https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p123-140

A Geometria Esférica e o GeoGebra: abordagem trigonométrica para solucionar problemas de navegação no globo terrestre

Spherical Geometry and GeoGebra: trigonometric approach to solve navigation problems on the globe

MAURÍCIO ATLEZ SANTOS [1]
https://orcid.org/0009-0004-8800-036X

CLAUDIA CANDIDA PANSONATO [2]
https://orcid.org/0000-0002-7155-1964

RESUMO

Apresentamos neste trabalho alguns resultados sobre trigonometria esférica e os empregamos na resolução de problemas de navegação envolvendo distâncias entre pontos sobre o globo terrestre. Com o intuito de facilitar a visualização e a localização, desenvolvemos um applet no GeoGebra 3D que simula o planeta Terra, exibe pontos na superfície terrestre ao fornecer a latitude e a longitude e calcula a distância entre eles. Concluímos que o GeoGebra é uma ferramenta eficaz no estudo da Geometria Esférica, podendo ser utilizada tanto nos cursos de licenciatura como também na educação básica.

Palavras-chave: *GeoGebra; Geometrias Não- Euclidianas; Trigonometria Esférica.*

ABSTRACT

In this work, we present some results on spherical trigonometry and use them to solve navigation problems involving distances between points on the globe. In order to facilitate visualization and location, we developed an applet in GeoGebra 3D that simulates planet Earth, displays points on the Earth's surface by providing latitude and longitude and calculates the distance between them. We conclude that GeoGebra is an effective tool for studying Spherical Geometry and can be used both in undergraduate courses and in basic education.

Key-words: *GeoGebra; Non-Euclidean Geometries; Spherical Trigonometry.*

Introdução

Ao longo da evolução humana, a geometria desempenhou um papel essencial, atuando como um elo entre a curiosidade inata do ser humano e a compreensão do mundo ao seu redor. Desde os primórdios, quando nossos antepassados usavam noções geométricas rudimentares para construir abrigos e delinear territórios, até os avanços contemporâneos em ciência e tecnologia, a geometria tem sido uma ferramenta fundamental.

[1] Universidade Federal de Santa Maria - mauricioatlezsantos@gmail.com

[2] Universidade Federal de Santa Maria - claudia.pansonato@ufsm.br

De acordo com Strogatz (2022, p. 25), sobre essa conexão da geometria com as civilizações temos:

> Juntamente com os números, as formas também eram importantes. No Egito Antigo, a medição de linhas e ângulos era de suma importância. Todos os anos, os agrimensores tinham de redesenhar os limites dos campos dos agricultores, pois as inundações do Nilo os destruíam no verão. Mais tarde, essa atividade deu nome ao estudo das formas em geral: o termo "geometria" vem das palavras gregas *gē*, "terra", e *metrēs*, "medidor". (STROGATZ, 2022, p. 25).

A formalização da Geometria teve seu apogeu por volta de 300 a.C. quando o matemático grego de Alexandria, Euclides, sistematizou e organizou boa parte do conhecimento de Geometria da época na sua famosa obra Elementos, fundamentada em cinco postulados e composta por treze volumes.

O quinto postulado, cuja formulação é equivalente à afirmação: "Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada", gerou muita controvérsia desde seu aparecimento, pois muitos questionavam se de fato seria um postulado, ou se poderia ser obtido como consequência dos demais. Os questionamentos referentes ao quinto postulado perduraram por mais de dois mil anos e sua negação deu origem às chamadas geometrias não euclidianas.

> O início do século XIX encontrou o obstinado enigma do Quinto Postulado ainda sem solução. Mas não se deve ficar com a impressão de que os esforços para provar o Postulado, feitos ao longo de mais de vinte séculos, tenham sido totalmente infrutíferos. Lenta, mas seguramente, eles direcionaram as especulações dos geômetras a ponto em que a descoberta da geometria Não Euclidiana não poderia ser adiada por muito tempo (WOLFE, 1945, p. 44, tradução nossa).

Além disto, tais questionamentos permitiram formulações mais precisas da geometria euclidiana, como a do matemático alemão David Hilbert (1862–1943). Nesta formulação, a negação do quinto postulado dá origem à Geometria Hiperbólica, pois os postulados anteriores permitem concluir a existência de reta paralela através de um ponto à reta dada (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 56).

A Geometria Elíptica surge quando, juntamente com a negação do quinto postulado (quando não se admite a existência de reta paralela a uma reta dada através de um ponto), os axiomas de ordem são substituídos pelos axiomas de separação (COSTA; SANTOS, 1990, p.19). A superfície de uma esfera, com as circunferências máximas sendo adotadas como retas, é um modelo de Geometria Elíptica (WOLFE, 1945, p. 177). É o ambiente natural para o estudo de questões relacionadas à distância entre pontos no globo terrestre. As relações trigonométricas na esfera nos permitem resolver questões que surgem em astronomia e navegação.

Importante destacar que iremos considerar o formato do globo terrestre como uma superfície esférica, embora, na cartografia, a forma da superfície terrestre seja definida como uma superfície equipotencial do campo gravitacional da Terra, chamada geoide. Em outras situações, adota-se o formato como sendo o de um elipsoide (IBGE, 2024).

Neste trabalho, abordamos duas relações trigonométricas fundamentais na esfera, a *Lei dos Cossenos para os Lados* e a *Lei dos Cossenos para os Ângulos*, que serão aplicadas na resolução de problemas relacionados à navegação. A solução de tais problemas exige a localização de pontos no globo, dadas sua latitude e longitude. O uso de um software de geometria dinâmica possibilita uma maior interatividade à medida em que se manipulam os pontos sobre a superfície da esfera. Além disso, ele facilita a visualização, permitindo assim uma melhor compreensão dos problemas. Nesse sentido, desenvolvemos um *applet* no GeoGebra 3D que, além de localizar os pontos sobre a superfície esférica, também calcula distâncias em função da latitude, longitude e determina a direção (*bearing*).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na primeira seção, fazemos uma breve retomada de alguns conceitos matemáticos fundamentais da Geometria Esférica, como geodésicas e triângulos esféricos e enunciamos as Leis dos Cossenos. Além disso, exploramos os conceitos de coordenadas geográficas, abordando aspectos como latitude, longitude e orientações que são fundamentos intrínsecos à Geografia.

