feito com δ . Como $f(1) = 2$, buscamos construir um ε -retângulo de f em $p = 1$ considerando o polígono formado pelos pontos $A = (1 + \delta, 2 + \varepsilon)$, $B = (1 + \delta, 2 - \varepsilon)$, $C = (1 - \delta, 2 - \varepsilon)$ e $D = (1 - \delta, 2 + \varepsilon)$. Então, percebemos que ao estabelecer um valor de ε menor que 1 (o que pode ser feito de forma dinâmica com o Controle Deslizante), sempre existirão pontos do gráfico de f que estão sobre o intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$ mas estão fora do retângulo $(1 - \delta, 1 + \delta) \times (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$, determinado pelos

pontos A , B , C e D , para qualquer valor de δ (condição verificada ao variar o valor de δ com o controle deslizante). O *applet* usado para a visualização deste exemplo está disponível na plataforma *on-line* do *software* GeoGebra⁵, onde pode ser explorado com mais detalhes.

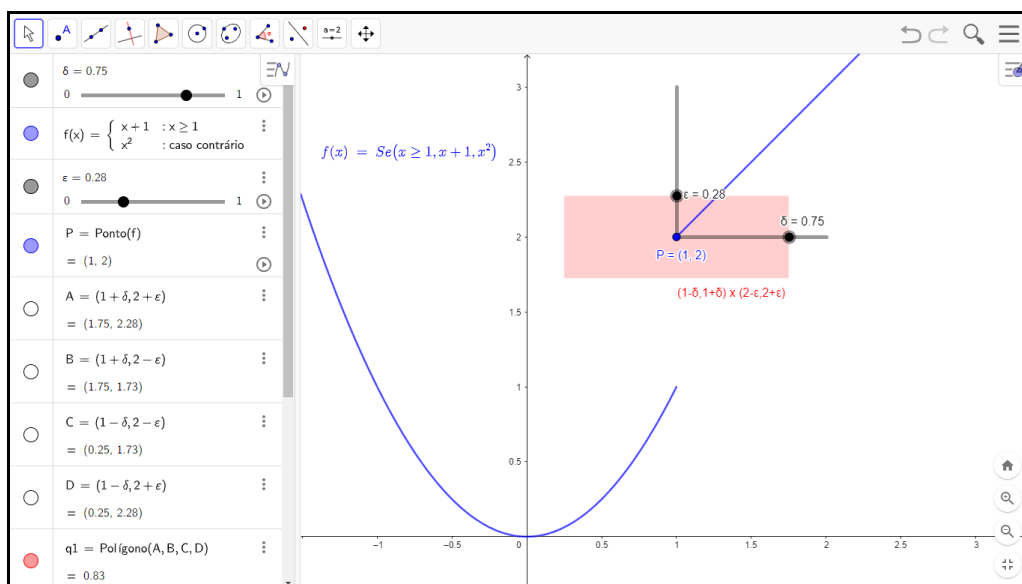


FIGURA 1: Gráfico de uma função descontínua

FONTE: Elaboração dos autores

Na definição de continuidade, o valor de δ depende do ε pré-fixado e do ponto p . No caso de uma sequência de funções contínuas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, fixados $\varepsilon > 0$ e $p \in [a, b]$, o valor de δ pode ser diferente para cada função f_n . Nesse contexto, a condição de equicontinuidade é mais rígida uma vez que o valor de δ associado a p é unicamente determinado pelo valor de ε .

Definição 2. Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **equicontínua em p** se, para todo $\varepsilon > 0$ pré-fixado, existe $\delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(p)| < \varepsilon$, qualquer que seja $f_n \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Assim, a continuidade de todas as funções f_n em p leva à escolha do mesmo valor de δ para cada $\varepsilon > 0$ pré-fixado.

