



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p065-084>

## Visualização geométrica em lixeiras

### Geometric visualization in trash bins

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS<sup>1</sup>

<https://orcid.org/0000-0001-6876-1461>

#### RESUMO

*Neste trabalho, trazemos uma pesquisa qualitativa de cunho teórico que teve por objetivo analisar imagens de lixeiras vistas e fotografadas em um ambiente de uma cidade do estado do Rio Grande do Sul. Em tais objetos concretos do mundo real, o investigador constatou representações de entes envolvendo formas geométricas, as quais podem ser exploradas para o ensino e a aprendizagem de Geometria. A análise desses objetos foi conectada àqueles constantes da literatura matemática, os quais fazem parte dos Currículos dos Cursos. Metodologicamente, trata-se de uma investigação em que recorreremos ao software GeoGebra para possibilitar que os aspectos visualizados de forma intuitiva pelo observador-pesquisador pudessem ser confirmados possibilitando registros que facilitariam o processo de compreensão e formalização de certos conceitos envolvidos. Concluímos que habilidades visuais podem proporcionar o desenvolvimento de pensamento visual.*

**Palavras-chave:** geometria, visualização, criatividade, GeoGebra.

#### ABSTRACT

*The abstract in this paper work we are bringing a qualitative and theoretical research that aimed to analyze photographed images seen of trash bins viewed in an environment in a city in the state of Rio Grande do Sul. In such concrete objects from the real world, the researcher found representative forms of geometric entities involving shapes and that can be explored for teaching and learning of Geometry. The analysis of these objects was connected to the objects contained in the literature and which are part of course curricular. Methodologically, this is a theoretical investigation in which the GeoGebra software was used to enable the aspects visualized intuitively by the observer-researcher to be confirmed and, thus, enabling records that would facilitate the process of understanding and formalizing certain concepts involved. We conclude that visual skills can provide the development of visual thinking.*

**Key-words:** geometry, visualization, creativity, GeoGebra.

## Introdução

É frequente encontrar-se em textos de Matemática e de Educação Matemática, bem como escutar-se em interlocuções entre pessoas, que a Geometria se encontra

---

<sup>1</sup> Universidade Franciscana – UFN – leivasjc@gmail.com

em toda parte. No entanto, o que se observa em livros didáticos, em livros clássicos da literatura, são apenas algumas indicações de representações de figuras geométricas ou de formas espaciais, sem maiores direcionamentos a outras situações que não sejam fachadas de construções civis ou embalagens, com pouca criatividade.

As pesquisas do autor do artigo têm se dirigido para a visualização de situações que possam ser associadas à elementos geométricos de pouca exploração didática, como, por exemplo, superfícies cônicas, paraboloides, esferas etc., as quais podem ser encontradas em ambientes urbanos e elaboradas por jardineiros em arbustos. Ao analisar tais representações e associá-las aos devidos registros algébricos, com auxílio de recursos como os do GeoGebra, os conceitos envolvidos deixam de estar no âmbito exclusivo de uma matemática formal para se tornarem algo ao alcance, especialmente, daqueles que estão no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática e, em especial, de Geometria.

Temos observado que conceitos como parabolóide, hiperbolóide, elipsoide, dentre outros, geralmente não despertam a curiosidade e a criatividade de estudantes de nível superior, em particular, uma vez que tais noções são formalmente trabalhadas, nesse nível, por meio de fórmulas e definições, sem associar a objetos concretos. De forma similar, isso ocorre ao se vislumbrar o formato de fios de energia que vão ficando em forma de arcos, os quais costumam ser expressos como se formassem parábolas, o que, na realidade, não atende ao conceito de parábola, mas de catenária. O mesmo ocorre em relação ao arco formado pela corda na brincadeira de 'pular corda'.

Essas são algumas pequenas observações de como certas situações poderiam servir de motivação e estímulo, particularmente, à Geometria Analítica e ao Cálculo, obviamente, sem falar na própria Geometria em si.

Também, é importante chamar a atenção para o processo criativo em sala de aula, uma vez que, desde pequenas, as crianças sinalizam o possuem no seu desenvolvimento, e isso parece que ocorre desde ingressarem na escola, principalmente. Em níveis mais avançados, isso vai deixando de ser levado em consideração pelo professor em suas proposições de atividades, o que é acentuado no ensino de Matemática/Geometria. O uso de definições prontas e acabadas e a aplicação contínua por meio de fórmulas são empregadas e, em grande parte, sem conexões com a realidade do mundo circundante. Para Ostrower (1977, p.1),

Criar é, basicamente, formar. É poder dar uma forma a algo novo. Em qualquer que seja o campo de atividade, trata-se, nesse "novo", de novas coerências que se estabelecem para a mente humana, fenômenos relacionados de modo novo e compreendidos em termos novos. O ato criador abrange, portanto, a capacidade de compreender; e esta, por sua vez, a de

relacionar, ordenar, configurar, significar.

A citação da autora indica um posicionamento semelhante ao do autor deste artigo no que diz respeito a proporcionar aos alunos atividades geométricas criativas, que os levem a compreender o mundo que os rodeia em conexão com elementos das diversas geometrias: Euclidiana, Elíptica, Hiperbólica, Topológica, do Táxi etc. Via de regra, o que se vê na escola básica, na formação do professor, geralmente, refere-se à Euclidiana e, raramente, é abordada a Elíptica, por exemplo, cujo protótipo inicial pode ser visualizado em uma bola de isopor como se fora o globo terrestre. Nessa geometria, a interlocução com a Geografia é algo que vai ao encontro do dito na citação sobre a criatividade abranger a capacidade de compreender, por exemplo, os ângulos formados pelos meridianos da terra (retas nesse tipo de geometria) e pelos trajetos triangulares mínimos entre três pontos dados (Polo Norte, Linha do Equador e Ponto Extremo ao Leste). A partir disso, é possível analisar ângulos internos e, conseqüentemente, expandir a famosa relação euclidiana de que sua soma é igual a  $180^\circ$ , que é clássica e frequentemente a única memorizada pelos estudantes. No entanto, ela é maior do que esse valor na Elíptica (ou Esférica) e menor na Hiperbólica.

