



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p115-168>

Construindo uma pirâmide utilizando o GeoGebra 3D e a Realidade Aumentada no *smartphone*: uma proposta de mediação pedagógica para Geometria Espacial no Ensino Médio

Building a pyramid using GeoGebra 3D and Augmented Reality on *smartphone*: a pedagogical mediation proposal for Spatial Geometry in High School

SILVIO LUIZ GOMES DE AMORIM¹
<https://orcid.org/0000-0001-6260-5396>

FREDERICO DA SILVA REIS²
<https://orcid.org/0000-0001-6087-6483>

NEUBER SILVA FERREIRA³
<https://orcid.org/0000-0002-1588-4254>

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar a construção de uma pirâmide utilizando as ferramentas tecnológicas GeoGebra 3D e Realidade Aumentada como uma possibilidade de mediação pedagógica em aulas de Geometria Espacial no Ensino Médio. A metodologia da pesquisa foi baseada em atividades exploratórias envolvendo a utilização das referidas ferramentas tecnológicas na construção de sólidos geométricos, sendo que alunos do Ensino Médio puderam construir, manusear, interagir, debater e observar particularidades dos sólidos geométricos estudados em seus smartphones. Como resultados da pesquisa, observou-se o potencial da utilização de ferramentas tecnológicas para a facilitação da visualização de sólidos geométricos em três dimensões, bem como a compreensão sobre as especificidades e propriedades inerentes aos referidos sólidos geométricos.

Palavras-chave: *GeoGebra 3D; Realidade Aumentada; Geometria Espacial.*

ABSTRACT

The present work aims to present the construction of a pyramid using technological tools GeoGebra 3D and Augmented Reality as a possibility of pedagogical mediation in Spatial Geometry classes in High School. The research methodology was based on exploratory activities involving the use of the aforementioned technological tools in the construction of geometric solids, whereas High School students were able to construct, handle, interact, debate and observe particularities of the geometric solids studied on their smartphones. As results of the research, the

¹ Universidade Federal de Ouro Preto – r1130315@gmail.com

² Universidade Federal de Ouro Preto – frederico.reis@ufop.edu.br

³ Instituto Federal de Minas Gerais – Campus Ouro Preto – neuber.ferreira@ifmg.edu.br

potential that the use of technological tools brings to facilitate the visualization of geometric solids in three dimensions was observed, as well as the understanding of the specificities and properties inherent to said geometric solids.

Keywords: GeoGebra 3D; Augmented Reality; Spatial Geometry.

Introdução

O ensino de Geometria Espacial pode proporcionar aos alunos trabalhar com elementos teóricos que podem ser visualizados ou transpostos para o ambiente real, por meio da observação de formas e especificidades que existem nos elementos da natureza.

Nessa perspectiva, outro atrativo para os alunos certamente pode se configurar a partir da utilização de Tecnologias Digitais no ensino de Matemática, especialmente, quando trabalhadas no ambiente escolar, visando despertar o interesse dos alunos pela Geometria Espacial, em situações propostas pelos professores, nas quais ocorram desafios, descobertas e interações. Uma das formas de conduzir esse processo é utilizar o *software* GeoGebra, pois de acordo com Souza (2017, p. 13), os recursos digitais podem ser ferramentas para melhorar o amadurecimento cognitivo e desenvolver habilidades para resolver problemas inicialmente inalcançáveis, além de ampliar habilidades físicas e mentais, como por exemplo os recursos visuais disponibilizados em *softwares* de Geometria Dinâmica, tais como o GeoGebra.

Particularmente, em relação à utilização de Tecnologias Digitais no ensino de Geometria Espacial, Menegais, Ferreira, Fagundes e Penha (2022, p. 3) esclarecem que a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica pode favorecer uma aprendizagem de Geometria Espacial envolvente e participativa, além de desenvolver o pensamento geométrico dos alunos.