Na segunda seção, apresentamos o material que desenvolvemos no software GeoGebra e também esquematizamos a construção. Destacamos as escolhas de *design* e a seleção de algoritmos para calcular distâncias com base em coordenadas geográficas. Comentamos um pouco sobre a usabilidade e a eficiência, assegurando que o *applet* seja intuitivo durante a manipulação dos pontos.

Na terceira seção, exploramos aplicações práticas das Leis dos Cossenos na superfície esférica, destacando sua utilidade em problemas do mundo real. Adicionalmente, apresentamos desafios específicos que envolvem o cálculo de distâncias entre pontos na superfície terrestre, proporcionando uma abordagem abrangente e aplicada ao tema.

1. Revisão Teórica

1.1 Conceitos de Geometria Esférica

Nesta seção abordamos alguns tópicos relevantes da Geometria Elíptica, baseando-se no modelo da esfera. O conceito de reta utilizado é o “caminho mais curto conectando dois pontos”, denominado geodésica. Na superfície esférica, as geodésicas são as circunferências máximas, ou seja, são as circunferências obtidas pela interseção da superfície esférica com um plano que contém o centro dessa esfera, ou equivalentemente, as circunferências máximas são aquelas que têm o mesmo centro e raio que a esfera. Os segmentos de “reta” conectando dois pontos na superfície esférica são dados por arcos de circunferências máximas. Este resultado pode ser visto com maiores detalhes em Carmo (2016, p. 249).

Para os conceitos e definições que seguem, consideramos uma superfície esférica centrada em um ponto O e com raio R arbitrário.

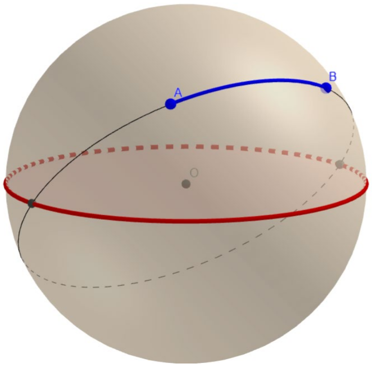

FIGURA 1: Circunferência máxima em vermelho e arco de circunferência máxima em azul
FONTE: Os Autores (2023)

Definição 1. Um triângulo esférico é uma figura formada na superfície esférica por três arcos de circunferências máximas que se intersectam aos pares em três vértices.

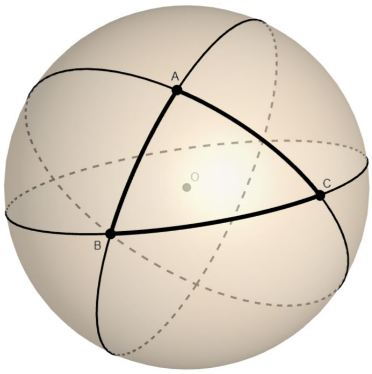

FIGURA 2: Exemplo de triângulo esférico ABC
FONTE: Os Autores (2023)

Definição 2. Se ABC é um triângulo esférico de vértices $A, B\ e\ C$, cujos lados são dados pelos arcos a, b e c, que são opostos aos respectivos vértices, então temos seis ângulos associados ao triângulo esférico, a saber, os ângulos relativos a cada vértice, nomeados como $\hat{A}, \hat{B}\ e\ \hat{C}$ (que são determinados pelas retas tangentes aos arcos) e os ângulos relativos aos arcos $\hat{a} = B\hat{O}C, \hat{b} = A\hat{O}C$ e $\hat{c} = A\hat{O}B$ (que têm vértice no centro O da esfera).

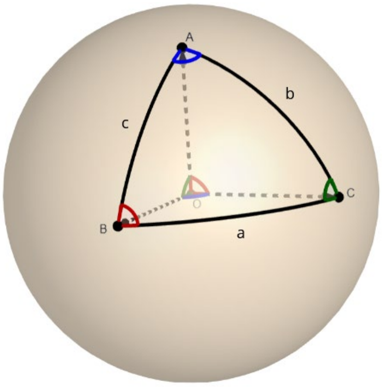

FIGURA 3: Ângulos associados a um triângulo esférico[3]
FONTE: Os Autores (2023)

Os principais resultados utilizados neste trabalho são conhecidos por *Lei dos Cossenos para os Lados* e *Lei dos Cossenos para os Ângulos*.

Teorema 1 (Lei dos Cossenos para os Lados). Se ABC é um triângulo esférico de vértices A, B, C e com lados opostos a, b e c respectivamente, então

$$cos(\hat{a}) = cos(\hat{b})cos(\hat{c}) + sen(\hat{b})sen(\hat{c})cos(\hat{A}).$$

Teorema 2 (Lei dos Cossenos para os Ângulos). Se ABC é um triângulo esférico de vértices A, B, C e com lados opostos a, b e c respectivamente, então

$$cos(\hat{A}) = -cos(\hat{B})cos(\hat{C}) + sen(\hat{B})sen(\hat{C})cos(\hat{a}).$$

A demonstração de cada um destes teoremas pode ser encontrada em Jennings (1994, p. 54-59).

1.2. Conceitos de Geografia

Com o objetivo de aplicar os resultados da Geometria Esférica na resolução de problemas envolvendo distâncias sobre o globo terrestre, precisamos esclarecer alguns conceitos de geografia, principalmente noções relacionadas ao sistema de coordenadas geográficas, para isso as informações que seguem são baseadas no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2024).