Assim, neste artigo, temos a intencionalidade de analisar imagens de lixeiras vistas e fotografadas em um ambiente de uma cidade do estado do Rio Grande do Sul. Nisso, há de se constatar a criatividade imaginativa do ferreiro que produz essas lixeiras com formatos geométricos, ornamentando-as. Dessa forma, pretendemos associar conceitos que são, em sua maioria, apresentados na literatura e trabalhados em sala de aula sem conexões com a realidade.

No que segue, apresentamos alguns fundamentos a respeito de criatividade e imaginação que fundamentam o artigo.

## 1. Fundamentação teórica

Ao tratar da criatividade, vale chamar a atenção para as formas de percepção, a respeito das quais podemos levar em consideração o afirmado por Ostrower (1977, p.2), isto é,

que as relações não se estabelecem ao acaso: Ainda que a lógica de seu desdobramento nos escape, sentimos perfeitamente que há um nexos. Sentimos, também, que de certo modo somos nós o ponto focal de referência, pois ao relacionarmos os fenômenos nós os ligamos entre si e os vinculamos a nós mesmos.

Entendemos que, se o indivíduo desenvolve a percepção visual desde o início de sua formação, torna-se capaz de estabelecer conexões entre o que visualiza, por exemplo, nas simetrias (reflexões) de formas geométricas em uma lixeira (a qual será

detalhada no artigo) que se encontra à frente de uma residência em uma cidade urbana, e uma temática desenvolvida em Geometria.

A esse respeito, a competência 4 para a Matemática no Ensino Fundamental, preconizada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) registra: “Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes” (BRASIL, 2018, p.269). No que diz respeito à Geometria, o documento indica que, para desenvolver o pensamento visual dos alunos, é necessário “fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (idem, p. 273). Entendemos que, para estabelecer as devidas conexões desde o Ensino Fundamental, a busca por argumentos matemáticos/geométricos ancorados na teoria em questão pode ser elemento favorável para o desenvolvimento de pensamento geométrico nos alunos.

Na exemplificação citada, é destacada a habilidade “(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria” (Brasil, 2018, p. 291). Percebemos que a visualização, enquanto habilidade, deve estar presente juntamente com a criatividade, sendo essa uma temática de interesse em nossa linha de pesquisa.

O que vem a ser visualização? Na linguagem corriqueira, ela tem o sentido de ver com os olhos. Mas isso é pouco, caso contrário, como uma pessoa cega ou com deficiência visual poderia “ver” determinados objetos? Assim, visualização é concebida como sendo uma habilidade que pode ser desenvolvida ao longo da escolaridade, especialmente no desenvolvimento de pensamento geométrico. Para Leivas (2009, p. 111), visualização é “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos”.

A aquisição dessa habilidade pode ser obtida, dentre outras possibilidades, como “[...] o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão” (Arcavi, 1999, p. 217).

Embora as duas referências não sejam atuais em termos cronológicos, elas permanecem ativas e presentes em Geometria, especialmente pela possibilidade do uso de ferramentas computacionais. Provavelmente, as mais empregadas no momento são aquelas de softwares de Geometria Dinâmica como o GeoGebra.

Assim, o presente artigo utiliza tais ferramentas para ilustrar como o “visualizado” pelo pesquisador, de fato, conecta-se a objetos clássicos/teóricos da Geometria.

Visualização, na Educação Matemática, tem sido objeto de pesquisas atuais, por exemplo, na pesquisa de Silva e Paiva (2012), ao utilizarem recursos materiais para desenvolver pensamento geométrico em alunos do Ensino Fundamental. A pesquisa buscou respostas aos seguintes questionamentos: como se encontra a habilidade do aluno em nível fundamental para visualizar figuras geométricas? De que maneira podemos melhorar sua habilidade para visualização geométrica? A fim de responder aos questionamentos, os autores utilizaram, como fundamentação teórica, a Teoria de Van Hiele. O estudo apontou que os alunos apresentam baixa capacidade de visualização geométrica.

A teoria de Van Hiele tem sido empregada no ensino de Geometria de forma crescente desde a sua introdução por Kaleff e Nasser. Essa teoria preconiza a evolução do desenvolvimento de pensamento geométrico por níveis, partindo do inicial, que busca a identificação de formas geométricas por sua aparência global, até chegar à dedução formal. Poderíamos identificar o primeiro nível, por exemplo, com o reconhecimento das formas geométricas que foram visualizadas nas lixeiras, como o paralelismo de segmentos de retas, o posicionamento entre verticalidade e horizontalidade, formas quadriláteras (quadradas, retangulares e trapezoidais etc.), até formas perfeitamente simétricas. Por sua vez, Leivas (2022) desenvolveu uma pesquisa com estudantes em ação continuada em que questionou o registro figural relativo ao Teorema de Pitágoras. Concluiu, em sua investigação, que os participantes somente identificam a forma quadrada sobre os lados do triângulo retângulo e a relação entre as áreas dos mesmos. Isso significa que houve uma confusão entre o registro em língua natural ‘quadrado’ com o registro figural ‘quadrado’, pois o figural pode corresponder, por exemplo, a triângulos, retângulos, lunas, semicírculos etc. Portanto, visualizar vai além do mero olhar, avançando em direção ao estabelecimento de relações geométricas.

A respeito de competências espaciais visuais dos alunos, estas compreendem a capacidade de imaginar, ilustrar e descrever processos visuais que ocorrem na mente, conforme indicado por Wahab et al. (2016) em sua pesquisa. A exemplo do que ocorre no Brasil, na Malásia, o ensino de Geometria também é dependente do conteúdo dado pelos professores, os quais se baseiam “[...] apenas nos conteúdos dos manuais escolares, embora o progresso no pensamento geométrico dependa das experiências dos alunos com o conceito geométrico e sua capacidade de alcançar competências espaciais visuais e não apenas da maturidade” (p. 490). A esse respeito, o que apresentamos no presente artigo leva a intuir que observar construtos humanos (lixeiras) e associá-los a construtos geométricos (formas) pode ser uma maneira eficiente de desenvolver competências.