⁵ <https://www.geogebra.org/m/kpxrffkj>

Na visualização da condição de equicontinuidade no exemplo a seguir, observamos que as dimensões de um ε -retângulo de f_n em p podem ser as mesmas para todas as funções f_n , podendo mudar somente quando mudamos o ponto p .

Na figura 2 consideramos a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^n$ e podemos ver que as dimensões de ε -retângulos de f_n em $p = 1$ para $\varepsilon = 0,5$ variam com n uma vez que, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon + 1} - 1$ e obter um ε -retângulo de f_n em $p = 1$ com a maior base possível. Portanto, a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é equicontínua em $p = 1$.

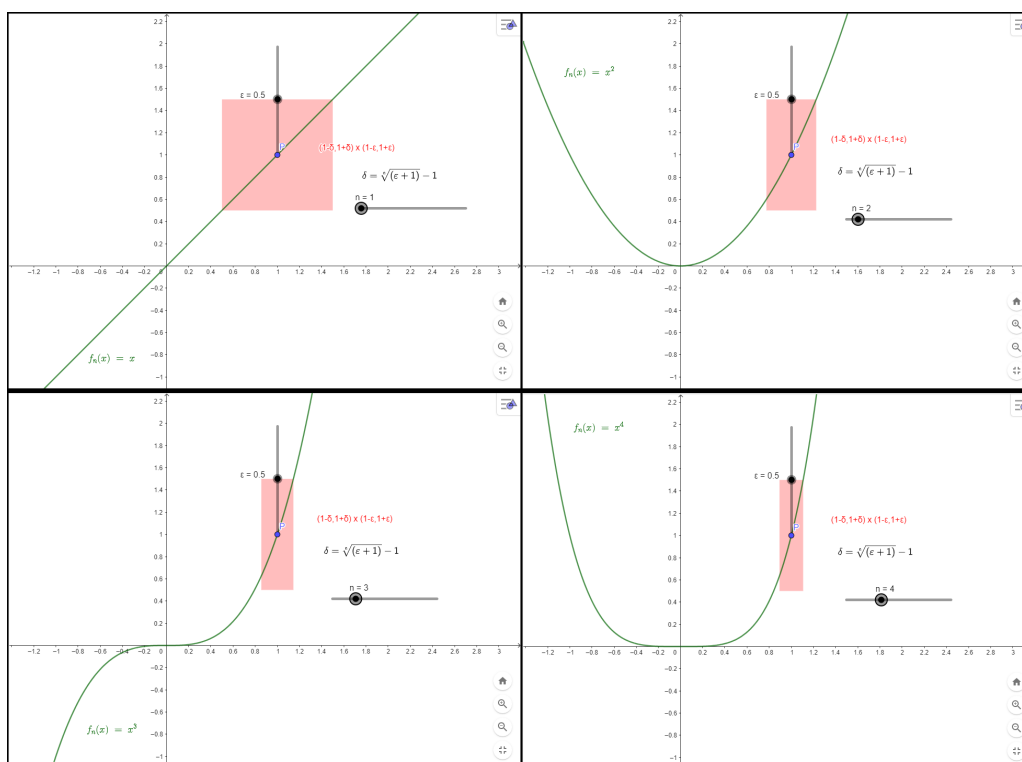


FIGURA 2: Variação do ε -retângulo de f_n em $p = 1$

FONTE: Elaboração dos autores

Ao inserir ' $f_n(x) = x^n$ ' na caixa de entrada do *software* GeoGebra, cria-se um Controle Deslizante sobre o valor de n . Ao clicar com o botão direito do *mouse* no gráfico obtido e habilitar o botão 'Exibir Rastro' e mover o Controle Deslizante para o valor de n , podemos ver a progressão da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Após criar um Controle Deslizante para o valor de ε e definir $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon + 1} - 1$, construímos um ε -retângulo de f_n em $p = 1$ definindo o polígono formado pelos pontos $A = (1 + \delta, 1 + \varepsilon)$, $B = (1 + \delta, 1 - \varepsilon)$, $C = (1 - \delta, 1 - \varepsilon)$ e $D = (1 - \delta, 1 + \varepsilon)$, uma vez que $f_n(1) = 1$ para todo n . O *applet* usado para a visualização deste exemplo está

disponível na plataforma *on-line* do software GeoGebra⁶, onde pode ser apreciado com mais detalhes.