Primeiramente, é fundamental compreender que existem linhas imaginárias traçadas ao longo da superfície da Terra denominadas meridianos e paralelos, as quais são utilizadas para estabelecer as coordenadas geográficas. Uma dessas linhas imaginárias está associada aos polos geográficos da

[3] Acesso ao *applet* Ângulos de um Triângulo Esférico - https://www.geogebra.org/m/wkyjrdca#material/mxjmqvjk

Terra que são os pontos extremos do planeta (polo Norte e polo Sul) localizados no eixo do movimento de rotação terrestre.

Os *meridianos* são semicircunferências máximas conectando os polos, linhas imaginárias que atravessam a Terra no sentido vertical. O meridiano adotado por convenção como origem é chamado de Meridiano de Greenwich.

Os *paralelos* são circunferências horizontais com centros ao longo do eixo de rotação, essas circunferências diminuem de raio à medida que seu centro se direciona para o polo Norte ou para o polo Sul. O paralelo central mais significativo é conhecido como linha do Equador que é uma circunferência máxima.

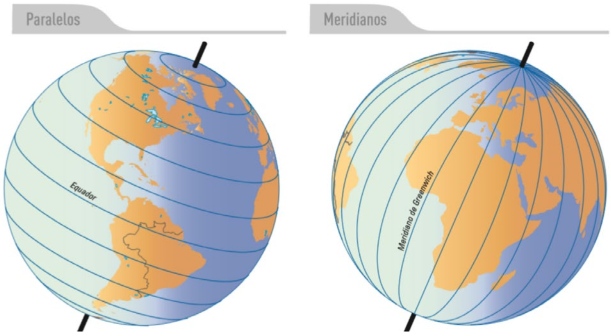

FIGURA 4: Paralelos e Meridianos
FONTE: Nerdprofessor (2017)

As *coordenadas geográficas* representam o sistema de localização de um ponto na superfície terrestre. Elas são obtidas por meio da interseção de um meridiano com um paralelo, determinando assim a posição de um ponto por meio de sua latitude e longitude.

A *latitude* de um ponto é a medida, em graus, do arco da circunferência máxima que conecta um determinado local até a linha do Equador. Os valores da latitude variam de 0° (linha do Equador) a 90° (polos) devendo ser indicado também se o ponto está no hemisfério Sul (S) ou no hemisfério Norte (N).

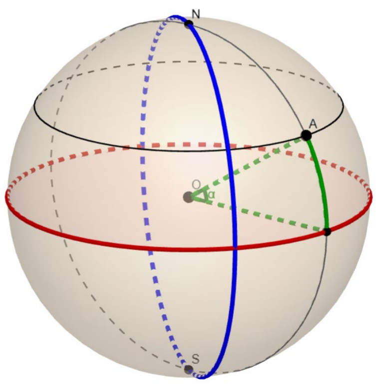

FIGURA 5: Latitude α de um ponto A
FONTE: Os Autores (2023)

A *longitude* de um ponto é a distância, em graus, entre o meridiano de Greenwich e o meridiano local, ou seja, é o ângulo entre duas circunferências máximas, uma ligando o ponto aos polos Norte (N) e Sul (S) e o meridiano de Greenwich. Os valores da longitude variam de 0° (Greenwich) a 180°, devendo ser indicado se o ponto está a leste (L) ou oeste (O) do meridiano de Greenwich.

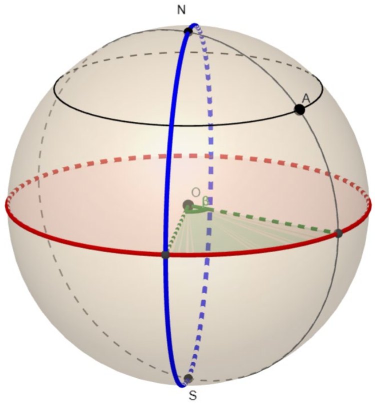

FIGURA 6: Longitude β de um ponto A
FONTE: Os Autores (2023)

Outro conceito importante a ser abordado é denominado em inglês como *bearing*[4], em português, podemos compreendê-lo como rumo ou direção. “O sistema de *bearing* divide a direção em quatro quadrantes de 90 graus. Neste sistema, o norte e o sul são as direções dominantes. As medições são determinadas em graus a partir de uma dessas direções.”(PHYSICAL GEOGRAPHY, 2009, tradução nossa). Para uma melhor compreensão, observe a figura 7, por exemplo, a direção *(bearing)* do ponto A é N 21º L, a direção do ponto B é N 65º O, a direção do ponto C é S 32º O e a direção do ponto D é S 77º L. As setas indicam o sentido que os ângulos devem ser medidos.

[4] Para mais informações acesse - https://www.youtube.com/watch?v=cSKAqfGXOPI&t=981s

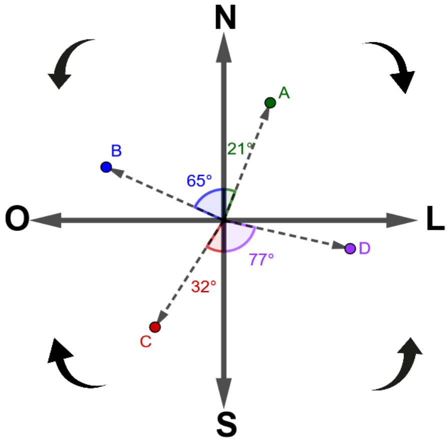

FIGURA 7: *Bearings* de pontos A, B, C e D
FONTE: O Autor (2023)

Os conceitos acima estão relacionados à Geografia, para compreendê-los melhor foram desenvolvidos no GeoGebra materiais para melhor interpretar latitude, longitude e *bearings*. No rodapé desta página seguem dois links, o primeiro[5] relativo à latitude e longitude e o segundo[6] relativo a *bearings.*

2. *Applet* do GeoGebra

Os problemas que serão abordados na próxima seção exigem uma visualização dos pontos sobre o globo terrestre. Antes de aplicar a *Lei dos Cossenos*, é necessário calcular os arcos envolvidos a partir dos dados fornecidos. Nesse sentido percebemos que a utilização do GeoGebra nos permite obter uma representação visual da estratégia utilizada.