Nossas pesquisas têm mostrado que, na medida em que o professor proporciona atividades seguindo os níveis de Van Hiele, é possível desenvolver as competências visuais que conduzem ao prazer, por exemplo, no ensinar e no aprender Geometria. Tal aspecto tem sido observado em nossa experiência em um Mestrado Profissional para professores com formação inicial em Pedagogia, com os quais desenvolvemos elementos de Geometria Fractal para trabalhar com números decimais e frações. Os temas em questão, até então, costumavam ser rejeitados pelos referidos profissionais, embora sua abordagem seja considerada fundamental desde o início da escolaridade.

Ao que nos parece, isso vai ao encontro do dito por Severino (2016, p. 22) sobre os objetivos do ensino superior, isto é, "A educação superior tem uma tríplice finalidade: profissionalizar, iniciar prática científica e formar a consciência político-social dos estudantes". Para o autor, a pesquisa exploratória "busca apenas levantar informações sobre um determinado objeto delimitando assim um campo de trabalho mapeando as condições de manifestação desse objeto" (p, 132). Entendemos que, ao visualizar o objeto e detectar correlações com a Geometria, o ato de investigar parte para a sua exploração, como no caso de fotografá-lo e, em seguida, de examiná-lo com recursos tecnológicos ou didáticos, a fim de confirmar, registrar e analisar tal objeto.

Žakelj e Klančar (2022) indicam que as representações visuais e os processos de visualização apresentam relevância indiscutível na aprendizagem geométrica e, para tal, um papel relevante é desempenhado pelas multimídias, em particular, os programas de Geometria Dinâmica, pois neles os estudantes podem explorar dinamicamente a resolução de problemas geométricos. Os resultados das pesquisas realizadas mostraram impacto positivo no ensino sobre perímetros e áreas de figuras planas. A partir disso, indicam recursos tecnológicos para a compreensão de conceitos geométricos/matemáticos, além do estabelecimento de relações e representações gráficas.

Nos ancoramos nas referências supra citadas para delinear a pesquisa teórica apresentada no artigo em que trazemos a visualização do autor na observação de lixeiras urbanas para associar e estabelecer conexões com temas geométricos explorando ferramentas tecnológicas oriundas do GeoGebra.

## 2. Aspectos metodológicos

O trabalho aqui apresentado envolve uma pesquisa qualitativa uma vez que Loizos (2017, p. 137) indica que ela "tem como preocupação principal o uso de fotos e vídeos como métodos de pesquisa qualitativa", a qual engloba o teórico. O autor afirma que o leitor não necessita estar familiarizado com o uso de material visual e sequer tenha pensado a respeito para reconhecer fotos como documento de pesquisa com o que ele se identifica em seu trabalho. Indica, ainda, enfoques merecedores de

atenção: a) a imagem, com ou sem acompanhamento de som, oferece um registro restrito, mas poderosos das ações temporais e dos acontecimentos reais-concretos, materiais; b) pode empregar, como dados primários, informação visual que não necessite estar em forma de palavras escritas, nem em forma de números; c) o mundo atual é influenciado pelos meios de comunicação em que o `visual` e a `mídia` desempenham importante papel.

O autor diz não dever se acreditar no que se visualiza de maneira ingênua e que o constatado deve ser conferido, o que corresponde ao presente trabalho e linha de pesquisa do proponente do presente artigo. Nesse sentido, a comprovação, por exemplo, de que visualiza circunferência e não círculo na face de uma lixeira retangular ou quadrado e não região quadrada, o pesquisador deve ancorar a diferenciação entre os dois conceitos geométricos que, inclusive em livros didáticos, muitas vezes vem equivocado. Também é necessária a exploração de ferramentas do GeoGebra para as constatações observadas.

Portanto, o presente artigo tem por irá analisar sete formas geométricas constantes em lixeiras urbanas, dentre a coleção capturada em um total de quinze. Para isso, foram registradas fotos diversas, com as da Figura 1 e definidos objetivos específicos como: analisar a foto no GeoGebra; identificar propriedades geométricas constantes na mesma; relacionar outros tipos de registros; explicitar a aproximação entre o visualizado e o ente geométrico formal. Posteriormente, serão analisadas outras.



**FIGURA 1:** Algumas fotos capturadas de lixeira

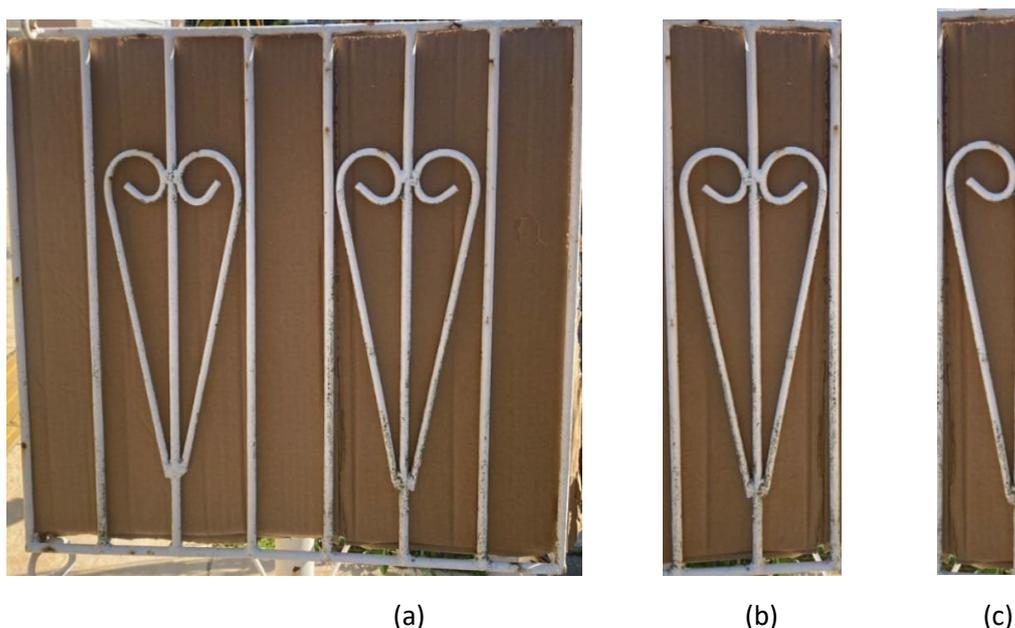
**FONTE:** Arquivo do pesquisador (2024)