Assim, visando essa visualização de conteúdos de Geometria Espacial e dentro do contexto da utilização de recursos digitais no ambiente escolar, visando despertar o interesse dos alunos pela Geometria Espacial, outro componente tecnológico que pode se somar ao GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial é a Realidade Aumentada, pois para Macedo, Silva e Buriol (2016, p. 2), “misturando-se” o mundo virtual com o mundo real, pode-se criar formas de interação com objetos que só estão limitados à nossa imaginação e a possibilidade de visualizar, explorar livremente vários pontos de vista e interagir com objetos virtuais tridimensionais possui inúmeros benefícios potenciais para o ensino de sólidos geométricos.

Na presente proposta para a ação, apresentamos um recorte de uma pesquisa que embasou uma Dissertação de Mestrado (AMORIM, 2023), realizada com 24

alunos do 2º ano do Ensino Médio de um Instituto Federal localizado no interior de Minas Gerais, devidamente aprovada no Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Ouro Preto, cujo objetivo foi investigar as contribuições para a aprendizagem de Geometria Espacial por meio da utilização conjugada da tríade GeoGebra, RA e *smartphone*, na perspectiva da aprendizagem móvel.

1. A utilização pedagógica do GeoGebra 3D e da Realidade Aumentada na construção de uma pirâmide no *smartphone*

O processo de construção de sólidos espaciais, em especial a construção de pirâmides no *software* GeoGebra 3D é simples, intuitivo e dinâmico, uma vez que esse *software* possibilita a construção de figuras geométricas planas ou espaciais, permitindo ao usuário manipular as figuras com atualização em tempo real de elementos que as compõem. Sendo assim, entendemos que o leitor poderá, a partir de nossa proposta de ação, entender os procedimentos que serão indicados para o desenvolvimento da atividade.

O *software* da calculadora gráfica do GeoGebra 3D pode ser baixado e instalado gratuitamente em *smartphones*, trazendo consigo a ferramenta de Realidade Aumentada (RA), sendo esta destacada por meio das letras AR (*Augmented Reality*). O *software* é representado por uma pirâmide, conforme a Figura 1.



FIGURA 1: Ícone da Calculadora Gráfica do GeoGebra 3D (pirâmide azul)

FONTE: Acervo da Pesquisa

Clicando-se sobre o ícone da referida calculadora abre-se uma tela com um plano e os eixos tridimensionais nas cores vermelho (x), verde (y) e azul (z). Nessa tela, na parte inferior, há duas opções disponíveis: Álgebra (ícone de uma calculadora) e Ferramentas (ícone de um triângulo sobreposto a uma circunferência). Na opção Álgebra, dispõe-se de funções e operações inerentes aos cálculos algébricos. Já na opção Ferramentas (seta verde indicada na Figura 2), dispõe-se, inicialmente, de um menu de Ferramentas Básicas.