A partir disso, nos sentimos estimulados a gerar um material que nos possibilitasse resolver problemas similares, generalizando e produzindo um instrumento visual e automático. Assim, desenvolvemos um *applet* no GeoGebra que nos permite manipular os pontos sobre a superfície da esfera e calcular distâncias no globo a partir da latitude e longitude.

Abaixo segue uma ilustração do material desenvolvido, o link de acesso para o leitor interessado segue no final da página[7].

---

[5] Acesso ao *applet* Latitude e Longitude - https://www.geogebra.org/m/wkyjrdca#material/dpxeqapd
[6] Acesso ao *applet* Bearings - https://www.geogebra.org/m/wkyjrdca#material/mk9tkqzz
[7] Acesso ao *applet* Distância entre Duas Localidades - https://www.geogebra.org/m/wkyjrdca#material/hm3paahr

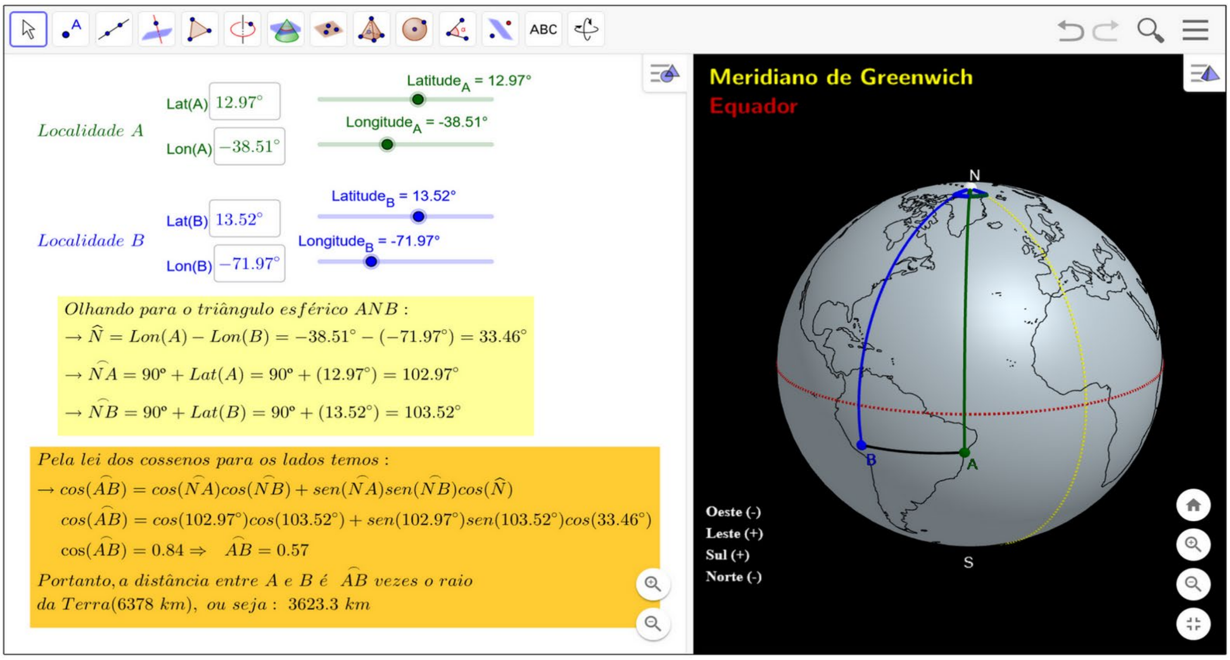

FIGURA 8: *Applet* do GeoGebra
FONTE: Os Autores (2024)

A seguir apresentamos, de forma resumida e sintética, as ferramentas matemáticas utilizadas para visualização, generalização, automação e interação na construção do *applet*. Importante frisar que os passos a seguir não são rígidos e fixos, nesse caso, foram os métodos que nós autores utilizamos para conseguir construir o material. Existem diversas maneiras de interpretar e desenvolver um material digital, levando em conta a quantidade de recursos disponíveis dentro do GeoGebra.

Salientamos também que nos itens a seguir é feito apenas um esboço das etapas envolvidas na construção. Este esboço oferece uma visão geral do processo, destacando as principais etapas a serem consideradas. Ressaltamos que essas etapas representam apenas ideias gerais e não constituem um passo a passo detalhado.

1. Iniciar o Geogebra: Fazer o download do software GeoGebra Clássico ou usando a versão online.

2. Abrir a "Janela de Visualização 3D": Construir uma esfera com centro no ponto $O = (0,0,0)$ e raio R qualquer, utilizamos *4,995* como raio para posteriormente conseguir exibir as fronteiras políticas do globo.

3. Determinar a Linha do Equador: Interseção do plano xy com a superfície esférica.

4. Identificar os Polos: Polo Norte (N) e o Polo Sul (S), extremidades da esfera, pontos de interseção do eixo z com a superfície esférica.

Opcional: Para esboçar as fronteiras políticas dos continentes utilizamos um código extenso, o passo a passo está disponível em documento audiovisual no YouTube[8].

5. Definir o Meridiano de Greenwich: Construir a semicircunferência máxima que é dada pela interseção da superfície esférica com o semiplano xz, onde $x \geq 0$.

6. Configurar Controles Deslizantes: Dois que serão utilizados para indicar a latitude com valores em ângulo no intervalo -90º a 90º e outros dois que serão utilizados para indicar a longitude com valores em ângulo no intervalo de -180º a 180º, todos com incremento 0,01º.

Frisemos que o incremento tem papel essencial na busca pela otimização dos resultados. Quanto menor for o incremento, mais eficaz será o alcance do resultado desejado nos cálculos. Inicialmente, utilizamos um incremento de 1º, resultando em dados consideravelmente imprecisos. Ao ajustarmos para 0,0001º, a precisão tornou-se quase impecável, mas o uso dos controles deslizantes se tornava mais difícil. Dessa forma, optamos por precisão e facilidade de utilização do usuário, motivo pelo qual utilizamos 0,01º.