No que diz respeito ao corpus da pesquisa, Bauer e Bas Aarts (2017, p. 39) indicam que “Toda pesquisa social empírica seleciona evidência para argumentar e necessita justificar a seleção que é a base de investigação, descrição, prova ou refutação de uma afirmação específica”.

Assim, na observação rápida das três imagens constantes da Figura 1, já é possível perceber a variedade de formas que podem ser analisadas mais detalhadamente, além de outras. No que segue, são analisadas fotos e as devidas relações geométricas.

### 3. Análises e Resultados

A variedade de objetos concretos localizados pode ser analisada e encontrada em relações geométricas consideráveis. A primeira lixeira fotografada a ser analisada consta da Figura 2. Observe que foi colocado um anteparo na parte de fundos de uma das paredes, a fim de evidenciar o formato dessa face, uma vez que a luminosidade não permitiria identificar as formas frontais, pois se confundiriam com as da face oposta ou, até mesmo, com as faces laterais.

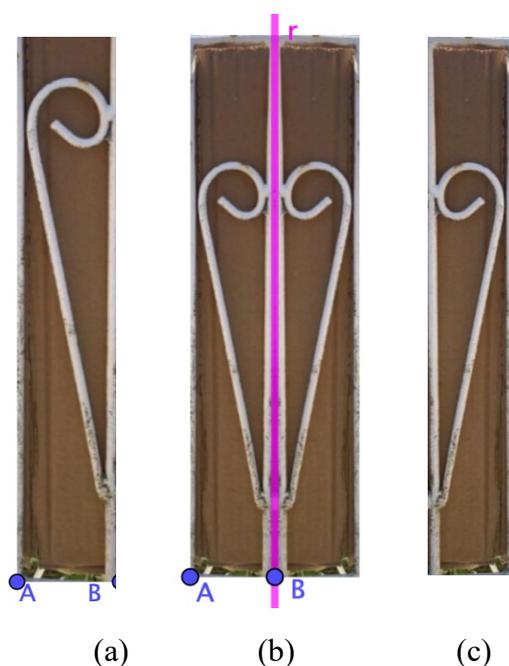


**FIGURA 2:** Lixeira onde é visualizada a simetria de reflexão  
**FONTE:** Arquivo do pesquisador (2024)

Ao visualizar as formas geométricas constantes da Figura 2, o pesquisador logo identificou elementos geométricos a serem explorados. Instantaneamente, percebeu segmentos de reta verticais e paralelos, limitados por uma poligonal quadrilátera e, internamente, um ornamento que, de imediato, o conduziu a mentalizar duas formas constituídas cada uma de uma curva, limitada entre dois segmentos paralelos e verticais, cortadas por um terceiro segmento equidistante dos

dois, o que fez com que percebesse ali uma simetria das duas curvas. É isolada uma única forma completa dentre todas as que aparecem nessa face frontal (b) e, posteriormente, sua metade no sentido vertical. É perceptível que em (a) está a imagem integral, em (b) foi recortada uma delas. Em (c), por sua vez, foi isolada uma parte da imagem (b).

A última imagem (c) foi levada ao GeoGebra colocando, por exemplo, a base da figura recortada nos pontos  $A(0,0)$  e  $B(10,0)$  horizontais para facilitar a percepção visual (Figura 3). Em seguida, foi traçada uma vertical, perpendicular ao eixo horizontal ou ao segmento de reta AB, passando por B, conforme representa a reta  $r$  em rosa. Tal reta é coincidente com o que pode ser chamado de eixo de simetria, o qual no objeto contém o tal segmento bipartindo a forma geométrica. Na janela de álgebra já é possível visualizar a equação desta reta ( $x=10$ ).



**FIGURA 3:** recorte de um ramo da imagem destacada  
**FONTE:** Arquivo do pesquisador (2024)

Na sequência, foi utilizada a ferramenta 'reflexão em torno de uma reta' para produzir a imagem refletida (b).

As transformações geométricas desempenham um importante papel no ensino e na aprendizagem de Geometria, sendo relevantes, dentre outros temas, para estudar os casos clássicos de congruência de triângulos. Uma dessas transformações é a de reflexão, a qual pode ser em torno de um ponto ou de uma reta, sendo esta

última denominada eixo de reflexão ou de simetria (que pode estar na figura ou fora dela), pois produz a imagem de um objeto como se fora refletido em um espelho. O GeoGebra tem a ferramenta que permite visualizar tal efeito de forma simples, facilitando a visualização, o que reitera o indicado por Arcavi (1999) como sendo uma das ferramentas para o desenvolvimento do pensamento (geométrico e analítico).

Segue a exploração geométrica visualizada pelo investigador em uma segunda lixeira urbana (Figura 4).