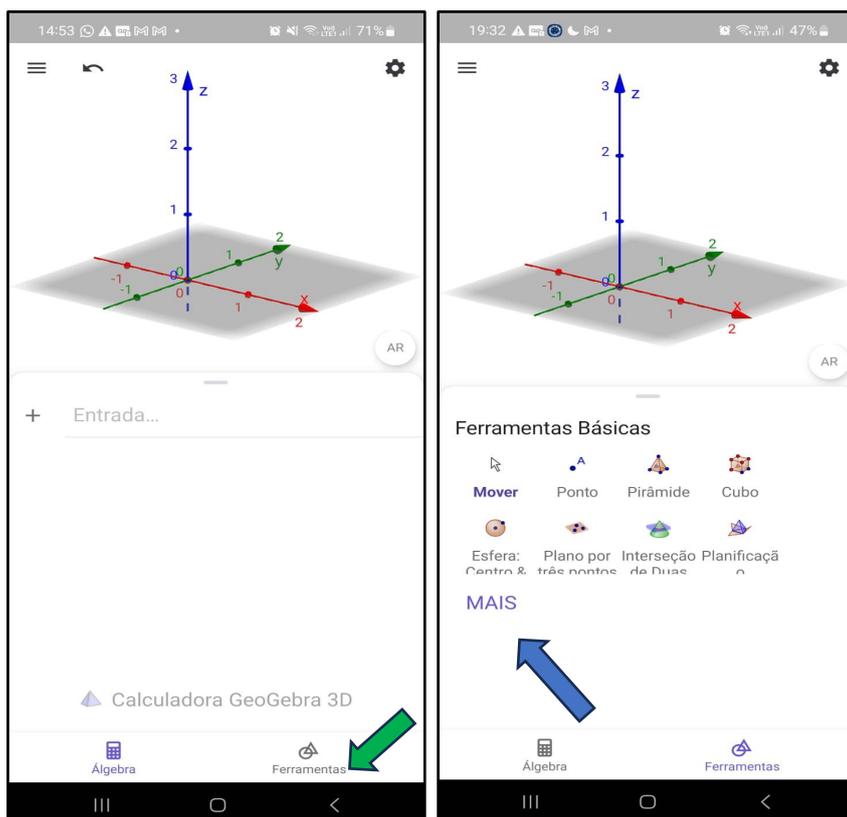


FIGURA 2: Imagem da tela do *smartphone* do Plano e Eixos (x – vermelho; y – verde; z – azul) e ícones (Álgebra e Ferramentas)

FONTE: Acervo da Pesquisa

Também há um ícone denominado MAIS (seta azul indicada na Figura 2) que abre outras opções que serão necessárias à construção e operação de sólidos geométricos.

Para dar sequência à construção de uma pirâmide, deve-se clicar sobre o ícone MAIS e o menu se estenderá apresentando as opções *Editar*, *Pontos*, *Retas e Polígonos*, *Sólidos*, *Planos*, *Círculos*, *Curvas*, *Transformar*, *Medições*, *Outras e Retas Especiais*. A Figura 3 mostra algumas dessas opções.