7. Estabelecer Pontos na Superfície da Esfera: Determinar pela "Janela de Álgebra" dois pontos quaisquer na superfície da esfera, por exemplo os pontos A e B, utilizando coordenadas esféricas associadas aos controles deslizantes construídos anteriormente.

Opcional: Utilizar a ferramenta "Caixa de Entrada" para definir um ambiente de digitação que auxilia na escolha mais precisa das coordenadas das localidades A e B.

8. Exibir Ângulos Geometricamente: Os ângulos que determinam a longitude de cada ponto.

9. Construir o Triângulo ANB: Usar arcos de circunferência para representar o triângulo esférico ANB (Figura 8).

10. Calcular o Ângulo $A\hat{N}B$: Para determinar o valor do ângulo $A\hat{N}B$ na "Janela de Álgebra" fazemos a diferença em módulo das longitudes dos pontos criados.

11. Personalizar a Visualização Dinâmica: Utilizar a ferramenta de "Texto" para incorporar cálculos e comandos avançados na "Janela de Álgebra", garantindo uma experiência dinâmica ao ajustar os controles deslizantes.

Por fim, desenvolvemos diversos *applets* para facilitar nossa compreensão dos temas abordados, bem como a esquematização básica desse *applet* sobre distância entre pontos na superfície terrestre, por considerarmos ser o mais interessante e relevante para o usuário. Ainda, disponibilizamos o link de acesso para o GeoGebra Book[9], onde estão anexados todos os materiais desenvolvidos no nosso trabalho.

[8] *How to Construct Earth use GeoGebra*: https://www.youtube.com/watch?v=k1ugd0yBj6I
[9] GeoGebra Book: https://www.geogebra.org/m/wkyjrdca

3. Os Problemas de Navegação

O problema 1 foi adaptado do livro "*Modern Geometry with Applications*", Jennings (1994) e os problemas 2 e 3 foram criados pelos autores, os dados utilizados foram retirados do site "Cidade-Brasil" (2012).

Gostaríamos de destacar que os esboços dos triângulos esféricos e os cálculos associados podem ser melhor compreendidos através do uso do nosso *applet*. Ao utilizá-lo, o leitor pode simplesmente inserir os dados de longitude e latitude das localidades envolvidas para uma visualização mais eficiente.

Problema 1) Se um morador de Porto Alegre decide aproveitar suas férias de verão e ter a oportunidade de viajar pela primeira vez de avião para Salvador, qual a distância total que ele irá percorrer em quilômetros? Qual o tempo estimado de viagem se o avião andar a uma velocidade média de 820 km/h? Considere Porto Alegre com latitude 30,02º Sul e longitude 51,22º Oeste e Salvador com latitude 12,97º Sul e longitude 38,51º Oeste.

Solução: A solução do problema é dada pela construção do triângulo esférico de vértices Porto Alegre (A), o Polo Norte (P) e Salvador (S).

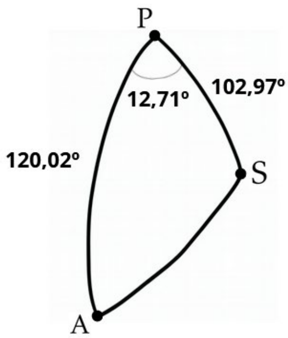

FIGURA 9: Esboço do problema 1
FONTE: Os Autores (2023)

Como os Estados estão localizados no Hemisfério Sul, para determinar o valor dos arcos AP e SP, é feita a soma entre a latitude de P (90°) e a latitude do local, ou seja:

$$arc(AP) = 90º + 30{,}02º = 120{,}02º;$$

$$arc(SP) = 90º + 12{,}97º = 102{,}97º$$

Para determinar o ângulo $A\hat{P}S$ é feita a diferença entre a maior longitude com a menor longitude, isto é $A\hat{P}S = 51{,}22º - 38{,}51º = 12{,}71º$.