Agora, ao considerar a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^2 + 1/n$ observamos que esta sequência é equicontínua em todo $p \in \mathbb{R}$ uma vez que, fixado $\varepsilon > 0$, é possível obter um ε -retângulo de f_n em p com as mesmas dimensões para todo n , a saber, podemos tomar $\delta = \sqrt{\varepsilon + p^2} - |p|$. Por exemplo, na figura 3 podemos observar como as dimensões do ε -retângulo de f_n em $p = 0$ para $\varepsilon = 0,5$ permanecem as mesmas à medida que o valor de n é alterado com o controle deslizante.

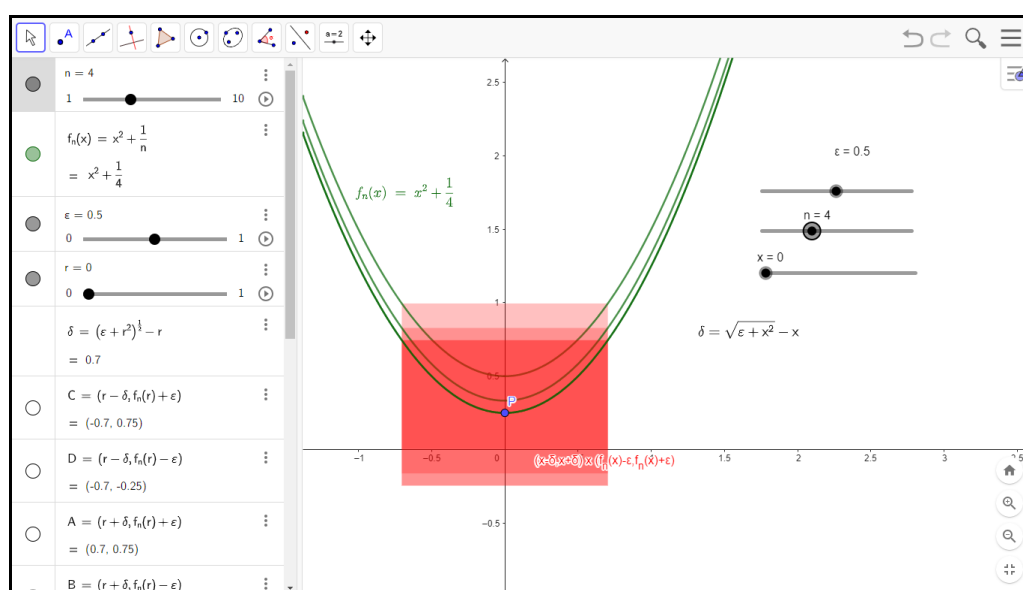


FIGURA 3: Dimensões do ε -retângulo de f_n em $p = 0$ para $\varepsilon = 0,5$

FONTE: Elaboração dos autores

Na condição de equicontinuidade uniforme as dimensões do ε -retângulo de f_n em p podem ser as mesmas, quaisquer que sejam $f_n \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $p \in [a, b]$ pois o valor de δ é unicamente determinado pelo valor de ε e é o mesmo para todo p :

Definição 3. Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **uniformemente equicontínua** se, para todo $\varepsilon > 0$ pré-fixado, existe $\delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(p)| < \varepsilon$, quaisquer que sejam $p \in [a, b]$ e $f_n \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ao considerar a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^2 + 1/n$, podemos observar na figura 4 que se variarmos o ponto p , as dimensões

⁶ <https://www.geogebra.org/m/drboxqn>

do ε -retângulo de f_n em p de maior base possível mudam até mesmo para n fixado. Assim, concluímos que a sequência $f_n(x) = x^2 + 1/n$ é equicontínua em cada ponto p , mas não é uniformemente equicontínua.