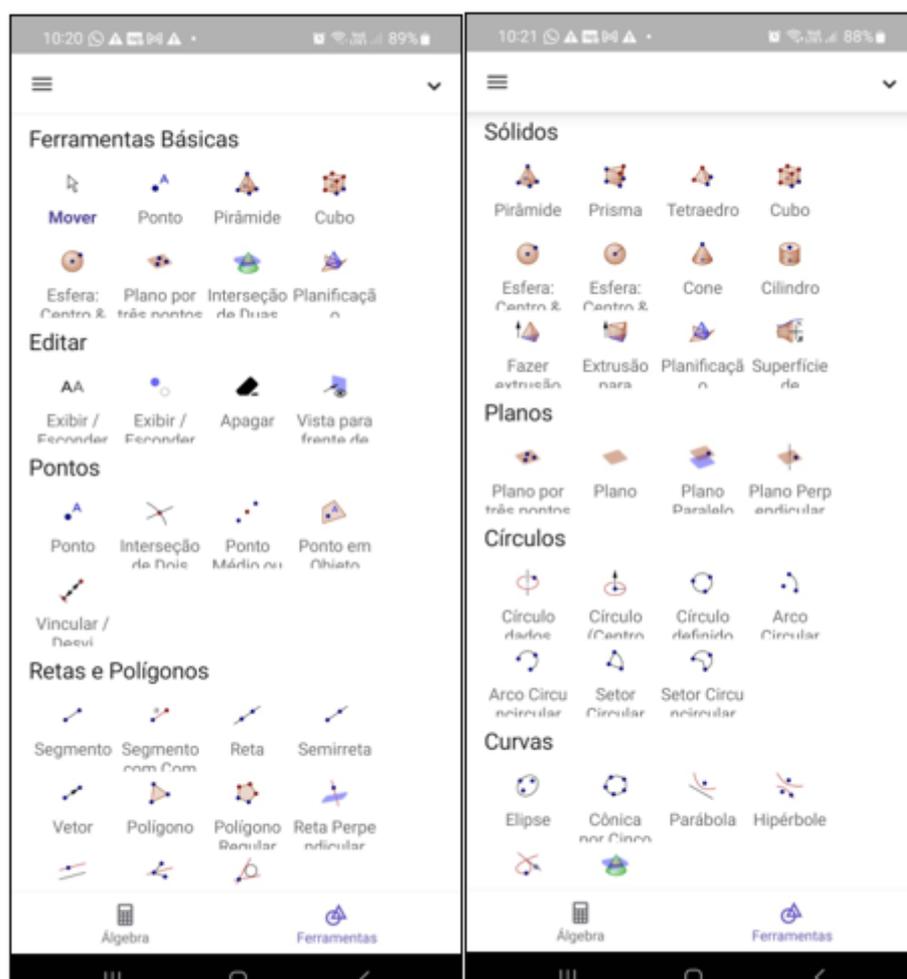


FIGURA 3: Imagem da tela do *smartphone* do menu de opções de ferramentas do GeoGebra 3D
FONTE: Acervo da Pesquisa

O passo inicial para a construção da pirâmide é marcar dois pontos sobre os eixos “y” e “x”. Considerando-se uma base quadrada para a pirâmide e desejando-se que ela fique centrada no eixo “z”, deve-se escolher, primeiramente, dois pontos em “diagonal”, por exemplo os pontos obtidos a partir de $y = -2$ e de $x = 2$. Para fixar estes pontos deve-se clicar na opção “Ponto”, no menu de Ferramentas Básicas, e, em seguida, selecionar os pontos. A Figura 4 mostra o resultado.

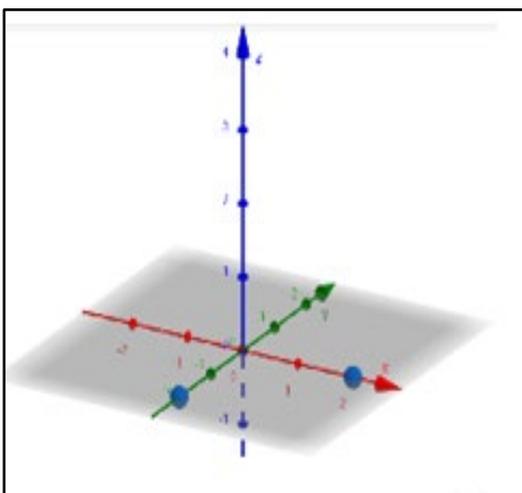


FIGURA 4: Imagem da tela do *smartphone* da marcação dos pontos sobre os eixos
FONTE: Acervo da Pesquisa

Após a marcação dos pontos sobre os eixos “y” e “x” deve-se escolher um polígono para a base. Considerando-se uma base quadrada, deve-se clicar na opção “Polígono Regular”, que está disponível em Retas e Polígonos e, em seguida, sobre os pontos marcados nos referidos eixos, onde será aberta uma caixa de diálogo para a escolha do número de vértices. Escolhendo-se “4”, e clicando-se em “OK” a base ficará em destaque. Isso é mostrado na Figura 5.

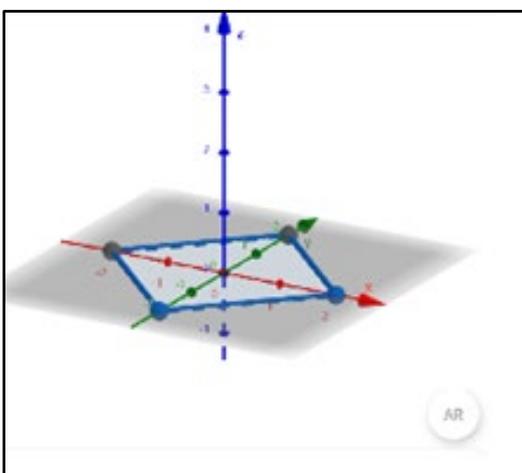


FIGURA 5: Imagem da tela do *smartphone* da marcação da base da pirâmide sobre o plano
FONTE: Acervo da Pesquisa

Seguindo-se a construção da pirâmide, deve-se clicar na opção “Pirâmide”, que está disponível em Ferramentas Básicas e, em seguida deve-se clicar sobre os pontos marcados para a base e a cor mudará, ficando laranja. O detalhe desse passo

é que se deve clicar nos pontos em sequência terminando com outro clique sobre o primeiro ponto clicado. Feito isso, aparecerá o destaque mostrado na Figura 6 (imagem à esquerda).