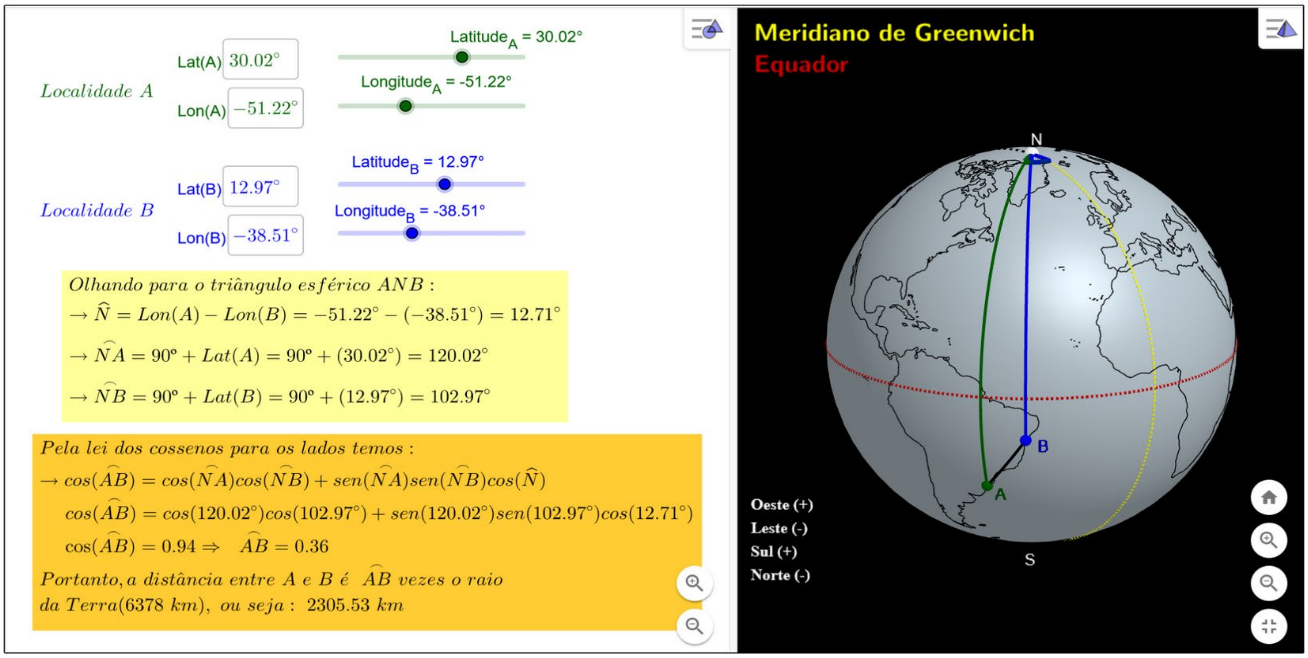

FIGURA 10: Cálculo do problema 1 utilizando o *applet*
FONTE: Os Autores (2024)

Aplicando a Lei dos cossenos para os lados, temos:

$$cos(AS) = cos(AP)cos(SP) + sen(AP)sen(SP)cos(A\hat{P}S) = cos(120{,}02)cos(102{,}97) + sen(120{,}02)sen(103)cos(12{,}71) \approx 0{,}935 \Rightarrow cos(AS) \approx 0{,}935 \Rightarrow arccos(cos(AS)) \approx arccos(0{,}935) \Rightarrow AS \approx 0{,}361\,rad.$$

A distância de Porto Alegre(A) para Salvador(S) é dada por $AS.\,6378\ km \approx 0{,}361.6378\ km \approx \underline{2305{,}53\ km}$.

O tempo t de duração da viagem é dado pela divisão do percurso total pela velocidade média do avião, ou seja, $t \approx \frac{2305{,}53\ km}{820\ km/h} \approx 2{,}81\ h \approx \underline{2\ horas\ e\ \ 48\ minutos}$.

***Problema* 2)** Encontrar a distância entre Fernando de Noronha (F) e Natal (N) e entre Fernando de Noronha e Recife (R), sendo que os valores aproximados da latitude e longitude estão dispostos no quadro abaixo:

Estado	**Latitude**	**Longitude**
Fernando de Noronha(F)	3,84º Sul	32,41º Oeste
Natal(N)	5,79º Sul	35,21º Oeste
Recife(R)	8,05º Sul	34,88º Oeste

FIGURA 11: Imagem do quadro com dados
FONTE: O Autor (2023)

<u>Solução</u>: A solução do problema é dada pela construção dos triângulos esféricos NRP (que auxilia a determinar a distância NR), NFP (que auxilia a determinar a distância NF) e PFR (que auxilia a determinar a distância FR). Note que o vértice P é o Polo Norte de latitude 90º.

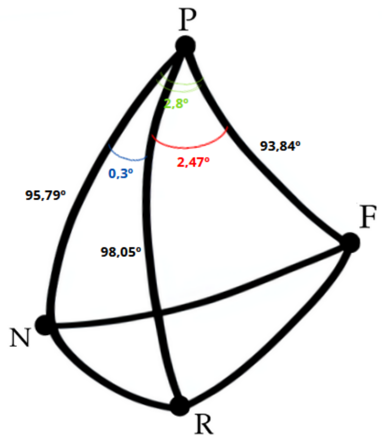

FIGURA 12: Esboço do problema 2
FONTE: Os Autores (2023)

Como todos Estados estão localizados no Hemisfério Sul, para determinar o valor dos arcos NP, FP e RP, é feita a soma entre a latitude de P e a latitude do local, ou seja:

$$arc(NP) = 90^\circ + 5{,}79^\circ = 95{,}79^\circ;$$

$$arc(FP) = 90^\circ + 3{,}84^\circ = 93{,}84^\circ;$$

$$arc(RP) = 90^\circ + 8{,}05^\circ = 98{,}05^\circ.$$

Para determinar os ângulos $N\hat{P}R, N\hat{P}F$ e $R\hat{P}F$ é feita a diferença entre a maior longitude com a menor longitude, isto é:

$$N\hat{P}R = 35{,}21^\circ - 34{,}88^\circ = 0{,}33^\circ;$$

$$N\hat{P}F = 35{,}21^\circ - 32{,}41^\circ = 2{,}8^\circ;$$

$$R\hat{P}F = 34{,}88^\circ - 32{,}41^\circ = 2{,}47^\circ.$$

Com esboço feito e os dados coletados, devemos focar no problema, determinar as distâncias entre NR, NF e RF. Para isso, é necessário utilizar a *Lei dos Cossenos para os lados*, e é importante ressaltar que o resultado obtido corresponde à medida do arco e, portanto, para determinar a distância é necessário multiplicar este valor pelo raio da terra.

(I) $cos(NR) = cos(NP)cos(RP) + sen(NP)sen(RP)cos(N\hat{P}R) = cos(95{,}79)cos(98{,}05) + sen(95{,}79)sen(98{,}05)cos(0{,}33) \approx 0{,}9992 \Rightarrow cos(NR) \approx 0{,}9992 \Rightarrow arccos(cos(NR)) \approx arccos(0{,}9992) \Rightarrow NR \approx 0{,}0399\, rad.$

A distância de Natal(N) para Recife(R) é dada por $NR.6378\ km \approx 0{,}0399.6378\ km \approx \underline{254{,}20\ km}$.

(II) $cos(NF) = cos(NP)cos(FP) + sen(NP)sen(FP)cos(N\hat{P}F) = cos(95{,}79)cos(93{,}84) + sen(95{,}79)sen(93{,}84)cos(2{,}8) \approx 0{,}998 \Rightarrow cos(NF) \approx 0{,}998 \Rightarrow arccos(cos(NF)) \approx arccos(0{,}998) \Rightarrow NF \approx 0{,}059\ rad.$

A distância de Natal(N) para Fernando de Noronha(F) é dada por $NF.6378\ km \approx 0{,}056.6378\ km \approx \underline{378{,}91\ km}$.