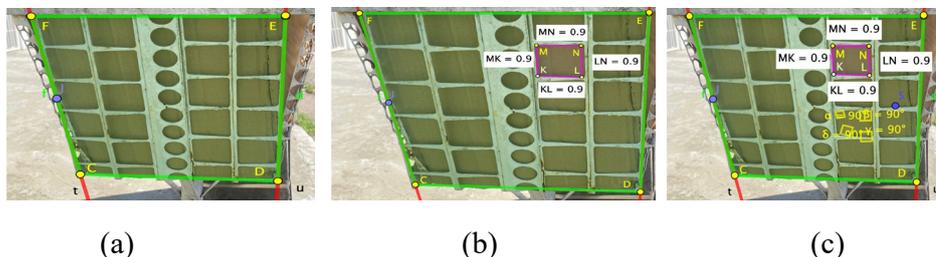


**FIGURA 4:** ilustra um objeto que pode ser percebido como um quadrilátero.

**FONTE:** Arquivo do pesquisador (2024)

A Figura 4 ilustra um objeto que pode ser percebido como um quadrilátero envolvendo formas quadradas e circulares, além de outros elementos geométricos. O fato de ter sido colocado um anteparado posterior à face frontal fica elaborado na mente como um construto mental (Leivas, 2009) de quadrados e circunferências e não de forma quadrada e círculos, sendo os últimos visualizados no anteparo colocado e não do objeto em apreço. Deve ser levado em consideração o fato de o pesquisador não ser um profissional fotográfico e a foto não ficar perfeitamente frontal. É preconizado na BNCC (BRASIL, 2018) que a Geometria deve levar em consideração dois aspectos fundamentais: geometria e formas; grandezas e medidas. Esses dois elementos nem sempre são considerados no âmbito escolar e, até mesmo, na Licenciatura em Matemática, misturando-se os conceitos de quadrado (polígono) e a medida de seu perímetro enquanto região quadrada correspondendo a grandeza área.

Ao levar ao GeoGebra, pode ser observado um quadrilátero CDEF na cor verde, tendo CD e EF constituindo dois dos lados desse quadrilátero e paralelos de forma bem simples, conforme ilustra a Figura 5 (a).



**FIGURA 5:** Quadriláteros, circunferências e linhas.

**FONTE:** Arquivo do pesquisador (2024)

Por sua vez, são visualizadas outras duas retas pelos outros dois lados, visivelmente não paralelas CF e DE, o que pode ser comprovado pelo GeoGebra, uma vez que suas equações, na janela de Álgebra, são:  $t: 0.2x + 4.66y = 4.26$  e  $u: 4.94x - 0.18y = 31.5$  donde  $t: 4.66y = -0.2x + 4.26$ , ou seja, com coeficiente angular sendo negativo, o que representa ter inclinação maior do que  $90^\circ$ , enquanto que  $u: 0.18y = 4.94x - 31.5$  apresenta coeficiente angular positivo, o que significa ter inclinação menor do que  $90^\circ$ . Visualmente, as linhas CD e EF são paralelas e, portanto, a imagem representa um objeto em forma de quadrilátero trapezoidal. Portanto, o GeoGebra pode auxiliar no ensino de posições relativas de retas/segmentos, bem como no ensino da função afim com suas respectivas declividades, e chegar à Geometria Analítica.

Por outro lado, ainda explorando as ferramentas computacionais do software, na Figura 5 (b) foram demarcados os pontos K, L, M e N, e construído o polígono KLMN, cujo aspecto visual parece indicar um quadrilátero (quadrado). Para isso, foram obtidas as medidas dos lados desse quadrilátero e constatado serem todas iguais, o que não necessariamente representa um quadrado, pois este último tem de ter ângulos retos, o que pode ser encontrado usando outra ferramenta do software. A fim de não sobrecarregar a Figura 5 (b), foi escolhido outro quadrilátero e utilizada a ferramenta ângulo para verificar que os quatro são retos e, conseqüentemente, comprovar que, de fato, as imagens são de quadrados.

Por fim, mas não menos importante, é a visualização da coluna central com fórmulas circulares. Considerando tratar-se de uma lixeira, em que é necessário deixar fluir o odor do material ali depositado, elas necessitam ser abertas, o que corresponde, no contorno dessas figuras, a circunferências, sendo todas congruentes. No entanto, se for analisado o anteparo colocado para evitar a face oposta, a região interior visualizada passa a ser um círculo. Aqui, reportamo-nos a Fischbein (1987, p. 104), ao expressar que representações visuais

não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto-evidência e imediatez. Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas também é um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios.

É possível constatar que, em um único objeto encontrado no meio urbano, existe uma variedade de percepções que proporcionam ao professor inúmeras atividades geométricas, o que vêm a desenvolver pensamento geométrico nos estudantes.

Seguindo as visualizações do pesquisador, observamos, na Figura 6, o objeto no formato quadrangular, em contrapartida aos trapezoidais anteriores. O anteparo colocado na parte interna permite visualizar o lado frontal da lixeira constituído de pequenos losangos. Notamos, além disso, que os lados do quadrilátero circundante podem ser analisados não como linhas, mas como regiões retangulares com uma das dimensões bem pequena e a outra longa.

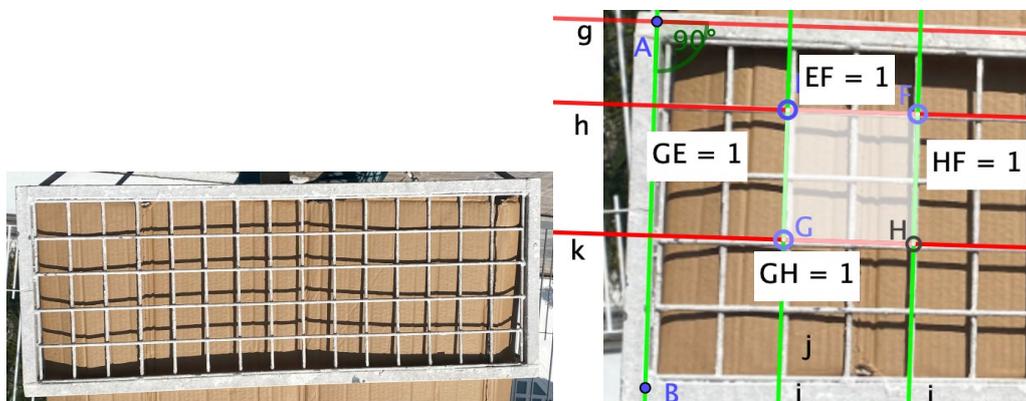


**FIGURA 6:** Um quadrado contendo losangos

**FONTE:** Arquivo do pesquisador

Em virtude de a malha ser bastante reduzida, não levaremos a imagem fotografada ao GeoGebra para uma confrontação com a definição de losango. No entanto, retomamos indicado por Ostrower (1977) sobre o ato de criação abranger a capacidade de compreender e, portanto, intuir losangos na construção dessas formas geométricas em lixeiras é algo admirável de ser observado em sua criação. Não há dúvida que aqui aparece o protótipo de losango citado em livros didáticos.