Por fim, deve-se clicar sobre um ponto do eixo vertical z , por exemplo no ponto $z = 3$. Feito isso, aparecerá a pirâmide completa. A Figura 6 (imagem à direita), mostra o resultado.

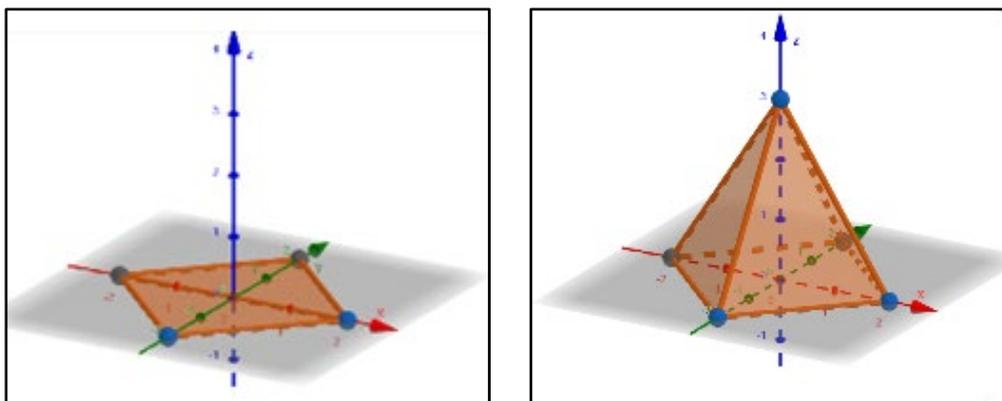


FIGURA 6: Imagem da tela do *smartphone* da base em destaque sobre o plano (imagem à esquerda) e da finalização da construção da pirâmide (imagem à direita)

FONTE: Acervo da Pesquisa

A utilização inicial da calculadora gráfica do GeoGebra 3D permite potencializar o trabalho do professor de Matemática e propicia o aumento na capacidade de visualização espacial dos alunos. De acordo com Scalabrin e Mussato:

De um ponto de vista amplo, as possibilidades que o GeoGebra 3D oferece para explorar e investigar os sólidos geométricos podem modificar o tipo de atividades que são propostas em sala de aula, bem como transformar a natureza do conhecimento matemático. Este ambiente possibilita que os alunos visualizem os objetos construídos de maneira diferente do que estão habituados a observarem nos livros didáticos. (SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 132)

Entende-se que a utilização dos recursos gráficos do GeoGebra 3D auxilia no processo de aprendizagem dos conceitos de Geometria Espacial, que é facilitado pela construção dos sólidos, sendo destacados nas imagens os aspectos visuais possibilitados pela manipulação (girar, aumentar, planificar, etc) bem como o fato de utilizar seu próprio dispositivo (*smartphone*) desperta no aluno maiores

motivação e engajamento durante a realização da atividade proposta (AMORIM, REIS, FERREIRA, 2024, p. 218).

2. Evidenciando os elementos constitutivos da pirâmide

Trabalhando a construção de uma pirâmide, o professor de Matemática pode evidenciar os elementos que a constituem, fazendo essa explanação por meio da construção da pirâmide utilizando a calculadora gráfica do GeoGebra 3D. Como exemplo, pode ser destacada a identificação das faces, das arestas, da altura, da base, do vértice, do apótema da base e do apótema da pirâmide. Considerando a pirâmide da Figura 7, a seguir, pode-se visualizar seus apótemas.