Na construção da visualização deste exemplo temos interesse particular na possibilidade de mudar o ponto do gráfico a ser analisado livremente. Com este objetivo, definimos o ponto $P = (r, f_n(r))$ de modo que é criado um Controle Deslizante para o valor de r . Após criar um Controle Deslizante para o valor de ε , definimos $\delta = \sqrt{\varepsilon + r^2} - |r|$. O ε -retângulo de f_n em $(p, f_n(p))$ fica definido pelo polígono de vértices $A = (r + \delta, f_n(r) + \varepsilon)$, $B = (r + \delta, f_n(r) - \varepsilon)$, $C = (r - \delta, f_n(r) - \varepsilon)$ e $D = (r - \delta, f_n(r) + \varepsilon)$. A ferramenta de Rastro pode ser usada para visualizar a mudança nas dimensões desse retângulo ao variar o valor de r . O *applet* usado para a visualização deste exemplo, usado para elaborar as figuras 3 e 4, está disponível na plataforma *on-line* do *software* GeoGebra⁷.

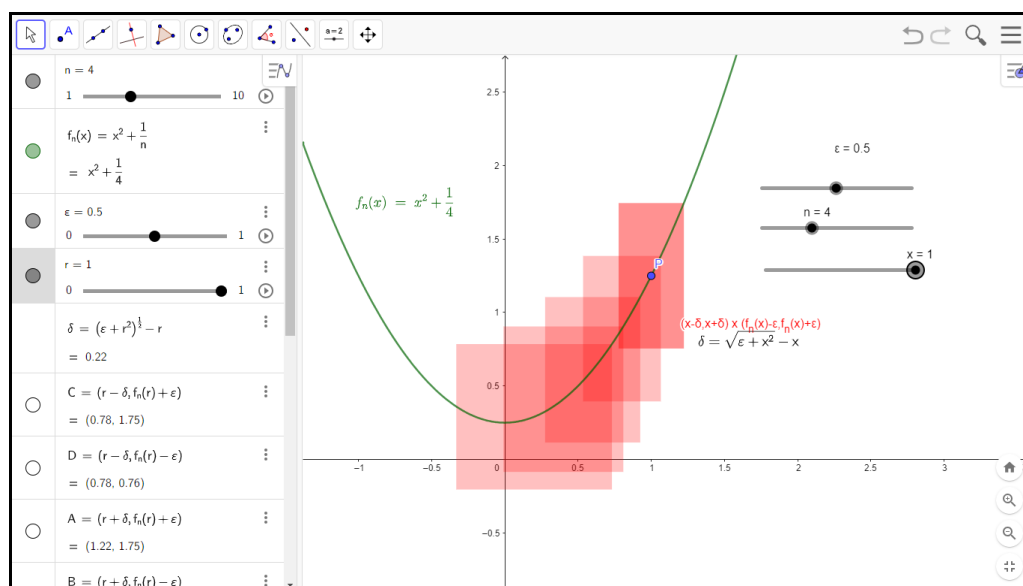


FIGURA 4: Dimensões do ε -retângulo de f_n para $\varepsilon = 0,5$ quando p varia

FONTE: Elaboração dos autores

Se considerarmos a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x + 1/n$, podemos observar que as dimensões dos ε -retângulos de f_n em p podem ser preservadas ao variar n - e portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua em todo p - e também ao variar p - e portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente equicontínua (veja figura 5).

⁷ <https://www.geogebra.org/m/dsqbaffs>

O processo de construção da visualização deste exemplo é realizado de forma análoga ao descrito anteriormente. Destacamos apenas que, neste exemplo, tomamos simplesmente $\delta = \varepsilon$, o que ocasiona a preservação das dimensões dos ε -retângulos obtidos. O *applet* usado para a visualização deste exemplo está disponível na plataforma *on-line* do *software* GeoGebra⁸.