Observando a Figura 7, notamos uma diferença entre as anteriores, uma vez que se apresenta em forma retangular alongada, como usualmente é apresentado um retângulo.



**FIGURA 7:** Quadrados em uma região retangular  
**FONTE:** Arquivo do pesquisador

O observador, atento, de imediato, visualiza, na imagem da Figura 7 (a), uma rede de linhas horizontais e verticais formando pequenos quadrados, os quais não apresentam dimensões tão pequenas como no caso anterior. O pesquisador, entretanto, necessita comprovar isso matematicamente e, para tanto, conduz a imagem ao GeoGebra, recortando um fragmento para análise, como consta na Figura 7 (b).

Na exploração dos recursos do software, é traçada uma reta  $g$  passando pelo 'lado' do retângulo que define sua fronteira superior (vermelha) e uma passando pelos pontos  $A$  e  $B$  da fronteira esquerda (verde). Comprovamos que ambas são perpendiculares. Foram escolhidos quatro supostos quadradinhos para facilitar a visualização, reunidos pelos vértices  $E, F, G, H$ , os quais foram deixados com o interior sombreado para destacar. Para isso, foram obtidas retas em verde ( $j$  e  $i$ ) paralelas àquela que passa por  $A$  e  $B$ , o que vai caracterizar o perpendicularismo com  $h$  e  $k$ , portanto, formando ângulos retos. A fim de comprovar que essa figura é um quadrado (região quadrada), buscamos as medidas de seus lados, comprovando serem todas iguais. Portanto, a figura formada (sombreada) corresponde a uma região quadrada, cuja fronteira, formada pelos segmentos consecutivos e fechada, de fato, corresponde a um quadrado. Aqui, evocamos o dito por Fischbein (1987, p. 21), de que "Uma intuição é, então, uma ideia que possui as duas propriedades fundamentais de uma realidade concreta, dada objetivamente; imediatez - isto é, evidência intrínseca - e certeza (não certeza formal convencional, mas praticamente significativa, certeza imanente)".

Seguindo a trajetória de explorar elementos geométricos nas lixeiras, na expectativa de poder contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem de

Geometria, focamos na imagem fotografada pelo pesquisador e constante da Figura 8.



**FIGURA 8:** Proporcionalidade em imagem fotográfica  
**FONTE:** Arquivo do pesquisador

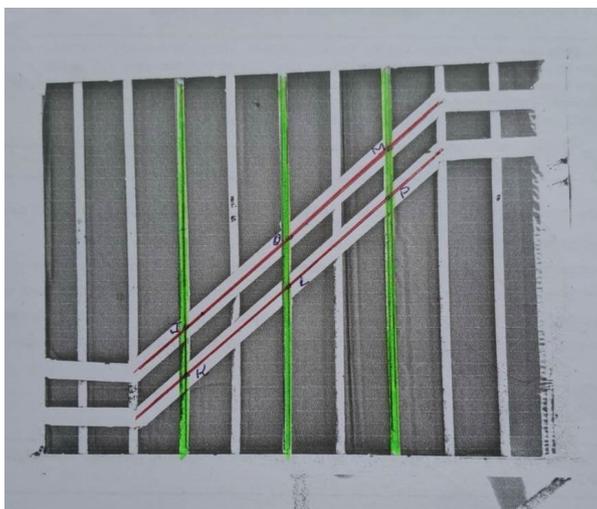
Ao encontrar esta configuração na construção da lixeira, logo foi percebido, pelo autor do artigo, um bom exemplo real em que a Geometria poderia ser explorada, a saber, o paralelismo entre retas (segmentos de reta, no caso) cortado por transversais. Na situação presente, de imediato, detectou uma possibilidade de ilustrar com objetos concretos, reais, encontrados no ambiente urbano, identificando temas para o ensino de Geometria.

O contorno do objeto é interpretado como um quadrado (ou retângulo), não sendo possível afirmar categoricamente sem utilizar instrumentos de medida (in lócus) ou as obter por aproximação com ferramenta computacional (imagem fotografada). Nesse quadrado, é inserido um feixe de segmentos paralelos na vertical e duas linhas (quebradas) que podem ser identificadas como transversais (perpendiculares ao feixe ou inclinadas). Via de regra, o teorema relacionado não chama atenção para o fato de uma perpendicular ao feixe ser um caso de transversalidade. É indicado, na literatura, que ‘um feixe de paralelas cortado por uma transversal determina segmentos proporcionais’. Mas, no caso da transversal ser perpendicular, questionamo-nos: Qual é o fator de proporcionalidade?

Arcavi (1999) indica que a obtenção de habilidades visuais pode ser desenvolvida por meio de diversos recursos como, por exemplo, papel ou tecnologias, sendo que estas últimas têm sido uma das principais alternativas utilizadas neste artigo. No entanto, o professor pode utilizar a imagem fotografada e

ampliada em papel, uma régua e uma tabela em que sejam colocados pontos e obtidas as medidas por etapas.

Na Figura 9, ilustramos como proceder utilizando papel e lápis colorido. Para isso, imprimimos a foto em uma folha A4 e procedemos como segue.