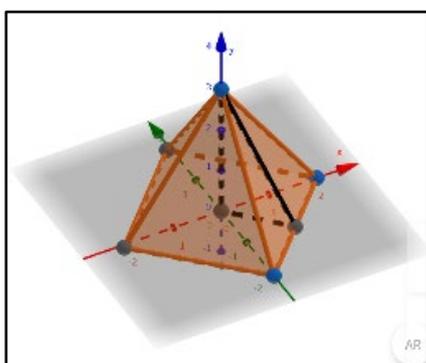


FIGURA 7: Imagem da tela do *smartphone* da pirâmide com seus apótemas em destaque na cor preta

FONTE: Acervo da Pesquisa

No caso da pirâmide de base quadrangular da Figura 7, o apótema da base está representado pelo segmento que une o ponto central da base da pirâmide e o ponto médio da aresta formada por $y = -2$ e por $x = 2$. Já o apótema da pirâmide é representado pelo segmento que une esse ponto médio da aresta formada por $y = -2$ e por $x = 2$ com o ponto determinado por $z = 3$, este último representando o vértice da pirâmide.

O professor, fazendo a construção anterior, pode questionar a seus alunos qual é a figura que representa a união do vértice da pirâmide com os apótemas: da base e da pirâmide. É fácil evidenciar que a figura delimitada por tais pontos representa um triângulo retângulo, visto que o segmento que une o vértice da pirâmide ao centro da base faz um ângulo reto com esta. Ademais, o segmento que une o vértice da pirâmide ao ponto médio da aresta formada por $y = -2$ e por $x = 2$, também faz com esta aresta um ângulo reto. Dessa forma, compreende-se a representação de outro triângulo retângulo, agora definido na face lateral do sólido.

Caso o professor queira comprovar para seus alunos que a figura formada pela união dos pontos que representa o vértice da pirâmide, o centro da base e o ponto médio da aresta formada por $y = -2$ e por $x = 2$ é um triângulo retângulo, basta que ele desabilite o plano e a pirâmide, deixando somente o triângulo retângulo em destaque. Isso é mostrado na Figura 8.



FIGURA 8: Imagem da tela do *smartphone* do triângulo retângulo obtido com a remoção da pirâmide, dos eixos e do plano

FONTE: Acervo da Pesquisa

Pode-se observar pela Figura 8 que os comandos de “Exibir Eixos” e “Exibir Plano” estão desabilitados e, para se fazer a remoção da pirâmide, basta desabilitar os pontos que a representam na opção “Álgebra”.

3. Utilizando a Realidade Aumentada para projetar a pirâmide construída

O recurso conhecido por Realidade Aumentada (RA) e que está disponível na calculadora gráfica do GeoGebra 3D constitui-se num marco tecnológico para auxiliar na visualização e no trabalho de conceitos abordados nas aulas de Geometria Espacial. Pode-se fazer a projeção dos sólidos geométricos construídos no GeoGebra 3D e interagir com essa projeção virtual no ambiente real.

Batista, Paulo e Eufrásio (2023) destacam que a RA:

[...] permite que objetos construídos virtualmente por meio de dispositivos móveis – *smartphones* ou *tablets* – possam ser projetados no ambiente físico pela pessoa que segura o aparelho nas mãos, sendo vistos como se estivessem coexistindo com os objetos físicos. (BATISTA; PAULO; EUFRÁSIO, 2023, p. 101)

Já Duarte, Alves e Montoito (2023) destacam a “imersão” por meio da RA:

A tecnologia RA proporciona representações de gráficos e sólidos geométricos com imersão, podendo contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, especialmente quando se trata de situações que envolvam representações em duas ou três dimensões, apresentando os objetos de forma mais clara do que o fazem suas representações nos livros didáticos e na lousa ou quadro negro tradicionais, nos quais os sólidos são representados de forma plana. (DUARTE; ALVES; MONTOITO, 2023, p. 148)

As possibilidades de utilização da calculadora gráfica do GeoGebra 3D no *smartphone*, bem como da RA, são múltiplas e variadas. Com relação aos professores, para encaminharem a mediação pedagógica entre novos conhecimentos e práticas educativas, envolvendo o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial, a utilização conjunta das ferramentas tecnológicas pode contribuir para a melhoria das suas práticas docentes. Já para os alunos, a construção, a visualização e a interação com sólidos geométricos, construídos por meio do GeoGebra 3D e projetados em ambiente real, pode potencializar a capacidade cognitiva desenvolvendo um incentivo crescente para torná-los sujeitos ativos no processo escolar. A Figura 9 mostra um exemplo dessa projeção virtual no ambiente real.