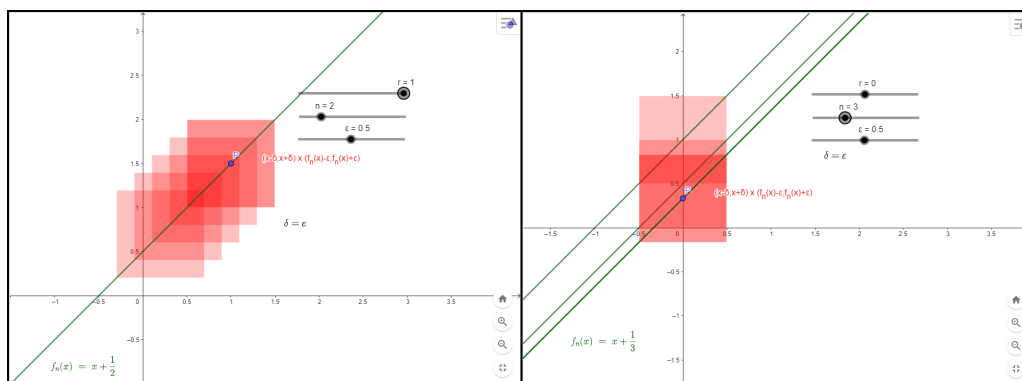


FIGURA 5: Dimensões do ε -retângulo de f_n para $\varepsilon = 0,5$ quando p e n variam

FONTE: Elaboração dos autores

Note que, no caso em que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uniformemente equicontínua, é conveniente usar a nomenclatura simplificada de **ε -retângulo da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$** uma vez que as dimensões dos ε -retângulos de f_n em p podem ser preservadas ao variar tanto n como p . Além disso, é importante lembrar que toda sequência equicontínua $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sempre será uniformemente equicontínua uma vez que seu domínio é um conjunto compacto.

4. A convergência uniforme

A noção de convergência uniforme foi inicialmente estudada no contexto de séries de funções e faz parte de uma das discussões mais controversas na história da Análise Matemática sobre o conceito de convergência usado por Cauchy em um de seus teoremas (Gray, 2015).

Nesta seção trabalharemos o conceito de convergência uniforme que está presente na conclusão do Teorema de Ascoli-Arzelà. Para este propósito definiremos o conceito de ε -faixa de uma função e, com o intuito de realizar uma comparação, trabalharemos o conceito de convergência pontual para o qual desenvolvemos o artifício visual denominado aqui por ε -segmento de uma função em um ponto.

⁸ <https://www.geogebra.org/m/gjtctxg9>

Definição 4. Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformemente** para f se, para quaisquer $x \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

A condição de convergência uniforme pode ser visualizada da seguinte forma: dado $\varepsilon > 0$, considera-se a ε -faixa de f , definida por $\{(x, y) : x \in [a, b], f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}$. Então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá uniformemente para f se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, o gráfico de f_n esteja totalmente contido na ε -faixa de f .

Outro conceito de convergência que não está presente na conclusão do Teorema de Ascoli-Arzelà mas que é muito importante é o de convergência pontual:

Definição 5. Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge pontualmente** para f se a sequência numérica $(f_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(p)$ para todo $p \in D_f$. Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$, para cada $p \in D_f$ existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(p) - f(p)| < \varepsilon$, para todo $n > n_p$.

A condição de convergência pontual pode ser visualizada da seguinte maneira: dado $\varepsilon > 0$, para cada $p \in D_f$ considera-se o ε -segmento de f em p , definido por $\{(p, y) : f(p) - \varepsilon < y < f(p) + \varepsilon\}$. Então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá pontualmente para f se existir $n_p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_p$, o ponto $(p, f_n(p))$ esteja contido no ε -segmento de f em p . Note que a união dos ε -segmentos de f compõe a ε -faixa de f .