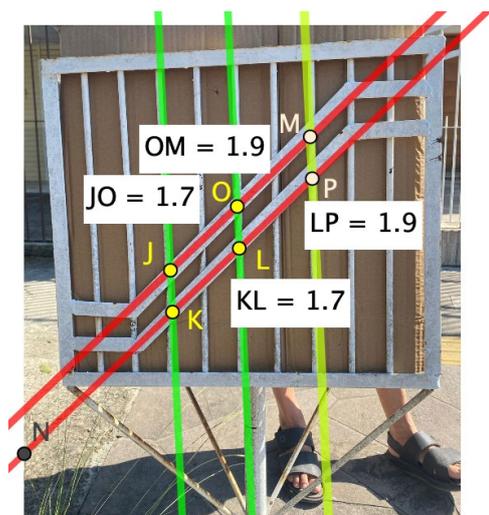
**FIGURA 9:** Fotografia impressa em papel

**FONTE:** Arquivo do pesquisador

Consideramos as linhas inclinadas na cor vermelha, na parte central da Figura 9, as quais são paralelas e cortam o feixe na cor verde (tomam-se quaisquer 3 dessas retas paralelas). Portanto, temos um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais (particularmente são paralelas). A superior corta o feixe nos pontos J, O e M, enquanto que a inferior, nos pontos K, L e P. O segmento OM de uma tem por correspondente o LP na outra e ambas apresentam as mesmas medidas (1,9 cm). De modo similar, JO e KL (1,7 cm). Portanto, a razão entre os dois da primeira é igual a dos correspondentes na segunda. Caso as duas retas em vermelho não fossem paralelas, haveria a proporcionalidade diferente da igualdade. Na situação ilustrada, temos uma particularidade do referido teorema. Assim, com materiais simples de uso escolar, é permitida a exploração de temática geométrica, conectando a imagem de um objeto concreto com elementos abstratos no contexto da Geometria. Na Figura 10, consta a mesma construção explorando os recursos do GeoGebra. A ilustração realizada na parte central da fotografia pode ser feita para os dois trechos laterais.

Consideramos as linhas inclinadas na cor vermelha, na parte central da Figura 9, as quais são paralelas e cortam o feixe na cor verde (tomam-se quaisquer 3 dessas retas paralelas). Portanto, temos um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais (particularmente são paralelas). A superior corta o feixe nos pontos J, O e M, enquanto que a inferior, nos pontos K, L e P. O segmento OM de uma tem por

correspondente o LP na outra e ambas apresentam as mesmas medidas (1,9 cm). De modo similar, JO e KL (1,7 cm). Portanto, a razão entre os dois da primeira é igual a dos correspondentes na segunda. Caso as duas retas em vermelho não fossem paralelas, haveria a proporcionalidade diferente da igualdade. Na situação ilustrada, temos uma particularidade do referido teorema. Assim, com materiais simples de uso escolar, é permitida a exploração de temática geométrica, conectando a imagem de um objeto concreto com elementos abstratos no contexto da Geometria. Na Figura 10, consta a mesma construção explorando os recursos do GeoGebra. A ilustração realizada na parte central da fotografia pode ser feita para os dois trechos laterais.

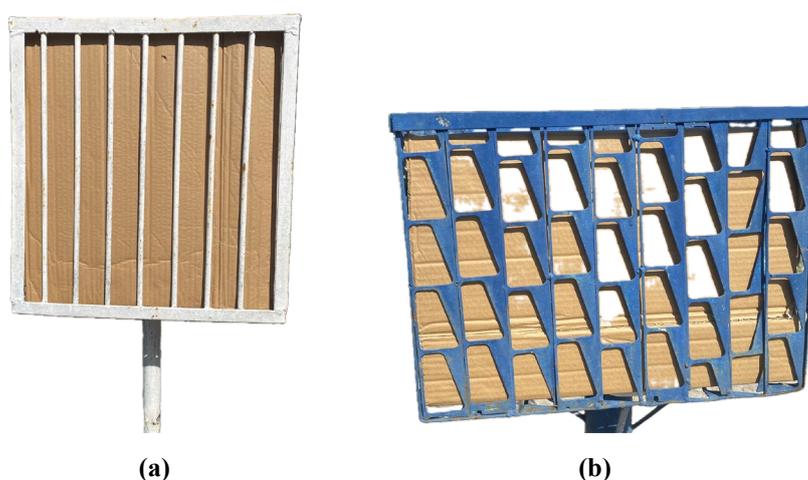


**FIGURA 10:** Explorando a construção no GeoGebra

**FONTE:** Construção do autor

Poderíamos ficar explorando outros objetos, tanto no concreto (nas lixeiras catalogadas pelo autor do artigo) quanto na conexão destas com os objetos geométricos existentes na literatura matemática, porém, isso tornaria, até certo ponto, o artigo cansativo para o leitor. Iremos apenas ilustrar algumas delas, indicando-as na Figura 11.

Poderíamos ficar explorando outros objetos, tanto no concreto (nas lixeiras catalogadas pelo autor do artigo) quanto na conexão destas com os objetos geométricos existentes na literatura matemática, porém, isso tornaria, até certo ponto, o artigo cansativo para o leitor. Iremos apenas ilustrar algumas delas, indicando-as na Figura 11.



**FIGURA 11:** Imagens de lixeiras geométricas  
**FONTE:** Construção do autor

Na letra (a), podemos registrar um feixe de paralelas, enquanto que, na (b), são visualizados polígonos com quatro lados, ou seja, quadriláteros, os quais podem ser obtidos por translações, por exemplo, até reflexões, dois movimentos rígidos de relevância para o seguimento do desenvolvimento de pensamento geométrico. Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) indicam que dois processos de raciocínio centrais são: a generalização, na qual sobressaem os aspectos indutivos; e a justificação, na qual sobressaem os dedutivos. Portanto, o feito aqui ilustra a indução, a partir da intuição preconizada por Fischbein (1987), a respeito de formas geométricas encontradas fora do ambiente escolar/acadêmico que são levadas a justificativas que permitem ao professor analisar se os estudantes adquirem habilidades que lhes possibilitam exercitar os processos dedutivos formais na área de Geometria.

No que diz respeito à percepção e representação nas crianças, Piaget e Inhelder (1993) indicam que nem sempre a primeira habilidade implica na segunda, uma vez que:

A percepção é o conhecimento dos objetos resultantes de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário, - seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença -, em completar seu conhecimento perceptivo referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos (p. 32).