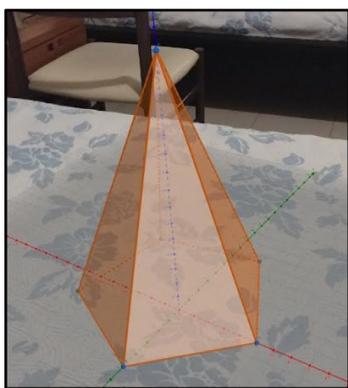


FIGURA 9: Imagem da tela do *smartphone* da projeção em RA no ambiente real
FONTE: Acervo da Pesquisa

Para se fazer essa projeção mostrada na Figura 9, deve-se clicar no botão “AR”, localizado na parte inferior direita da tela em que a figura foi construída e finalizada. Após clicar-se nesse botão, a AR irá projetar uma “malha” no ambiente real para fixar o local onde a projeção será feita. A Figura 10 evidencia esse passo.



FIGURA 10: Imagem da tela do *smartphone* da projeção de uma “malha” em ambiente real

FONTE: Acervo da Pesquisa

4. Apresentando algumas contribuições para a aprendizagem

Como já ressaltamos anteriormente, as atividades apresentadas na presente proposta para a ação encontram-se detalhadas na pesquisa de Amorim (2023). Nessa pesquisa, foram elaboradas, desenvolvidas e avaliadas atividades exploratórias com a utilização da calculadora gráfica do GeoGebra 3D para *smartphones*, bem como a projeção de sólidos geométricos em sala de aula, por meio da RA. Como resultado final da pesquisa, os alunos responderam a um questionário, de forma voluntária, destacando algumas possibilidades que foram observadas quando da utilização das ferramentas tecnológicas com as quais ainda não haviam trabalhado antes da realização da pesquisa.

O Quadro 1 traz algumas das respostas de alguns alunos participantes da pesquisa (sendo que optamos por não distinguir) ao Questionário Final.

Questões	Algumas Respostas
1) Como foi a sua participação e quais foram suas maiores dificuldades no desenvolvimento das atividades exploratórias com o <i>software</i> GeoGebra e a RA?	<i>Eu gostei bastante de trabalhar com o GeoGebra, não tive muitas dificuldades a não ser com o primeiro contato. Fora isso, com o tempo acabou se tornando mais fácil a experiência;</i>

	<p><i>Participei de todas as atividades propostas e, no início, tive dificuldade para mexer no aplicativo. Porém, com o tempo e com a ajuda do professor, do pesquisador e da minha dupla, ganhei mais experiência;</i></p> <p><i>Gostei de participar das atividades e minha participação foi de suma importância para me socializar com o GeoGebra. Minhas dificuldades foram por nunca ter tido contato com aprendizagem de forma eletrônica para Matemática como tivemos com o GeoGebra.</i></p>
<p>2) Quais foram as contribuições das atividades exploratórias para sua aprendizagem de Geometria Espacial? Em que conteúdos aconteceram as maiores contribuições?</p>	<p><i>Com as atividades exploratórias eu pude compreender melhor aquilo que víamos em teoria, além de poder aplicar com a RA, o que foi bem mais divertido;</i></p> <p><i>O quanto interessante é a forma que o aplicativo e as contas funcionam;</i></p> <p><i>Contribuiu para que eu conseguisse visualizar as figuras geométricas, sendo essa uma das maiores dificuldades quando se estuda Geometria Espacial.</i></p>
<p>3) Você gostaria de experimentar a utilização de Tecnologias Digitais para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos? Quais?</p>	<p><i>Sim. Acredito que seria muito bom ter algo assim para ajudar na matéria de trigonometria;</i></p> <p><i>Sim. Acredito que as tecnologias digitais vieram para facilitar nossas vidas. Com isso, utilizar essa ferramenta nos conteúdos possíveis, seria muito interessante;</i></p> <p><i>Sim. Todas as questões interligadas a formas geométricas.</i></p>