Por exemplo, sabemos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^n$ converge pontualmente para de função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$, uma vez que é conhecido que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 sempre que $|a| < 1$ (Lima, 2013, p. 112). No entanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente uma vez que o gráfico de nenhuma f_n não está inteiramente contido numa ε -faixa de f para ε suficientemente pequeno, como pode ser visto na figura 6.

Como o gráfico da função limite f tem duas componentes conexas, fato que decorre da descontinuidade de f , a ε -faixa de f foi construída em duas etapas. Uma das componentes do gráfico de f é o conjunto $[0, 1) \times \{0\}$, então consideramos o interior do polígono de vértices $A = (0, \varepsilon)$, $B = (0, -\varepsilon)$, $C = (1, \varepsilon)$ e $D = (1, -\varepsilon)$. Quanto à outra componente, o ponto $(1, 1)$, consideramos o segmento EF determinado pelos pontos $E = (1, 1 + \varepsilon)$ e $F = (1, 1 - \varepsilon)$. Ao variar os valores de ε e n com o Controle Deslizante, podemos concluir que a convergência da sequência

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para a função f não é uniforme, pois existirão pontos do gráfico de f_n fora da ε -faixa de f quando ε for suficientemente pequeno.

Quanto à convergência pontual, definimos o ponto $P = (r, f_n(r))$ juntamente com um Controle Deslizante para o valor de r . Fixados os valores de ε e de r , movemos o Controle Deslizante do valor de n para um valor grande suficiente até que observe-se que o ponto $(r, f_n(r))$ esteja na ε -faixa de f . Note que o valor de n buscado pode ser muito alto, o que pode requerer uma edição no intervalo do Controle Deslizante para o valor de n e, em alguns casos, dificultar a visualização da convergência pontual. O *applet* usado para a visualização deste exemplo está disponível na plataforma *on-line* do *software* GeoGebra⁹.