(III) $cos(RF) = cos(RP)cos(FP) + sen(RP)sen(FP)cos(N\hat{P}F) = cos(98{,}05)cos(93{,}84) + sen(98{,}05)sen(93{,}84)cos(2{,}47) \approx 0{,}996 \Rightarrow cos(RF) \approx 0{,}996 \Rightarrow arccos(cos(RF)) \approx arccos(0{,}996) \Rightarrow RF \approx 0{,}085\ rad.$

A distância de Recife(R) para Fernando de Noronha(F) é dada por $RF.6378\ km \approx 0{,}085.6378\ km \approx \underline{542{,}57\ km}$.

Uma observação importante é que, de acordo com o site "Distância entre Cidades" (2024) as respectivas distâncias são: $253{,}90\ km, 378{,}73\ km$ e $542{,}35\ km$. É importante notar que, ao aproximarmos cuidadosamente os dados de latitude e longitude da melhor maneira possível, os resultados finais obtidos possuem uma precisão considerável.

Finalizamos esta seção apresentando um problema que faz uso do conceito de direção (*bearing*). Observamos que para a solução deste problema é necessário utilizar também a *Lei dos Cossenos para os Ângulos* que não foi empregada em nenhum dos exemplos anteriores e que não está contemplada em nosso *applet*.

Problema 3) Radioreceptores em São Paulo (SP) e em Recife (PE), detectaram sinais de um navio perdido. Os receptores indicam que o navio está localizado em uma direção que faz um ângulo de N 74° L com São Paulo e S 22° L com Recife. Calcule a latitude e a longitude aproximadas do navio, bem como a distância dele em relação a São Paulo e a Recife. Considere as aproximações das coordenadas geográficas de São Paulo 23,54º Sul e 46,63º Oeste e de Recife 8,05º Sul e 34,88º Oeste.

Solução: Primeiro vamos construir os triângulos esféricos associados, considerando S como São Paulo e o ponto R como Recife. Além disso, incluímos arcos de circunferências pontilhados que determinam a direção do navio a partir de cada ponto e consideramos sua posição o ponto O.

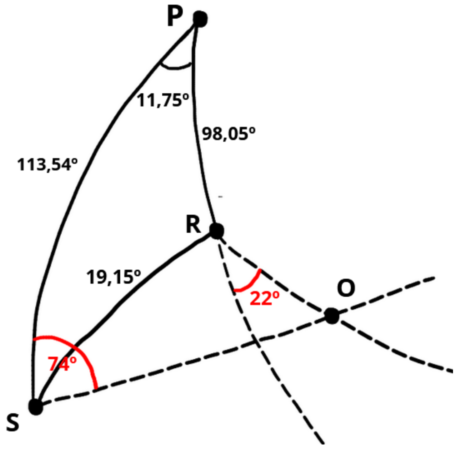

FIGURA 13: Esboço 1 do problema 3
FONTE: Os Autores (2023)

Analisando o triângulo esférico SPR, com o vértice P como o Polo Norte de latitude 90º, vamos determinar os valores dos arcos. Como os pontos estão no hemisfério sul, calculamos a soma entre a latitude de P e a latitude do local:

$$arc(SP) = 90º + 23{,}54º = 113{,}54º;$$

$$arc(RP) = 90º + 8{,}05º = 98{,}05º.$$

Para determinar o ângulo $S\hat{P}R$ é feita a diferença entre as longitudes de S e R:

$$S\hat{P}R = 46{,}63º - 34{,}88º = 11{,}75º$$

Para determinar o valor, em graus, do arco que conecta S a R, utilizamos a *Lei dos Cossenos para os Lados*, obtendo que $arc(SR) \approx 0{,}334\, rad \approx 19{,}15º$.

Vamos determinar a direção, em graus, de São Paulo para Recife e de Recife para São Paulo, utilizando a *Lei dos Cossenos para os Lados* (só que neste caso para obter o ângulo em função dos arcos), fazemos isso utilizando nosso outro *applet* denominado Direção entre Duas Localidades[10]. A direção de S para R, ângulo $P\hat{S}R$, é 37,92º (*bearing* N 37,92º L) e a direção de R para S, ângulo $P\hat{R}S$, é 145,31º (*bearing*, S 34,69º O, este valor é dado pela diferença 180º - 145,31º).

Determinemos agora o valor do arco SO, isto é, a distância entre São Paulo e o Navio. Conseguimos determinar o valor do ângulo $R\hat{S}O = 36{,}08º$ (calculando a diferença entre $O\hat{S}P$ e $P\hat{S}R$), $S\hat{R}O = 56{,}69º + 22º$, ($P\hat{R}S + S\hat{R}O + O\hat{R}P = 360º$, onde determinamos $O\hat{R}P = 180º - 22º$) e $R\hat{O}S = 88{,}79º$ (utilizando a *Lei dos Cossenos para Ângulos* no triângulo SRO).

[10] Acesso ao *applet* Direção entre Duas Localidades - https://www.geogebra.org/m/wkyjrdca#material/ybqgdvmr

Com esses dados determinamos SO e RO pela *Lei dos Cossenos para Ângulos* no triângulo SRO. Assim,

$$arc(SO) = 15{,}91^{\circ} \text{ e } arc(RO) = 11{,}14^{\circ}.$$

Então, a distância entre São Paulo e o navio é $\underline{1772{,}18\ km}$ e a distância entre Recife e o navio é $\underline{1240{,}66\ km}$.