Quadro 1. Algumas respostas ao Questionário Final (AMORIM, 2023)

As respostas dos alunos participantes apontam que a utilização do GeoGebra 3D por meio da abordagem escolhida tornou as aulas mais atraentes, dinâmicas, interativas e interessantes. Também foi possível observar que as atividades desenvolvidas no aplicativo possibilitaram que a manipulação das pirâmides, de maneira virtual, em 3D ou em RA, reduzisse a dificuldade dos alunos na construção e visualização dos objetos geométricos, o que facilitou a sua compreensão dos conceitos de Geometria Espacial que foram investigados e melhorou o seu entendimento dos elementos geométricos da pirâmide.

Considerações Finais

Como as Tecnologias Digitais estão sempre em evolução para “diminuir etapas” e, também, o tempo de execução das tarefas, é necessário estar em sintonia com o que acontece nas sociedades com maior acesso tecnológico. Atualmente, podemos perceber uma transição, ainda que sutil, para o desenvolvimento e emprego das chamadas “inteligências artificiais” nas quais são dadas condições tecnológicas para que organismos autômatos (os chamados “*robots*” ou, simplesmente “*bots*”) possam realizar tarefas que, antes, eram afetas somente aos humanos. Com isso, criou-se um ambiente propício ao aprofundamento e melhoramento das máquinas, estando estas conectadas integralmente às sociedades mundiais e auxiliando os humanos a disporem de mais autonomia para que deixem de realizar tarefas mais repetitivas, passando a focar mais nos desenvolvimentos de novos produtos e tecnologias.

Dada a saída de uma era onde os professores, sobretudo os de Matemática, dispunham apenas de quadros, giz e livros didáticos, para uma era onde as Tecnologias Digitais, como os *smartphones*, estão presentes nas salas de aula e fora delas, é necessário que, cada vez mais, pesquisas acadêmicas sejam desenvolvidas e divulgadas para que o progresso tecnológico possa ser difundido em maior grau e escala para as camadas mais fragilizadas das sociedades.

Assim, conhecer o atual é ter uma base para olhar para o futuro, conhecendo, aprendendo, compreendendo, desenvolvendo e aperfeiçoando os produtos e as tecnologias já disponíveis, gerando conhecimentos acadêmicos e os difundindo nas plataformas disponíveis à Educação Matemática.

Referências

AMORIM, S. L. G. **A utilização integrada da Realidade Aumentada com o Software GeoGebra na perspectiva da aprendizagem móvel de Geometria Espacial.** 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2023.

AMORIM, S. L. G.; REIS, F. S.; FERREIRA, N. S. A utilização integrada da Realidade Aumentada no *Software* GeoGebra por meio de dispositivos móveis para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio. **Vidya**, v. 44, n. 1, p. 211-230, 2024.

BATISTA, C. C.; PAULO, R. M.; EUFRÁSIO, N. P. L. O Ensino de Geometria Espacial com Realidade Aumentada: contribuições de um estudo de aula. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 12, n. 29, p. 100-118, 2023.

DUARTE, C.; ALVES, R. S.; MONTOITO, R. Ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos: uma abordagem com Realidade Aumentada. **Vidya**, v. 43, n. 1, p. 147-161, 2023.

MACEDO, A. C.; SILVA, J. A.; BURIOL, T. M. Usando *smartphone* e Realidade Aumentada para estudar Geometria Espacial. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 14, n. 2, p. 1-10, 2016.

MENEGAIS, D. A. N. F.; FERREIRA, V. L. D.; FAGUNDES, D. S.; PENHA, J. T. A utilização das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Geometria Espacial: a percepção dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Cadernos do Aplicação**, v. 35, n. 1, p. 1-13, 2022.

SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S. Geometria Espacial com o Software GeoGebra: uma proposta de atividades investigativas para o ensino de pirâmides. **Boletim do Museu Integrado de Roraima**, v. 13, n. 1, p. 123-145, 2020.

SOUZA, G. M. F. **Uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria Espacial**. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

Enviado:15/06/2024

Aceito: 13/08/2024