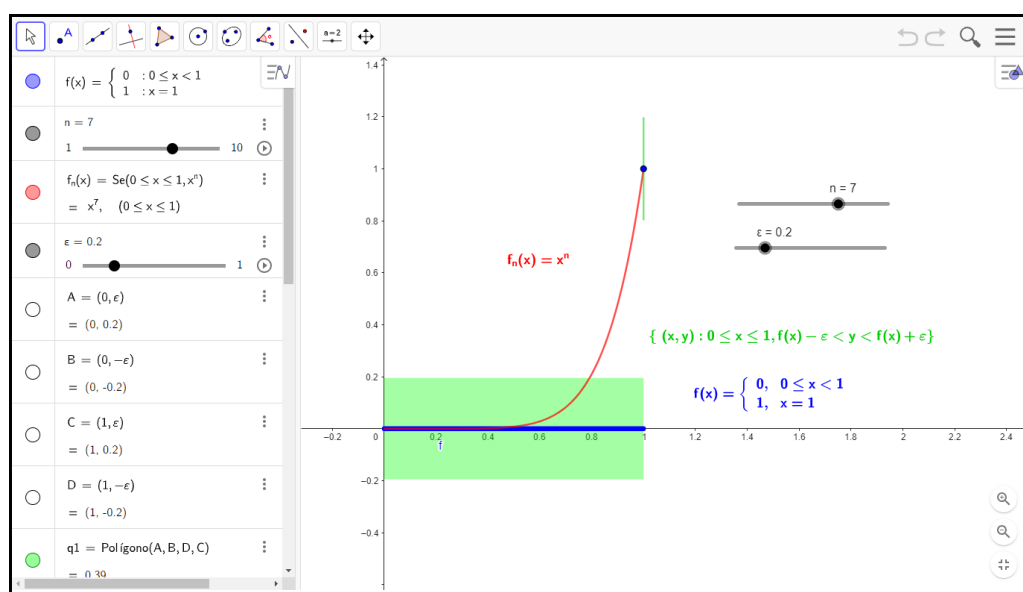


FIGURA 6: Gráfico de f_n não contido em ε -faixa de f

FONTE: Elaboração dos autores

Considerações finais

A exploração realizada neste trabalho proporciona uma conexão entre as sentenças matemáticas rigorosas que definem as condições de equicontinuidade e convergência e a intuição geométrica. Vale ressaltar que em nossas pesquisas não encontramos uma aplicação do *software* GeoGebra para a visualização de condições como equicontinuidade e equicontinuidade uniforme de funções, elementos fundamentais no enunciado do Teorema de Ascoli-Arzelà. Nessa perspectiva, construímos os conceitos de ε -retângulo, ε -segmento e ε -faixa de uma função que

⁹ <https://www.geogebra.org/m/uzxf2xuc>

facilitam a linguagem utilizada na transição entre escrita matemática e apelo geométrico uma vez que estes artifícios trazem uma visualização geométrica da complexa relação entre diferentes parâmetros presentes nas definições dos conceitos estudados.

A possibilidade da visualização de fenômenos de equicontinuidade e convergência uniforme, cujas definições apresentam elevado grau de rigor técnico, exibidos na sequência de exemplos apresentada revela o potencial das ferramentas do *software* GeoGebra como artifícios a serem utilizados no ensino de Análise Real. Além disso, observamos que a percepção visual proporcionada pelas ferramentas de Rastro e Controle Deslizante tem sua importância também no que diz respeito à terminologia das definições estudadas. Por exemplo, na equicontinuidade uniforme é possível observar que as dimensões dos ε -retângulos de f_n em p são as mesmas quaisquer que sejam de n e p , proporcionando assim a percepção visual da condição de uniformidade.

Os exemplos e contraexemplos apresentados foram escolhidos de modo que a abordagem dos conceitos estudados fosse validada, uma vez que nos propomos a visualizar o que ocorre quando as condições de continuidade, equicontinuidade, equicontinuidade uniforme e convergência uniforme não são satisfeitas.

Referências

ALVES, F. R. V. Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, n. 1, p. 165-179, 2012.

ALVES, F. R. V.; NETO, H. B. Interpretação geométrica de definições e teoremas: o caso da Análise Real. *In*: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, Montevideu. **Anais...** Montevideu: Editora Universitária, 2012. p. 322-329.

ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F.; LUCAS, C. M. do N. Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com apoio do Geogebra: convergência de funções. **Essentia**: Revista de Cultura, Ciência e Tecnologia, Sobral, v. 17, n. 2, p. 112-137, jun. 2016.

BOTTAZINI, U. **The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer Verlag, 1986.

GRAY, J. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**. New York: Springer Verlag, 2015.

GOMES, D. O. et al. Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 29, n. 53, p. 1242-1267, 2015.

LACERDA, G. K. S. et al. A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 2, p. 35-51, 2020.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, v. 1, 14.ed., 2013.

MAZZI, L. C. **Experimentação com o GeoGebra**: revisitando alguns conceitos da análise real. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2014.

MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e Matemáticos. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 30, n. 55, p. 515-534, 2016.

NASCIMENTO, A. G. C., ESQUINCALHA, A. C. Construção de um GeoGebra Book para estudo de Cálculo e Análise. *In*: SEMINÁRIO DE PESQUISA “DESENVOLVIMENTO CURRICULAR, FORMAÇÃO DE PROFESSORES E TECNOLOGIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA”, 1., 2017, Santo Antônio de Pádua. **Anais...** Santo Antônio de Pádua: PROPPI/UFF, 2017. p. 52-56.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S.; MARTINES, P. T. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 692-717, 2013.

PINTO, M. M.; SCHEINER, T. Visualização e ensino de Análise Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 638-654, 2015.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

Enviado: 18/03/2024

Aceito: 16/06/2024