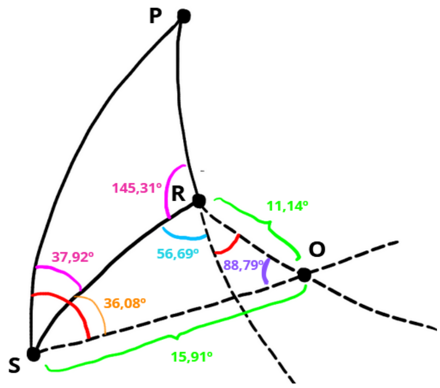

FIGURA 14: Esboço 2 do problema 3
FONTE: Os Autores (2023)

Agora para determinarmos a latitude e longitude do navio devemos construir o triângulo esférico RPO, do qual, já é possível determinar o valor do arco PO, pela *Lei dos Cossenos para os Lados*, ou seja:

$arc(PO) = 108{,}35^{\circ}$, portanto, a latitude do navio é de $\underline{18{,}35}^{\circ}$S.

Para a longitude, pela mesma Lei, descobrimos que o ângulo $R\hat{P}O = 4{,}37^{\circ}$, logo a longitude do navio é determinada pela diferença entre o ângulo $R\hat{P}O$ e a longitude de Recife, ou seja:

$$34{,}88^{\circ} - 4{,}37^{\circ} = \underline{30{,}51}^{\circ}\text{O}.$$

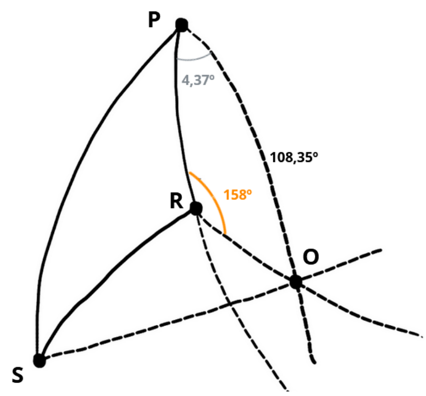

FIGURA 15: Esboço 3 do problema 3
FONTE: Os Autores (2023)

Neste problema, decidimos omitir uma parte significativa dos cálculos, mas fornecemos esboços para que o leitor interessado em resolver possa ter uma ideia do problema. Lembramos que é fundamental atentar-se às duas *Leis dos Cossenos* ao abordar a resolução, visto que, os dois *applets* desenvolvidos utilizam apenas a *Lei dos Cossenos para os Lados*, um com objetivo de encontrar o valor da medida do arco e outro voltado ao cálculo do valor da medida do ângulo.

Considerações Finais

Neste trabalho exploramos a aplicação prática da Geometria Esférica com ênfase nas *Leis dos Cossenos*, que são fundamentais para calcular distâncias na superfície esférica. Apresentamos problemas específicos de navegação e localização, utilizando as leis para resolver questões envolvendo latitude, longitude e direção. Além disso, foram desenvolvidos *applets* no GeoGebra para visualizar de forma interativa os conceitos discutidos.

Ressaltamos que a exatidão das operações foi um grande desafio, pois envolveu o conflito entre acessibilidade do usuário e precisão nos resultados, isto é, facilitar a escolha da latitude e da longitude utilizando maior incremento obtendo assim maior erro ou, utilizar menor incremento e obter maior precisão nos resultados.

As experiências e os desafios enfrentados na produção do *applet* proporcionaram uma compreensão prática e aplicada da Geometria Esférica. Além disto, a utilização do GeoGebra, por sua eficácia e versatilidade, não apenas se revela útil em cursos de licenciatura, mas também desempenha um papel significativo na educação básica, proporcionando uma abordagem prática e visual para o estudo desses conceitos complexos.

Em última análise, a contínua exploração e compreensão desses conceitos contribuem não apenas para o estudo da matemática, mas também para a resolução de problemas concretos em diversas áreas do conhecimento, tais como: Navegação, Geografia e Ciências da Terra. Portanto, a Geometria Esférica desempenha um papel essencial conectando a matemática pura com aplicações práticas no mundo real.

Referências

ARAÚJO, Cleiton. **Coordenadas geográficas**. Nerdprofessor**,** 2017. Disponível em: https://nerdprofessor.com.br/coordenadas-geograficas-localizacao/. Acesso em: 4 set. 2024.

Bearing Problems & Navigation, 2018. 1 vídeo (18min). Publicado pelo canal The Organic Chemistry Tutor. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cSKAqfGXOPI&t=981s. Acesso em 02 set. 2024.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Differential geometry of curves and surfaces**. New York: Dover Publications, 2016.

COSTA, Sueli Irene Rodrigues; SANTOS, Sandra Augusta. **Geometrias Não Euclidianas**. Revista Ciência Hoje, Manaus, v. 11, n. 65, p. 14-23. 1990.

CIDADE-BRASIL. **Estados Brasileiros**. Disponível em: https://www.cidade-brasil.com.br/. Acesso em: 4 set. 2024.

DISTÂNCIA ENTRE CIDADES. **Distância entre Cidades**. Disponível em: https://www.distanciasentrecidades.com/. Acesso em: 4 set. 2024.

How to Construct Earth use GeoGebra, 2022. 1 vídeo (3min). Publicado pelo canal Ramesh Jaiswal. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=k1ugd0yBj6I. Acesso em 30 out. 2024.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Coordenadas Geográficas**. Rio de Janeiro, IBGE, 2024. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21730-coordenadas-geograficas.html. Acesso em: 4 set. 2024.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Formas da Terra**. Rio de Janeiro, IBGE, 2024. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21729-formas-da-terra.html. Acesso em: 4 set. 2024.

JENNINGS, George A. **Modern Geometry with Applications**. New York: Springer Science+Business Media New York, 1994.

PHYSICAL GEOGRAPHY. **(b)Location, Distance, and Direction on Maps**. Canadá, 1999. Disponível em: http://www.physicalgeography.net/fundamentals/2b.html#google vignette. Acesso em: 4 set. 2024.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. 2ª ed. Campinas: UNICAMP, 2008.

STROGATZ, Steven. **O poder do infinito**. Tradução de Paulo Afonso. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sextante, 2022. Título original: Infinite Powers.

WOLFE, Harold Eichholz. **Introduction to non euclidean geometry**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.

Enviado:18/07/2024

Aceito:28/08/2024