Essa conclusão dos autores relaciona-se diretamente ao desenvolvido na presente pesquisa, uma vez que o contato direto com o objeto lixeira, em suas diversas formas e localizações, faz uma pessoa adulta partir para sua representação mental, associando-as a objetos até certo ponto conhecidos, mas ausentes

fisicamente e, com isso, estabelecendo as conexões necessárias. Além disso, o uso dos recursos didáticos (material concreto ou software) tornam-se elementos desafiadores na elaboração de propostas didáticas para a atuação do professor em sua sala de aula.

Ao analisar Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008), encontramos que, para a Geometria, os programas de ensino desde o pré-escolar ao último ano do Ensino Médio deverão qualificar os alunos para:

- a. Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tri- dimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas.
- b. Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas.
- c. Usar a visualização e a modelação geométrica para resolver problemas. (PRINCIPIOS e NORMAS, 2008, p. 112).

Assim, concluímos a seção em que o GeoGebra favoreceu a modelação de entes geométricos utilizados em construções de lixeiras, envolvendo a visualização de conceitos e relações geométricas, por vezes difíceis de serem associadas a algo concreto, real.

## Reflexões Finais

Discutimos, no presente artigo, a respeito de visualização geométrica, ou seja, como o pesquisador percebe elementos geométricos no entorno do seu viver. A escola e a formação do professor costumam dar pouca ênfase ao ensino de Geometria, relegando-o aos capítulos finais dos livros didáticos. No ensino tradicional frequentemente o ensino de geometria é conduzido de forma expositiva, com aplicações de fórmulas, sem estabelecer correlações entre algo existente na vida real e os fundamentos geométricos teóricos.

Provavelmente, por tais razões, existam certos preconceitos de que a Geometria é difícil e destinada a poucos, considerados privilegiados. No nosso entender, há uma falha que começa nos primeiros anos escolares e, até mesmo na pré-escola, uma vez que os formadores já têm tal concepção sobre a temática. Mas não fica por aí esse abandono e forma de agir. No próprio currículo da formação de professores que irão ensinar Matemática, não há igualdade na distribuição de conteúdos. Por exemplo, há no currículo dessa formação superior, geralmente, uma disciplina de Geometria Plana, uma de Espacial e uma de Analítica, com um semestre cada. Já na distribuição do Cálculo Diferencial e Integral, isso é feito de forma bem ampla, começando, atualmente, com um pré-cálculo, cálculo I, II, III, seguindo pela análise matemática e, muitas vezes, com equações diferenciais.

Procuramos, neste artigo, apresentar uma possibilidade empregada para desenvolver pensamento visual a partir da observação de lixeiras em um ambiente urbano, fotografadas e levadas à análise para estabelecer conexões com elementos geométricos formais. Para realizar tal análise, foi feito uso das ferramentas computacionais do GeoGebra e a utilização de outros recursos materiais. O objetivo do trabalho foi analisar as imagens fotografadas de lixeiras visualizadas em um ambiente de uma cidade do estado do Rio Grande do Sul. Com isso, foi possível constatar, por exemplo, em uma delas, a simetria de uma dada forma geométrica. Para tanto, uma imagem da foto foi isolada, partida por um eixo de simetria e, em seguida, realizada a reflexão com a ferramenta adequada do software GeoGebra, produzindo a segunda parte da mesma.

Também foi utilizada outra imagem, a qual foi reproduzida em papel, destacadas em duas cores linhas paralelas e linhas transversais, calculando as medidas e estabelecendo razões de proporcionalidade entre os segmentos de retas, ilustrando o Teorema das Paralelas cortadas por transversais. Além destas, o artigo analisa outras formas e as relaciona com os entes geométricos descritos na teoria geométrica.

Ao explorar a criatividade, a imaginação e a própria intuição, o trabalho evidencia possibilidades de aplicação com estudantes desde a escola básica até a formação inicial ou continuada de professores que ensinam Matemática. Na sequência de trabalho, nossa pesquisa conduzirá a verificar como estudantes do Ensino Médio ou de Licenciatura em Matemática visualizam objetos geométricos representados nas fotografias apresentadas e outras do acervo particular do investigador.

## Referências

BAUER, M.W; AARTS, Bas. **A construção do corpus**: um princípio para coleta de dados qualitativos. In: (Bauer, M.W; Gaskel, G, (org.) Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático. Petrópolis, RJ: Vozes. 2015. pp. 39-63.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular. CNE**, Brasília: 2018. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01\\_02.pdf](http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf). Acesso em: 20 mar. 2024.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2009.

LEIVAS, J.C.P. PITÁGORAS E VAN HIELE: UMA POSSIBILIDADE DE CONEXÃO. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 643-655, 2012.

LOIZOS, P. **Video, filme e fotografia como documentos de pesquisa**. In: (Bauer, M.W; Gaskel, G, (org.) Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático. Petrópolis, RJ; Editora Vozes. 2015, pp. 137-186.

OSTROWER, Fayga. **Criatividade e Processos de Criação**. Editora Vozes. RJ. 187p. 1977.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PONTE, J.P. da, MATA-PEREIRA, J.; Henriques. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Praxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

**Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM, 2008. Tradução dos Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.

SILVA, Josafá L. da; PAIVA, Jussara P. A. A. **Visualização geométrica**: uma habilidade para ser valorizada no ensino fundamental, 2012. Disponível em <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/12>. Acesso em 29 abr.2024.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. Cortez Editora, SP, 2016.

WAHAB, Rohani Abd; ABU, Mohd Salleh Bin; ABDULLAH, Abdul Halim Bin; MokhtarMahani Bt, ATAN, Noor Azean Br. **A case study on visual spatial skills and level of geometric thinking in learning 3D geometry among high achievers**. 2016. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/298640083>. Acesso em 04 mai. 2024.

Enviado:11/05/2024

Aceito: 14/07/2024